S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 264–273 (2017) УДК 517.53

DOI 10.17377/semi.2017.14.024 MSC 30E05; 30D35

О КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ НЕВАНЛИННЫ ИЗ L^p-ПРОСТРАНСТВ

Е.Г. РОДИКОВА

Abstract. In this paper we solve the multiple interpolation problem in the class of analytic functions in the unit disk with the Nevanlinna Characteristic from Lp-spaces under the condition that interpolation nodes are contained in a finite union of Stolz angles and we describe the principal parts of a Laurent series of meromorphic functions with the same restrictions on the Nevanlinna characteristic.

Keywords: meromorphic function, multiple interpolation, a Laurent series, principal parts, the Nevanlinna characteristic.

1. Введение

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, D — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D. Для любых $\alpha > -1$, $0 < p < +\infty$ определим класс S_α^p (см. [14]):

$$S_\alpha^p := \left\{ f \in M(D) : \int_0^1 (1-r)^\alpha T^p(r,f)dr < +\infty \right\},$$

где $T(r,f)$ — характеристика Р. Неванлинны функции f (см. [9]):

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi + N(r,f),$$

Rodikova, E.G., Multiple interpolation for Nevanlinna type spaces.

Поступила 9 августа 2016 г., опубликована 24 марта 2017 г.

$N(r,f) = \int\limits_0^r \frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}dt$, $0 < r < 1$, $n(t,\infty)$ — количество полюсов в круге $|z| < t$, $0 < t < 1$; $n(0,\infty)$ — кратность полюса в точке $z = 0$, $a^+ = \max(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$S^p_{\alpha,a} := S^p_\alpha \bigcap H(D).$$

Отметим, что классы S^p_α были введены и исследованы Ф.А. Шамояном в [14]. Они являются естественным обобщением классов Неванлинны —Джрбашяна $S_\alpha \equiv S^1_\alpha$. В [17] было установлено, что класс S^p_α инвариантен относительно оператора дифференцирования. В данной работе исследуются вопросы интерполяции в классах $S^p_{\alpha,a}$ и получено их важное приложение в теории мероморфных функций: полностью описаны главные части разложения Лорана меромофных в единичном круге функций из S^p_α-пространств.

При решении задачи интерполяции важно найти естественный класс, которому должно принадлежать сужение функции на интерполяционное множество. Обозначим его l^p_α.

Как установлено в [10], если $f \in S^p_{\alpha,a}$, то

$$\ln^+ M(r,f) = o\left(\frac{1}{(1-r)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}\right), \quad r \to 1-0, \tag{1}$$

где $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, причем оценка (1) является точной.

Поэтому

$$l^p_\alpha = \left\{\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} : \ln^+|\gamma_k| = o\left(\frac{1}{(1-|\alpha_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}\right), \quad k \to +\infty\right\}.$$

Сформулируем задачу кратной интерполяции в классе $S^p_{\alpha,a}$: пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$ — произвольные последовательности комплексных чисел из D; обозначим через p_j — кратность появления числа α_j во всей последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $s_j \geq 1$ — кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_1^j$. Очевидно, что $1 \leq s_j \leq p_j \leq +\infty$. Требуется выявить критерии для $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$, обеспечивающие существование функции $f \in S^p_{\alpha,a}$, такой что

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, \; k = 1, 2, \ldots$$

Отметим, что решению интерполяционных задач в различных классах аналитических функций посвящено множество работ отечественных и зарубежных ученых: А.Г. Нафталевича [8], Х. Шапиро и А. Шилдса [18], С.А. Виноградова и В.П. Хавина [20], М.М. Джрбашяна [5], Н.А. Широкова и А.М. Коточигова [7], К. Сейпа [12], А. Хартмана [6], В.А. Беднаж и Ф.А. Шамояна [1] и др. Фундаментальный результат в этой области принадлежит Л. Карлесону [3]. Данная работа продолжает исследования, начатые в [2] и [16] при решении задач интерполяции в классах аналитических в круге функций со степенным ростом характеристики Р. Неванлинны и в классе М.М. Джрбашяна.

Статья построена следующим образом: в следующей части работы мы сформулируем основной результат и докажем некоторые вспомогательные утверждения. Во второй части работы мы докажем основной результат статьи.

2. Формулировка основного результата и доказательство вспомогательных утверждений

Для формулировки результатов работы введем дополнительные обозначения и определения.

Для любого $\beta > -1$ символом $\pi_\beta(z, \alpha_k)$ будем обозначать бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$ (см. [4]):

$$\pi_\beta(z, \alpha_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp(-U_\beta(z, \alpha_k)), \tag{2}$$

где

$$U_\beta(z, \alpha_k) = \frac{2(\beta+1)}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\beta \ln|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\alpha_k}|}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}} d\theta \rho d\rho.$$

Обозначим $\pi_{\beta,n}(z, \alpha_k)$ произведение $\pi_\beta(z, \alpha_k)$ без n-го фактора.

Как установлено в [4], произведение $\pi_\beta(z, \alpha_k)$ сходится абсолютно и равномерно в D тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|)^{\beta+2} < +\infty.$$

При $\beta + 1 = m \in \mathbb{Z}_+$ произведение (2) примет вид (см. [4]):

$$\pi_m(z, \alpha_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{\alpha}_k(\alpha_k - z)}{1 - \overline{\alpha}_k z} \exp \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j} \left(\frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - \overline{\alpha}_k z}\right)^j.$$

Определение 1. *Углом Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0 < \delta < 1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$.*

Последовательность комплексных чисел $\{z_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset D$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{k(\alpha+p+1)}} < +\infty, \tag{3}$$

где $n_k = card\{z_k : |z_k| < 1 - \frac{1}{2^k}\}$, $k = 1, 2, ...$;

$$|\pi'_{m,k}(z_k)| \ge \exp \frac{-\varepsilon(k)}{(1 - |z_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}, \tag{4}$$

для всех $m > \frac{\alpha+1}{p}$, $\alpha > -1$, $0 < p < +\infty$ и некоторой положительной бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon(k)\}$,

$$\sup_{k \ge 1}\{p_k\} = n,$$

отнесем к классу $\widetilde{\Delta}$.

Основным результатом статьи является доказательство следующего утверждения:

Теорема 1. *Пусть $\alpha > -1$, $0 < p < +\infty$; $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - произвольная последовательность комплексных чисел из D, расположенных в конечном числе углов Штольца:*

$$\{\alpha_k\}_1^{\infty} \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$$

при некотором δ, $0 < \delta < \frac{p}{2(\alpha+p+1)}$.

Если $\{\alpha_k\}_1^{\infty} \in \widetilde{\Delta}$, то для любой последовательности $\{\gamma_k\}_1^{\infty} \in l_\alpha^p$ можно построить в явном виде функцию $f \in S_{\alpha,a}^p$, являющуюся решением интерполяционной задачи

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k,\ k = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

при всех $s_k \geq 1$.

Обратно, если задача (5) *разрешима при всех $s_k \geq 1$ и $\{\gamma_k\}_1^{\infty} \in l_\alpha^p$, то узлы интерполяции $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ принадлежат классу $\widetilde{\Delta}$.*

Пусть $\{\gamma_k\}_1^{\infty} \in l_\alpha^p$, то есть

$$\gamma_k = \exp \frac{\delta(k)}{(1-|\alpha_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}, \tag{6}$$

$\delta(k) > 0$, $\delta(k) \to 0$, $k \to +\infty$.

Последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ назовем *интерполяционной* в классе $S_{\alpha,a}^p$, если существует функция $f \in S_{\alpha,a}^p$, такая что $f(\alpha_k) = \gamma_k$ для произвольной последовательности $\{\alpha_k\} \in D$.

Доказательство основной теоремы основывается на вспомогательных утверждениях.

Теорема А. (см. [11]) *Пусть $\alpha > -1$, $0 < p < +\infty$; $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел из D, расположенных в конечном числе углов Штольца, т.е.*

$$\{\alpha_k\}_1^{\infty} \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s),$$

при некотором δ, $0 < \delta < \frac{p}{2(\alpha+p+1)}$.
Следующие утверждения эквивалентны:
i) $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — интерполяционная последовательность в классе $S_{\alpha,a}^p$;
ii) сходится ряд:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{k(\alpha+p+1)}} < +\infty, \tag{7}$$

$n_k = card\{z_k : |z_k| < 1 - \frac{1}{2^k}\}$, $k = 1, 2, \dots$; и существует последовательность $\{\varepsilon(k)\}_{k=1}^{+\infty}$, $\varepsilon(k) \to 0$, $k \to +\infty$, такая что

$$|\pi_\beta'(\alpha_k)| \geq \exp \frac{-\varepsilon(k)}{(1-|\alpha_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}, \tag{8}$$

при всех $\beta > \frac{\alpha+1}{p}$.

Здесь и в дальнейшем, если не оговорено иное, через c, c_1, ..., $c_n(\alpha, \beta, \dots)$ мы будем обозначать произвольные положительные постоянные, зависящие от α, β, ..., значение которых несущественно.

Обозначим

$$K_\rho(\alpha_n) := \left\{ z \in D : \, |z - \alpha_n| < \exp \frac{-\rho_n}{(1 - |\alpha_n|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \right\},$$

$|\alpha_n| < 1$, $\rho_n > 0$, $\rho_n = o(1)$, $n \to +\infty$.

Лемма 1 (см. [11])**.** *Если точки последовательности* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *находятся в конечном числе углов Штольца, то есть* $\{\alpha_k\}_1^\infty \subset \bigcup\limits_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$ *при некотором* δ, $0 < \delta < \frac{p}{2(\alpha+p+1)}$, *тогда для функции*

$$g_k(z) = \exp \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{+\infty} q_k^j \frac{(1 - {\rho_j}^2)^{\hat\beta}}{(1 - z\rho_j e^{-i\theta_s})^{\hat\beta + \frac{\alpha+1}{p}+1}}, z \in D, \tag{9}$$

$0 < \hat\beta < \frac{\alpha+1}{p} + 1$, $0 < \rho_j < 1$, $j = 1, 2, ...$,
справедлива следующая оценка:

$$|g_k(\alpha_k)| \geq \exp \frac{\delta_0(k)}{(1 - |\alpha_k|^2)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}, \tag{10}$$

где $\delta_0(k) \sim \frac{q_k}{1-q_k}$, $q_k = \delta_k + \varepsilon_k$, $k = 1, 2, ...$, $\{\varepsilon_k\}$ *— бесконечно малая последовательность из оценки* (8), $\{\delta_k\}$ *— бесконечно малая последовательность из оценки* (6).

Отметим, что функция $g_k(z)$ ассоциирована с последовательностью узлов интерполяции $\{\alpha_k\}$.

Очевидно, что оценка (10) справедлива для функции $g_k(z)$ и в любом круге $K_\rho(\alpha_k)$, $k = 1, 2, ...$

Лемма 2. *Если последовательность* $\{\alpha_k\} \subset D$ *удовлетворяет условию* (7), *тогда для произвольных* $z \in D$ *и* $m > \frac{\alpha+1}{p}$ *справедлива следующая оценка:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - |\alpha_k|^2}{|1 - \overline{\alpha}_k z|} \right)^{m+1} = o\left(\frac{1}{(1 - r)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \right), \, r \to 1 - 0.$$

Действительно, если $m > \frac{\alpha+1}{p}$, то из (7) следует, что (см. [15, с. 131])

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|)^{m+1} < +\infty. \tag{11}$$

Требуемая оценка устанавливается аналогичным образом, как в работе [11].

Лемма 3. *Предположим* $\{\alpha_k\}_1^\infty \subset \widetilde{\Delta}$*; тогда существует* $\rho = \rho_n$, *такое что для произвольного* $z \in K_\rho(\alpha_n)$, $n = 1, 2, ...$, *справедлива следующая оценка*

$$|\pi_{m,n}(z, \alpha_k)| \geq \exp \frac{-\varepsilon_n}{(1 - |\alpha_n|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}},$$

где $\varepsilon_n = o(1)$, $n \to +\infty$.

Требуемая оценка устанавливается аналогичным образом, как в работе [2].

Для формулировки и доказательства дальнейших результатов введем дополнительные обозначения.

Сначала заметим, что функция $\pi_{m,k}(z)\cdot\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{m+p_k+1}$ является аналитической в D и не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $z=\alpha_k$ при всех $m>\frac{\alpha+1}{p}$. Для произвольного $k\in\mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$\tau_k(z)=\left\{\pi_{m,k}(z)\cdot\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{m+p_k+1}\cdot g_k(z)\right\}^{-1}.$$

Можно утверждать, что в любой достаточно малой ε-окрестности точки α_k справедливо разложение:

$$\tau_k(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ |z-\alpha_k|<\varepsilon,$$

где $a_\nu(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left[\left\{\pi_{m,k}(z)\cdot\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{m+p_k+1}\cdot g_k(z)\right\}^{-1}\right]_{z=\alpha_k}$.

Лемма 4. *Если $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\widetilde{\Delta}$, тогда коэффициенты разложения $a_\nu(\alpha_k)$ удовлетворяют следующей оценке:*

$$|a_\nu(\alpha_k)|\le a(\nu),\ 0\le\nu\le p_k,\quad k\in\mathbb{N},$$

где $a(\nu)$ зависит от ν.

Доказательство леммы 4 проводится стандартным образом с использованием леммы 3 (см. [16]).

Введём в рассмотрение также полиномы

$$q_k(z)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Определим теперь систему аналитических функций в D:

$$\widetilde{\Omega}_k(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}q_k(z)}{(s_k-1)!\tau_k(z)}. \tag{12}$$

Очевидно, что

$$\widetilde{\Omega}_k(z)=g_k(z)\frac{\pi_{m,k}(z)}{(s_k-1)!}\cdot\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha}_kz}\right)^{m+p_k+1}\cdot\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^{\nu+s_k-1},$$

$k\in\mathbb{N}$, где $m>\frac{\alpha+1}{p}$.

Отметим, что метод построения такой системы функций впервые был предложен М.М. Джрбашяном в [5].

Справедливо следующя

Лемма 5. *Функции системы* (12) *обладают следующими интерполяционными свойствами:*

$$\widetilde{\Omega}_k^{(r)}(\alpha_k)=\begin{cases}1,\ r=s_k-1;\\0,\ r\neq s_k-1,\ 0\le r\le p_k-1.\end{cases}$$

Действительно, это сразу следует из разложения

$$\widetilde{\Omega}_k(z) = \frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!} - \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{m+p_k+1} \times \frac{\pi_{m,k}(z)g_k(z)}{(s_k-1)!}$$
$$\times \sum_{\nu=p_k-s_k+1}^{+\infty} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^{\nu+s_k-1} = \frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!} - \lambda(z),$$

функция $\lambda(z)$ имеет нуль кратности p_k в точке $z=\alpha_k$.

3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1.

Предположим, что узлы интерполяции удовлетворяют следующим условиям: $\{\alpha_k\} \subset \bigcup\limits_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$ при некотром $0<\delta<\frac{p}{2(\alpha+p+1)}$ и $\{\alpha_k\} \in \widetilde{\Delta}$. Для произвольной последовательности $\{\gamma_k\} \in l^p_\alpha$ построим интерполяционную функцию $f(z)$ следующим образом:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \widetilde{\Omega}_k(z) \frac{g_k(z)}{g_k(\alpha_k)},\ z \in D, \tag{13}$$

где g_k определяется равенством (9).

Используя лемму 4, получим: $f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Теперь докажем, что функция $f(z)$ принадлежит классу $S^p_{\alpha,a}$. Так как $\{\alpha_k\} \subset \bigcup\limits_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$, а члены последовательности $\{\gamma_k\}_1^{+\infty}$ удовлетворяют условию (6), то разбивая сумму (13) на n частей и применяя к каждой из них лемму 1, получим:

$$|f(z)| \le \sum_{s=1}^{n} \sum_{\alpha_k \in \Gamma_\delta(\theta_s)} \left|\frac{\gamma_k}{g_k(\alpha_k)}\right| \cdot |\widetilde{\Omega}_k(z)| \cdot |g_k(z)|$$

$$\le c_0 \sum_{s=1}^{n} \sum_{\alpha_k \in \Gamma_\delta(\theta_s)} \exp\frac{\delta(k)-\delta_0(k)}{(1-|\alpha_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \cdot |\widetilde{\Omega}_k(z)| \cdot |g_k(z)|.$$

Так как $\delta(k)-\delta_0(k) = (q_k-\varepsilon_k) - \frac{q_k}{1-q_k} = -\frac{q_k^2}{1-q_k} - \varepsilon_k < 0$ (здесь q_k, ε_k — положительные бесконечно малые последовательности из леммы 1), то

$$\exp\frac{\delta(k)-\delta_0(k)}{(1-|\alpha_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \le 1,$$

при всех $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом, имеем $|f(z)| \le c_0 \sum_{k=1}^{+\infty} |\widetilde{\Omega}_k(z)| \cdot |g_k(z)|$.

Оценим теперь сверху функции системы $\widetilde{\Omega}_k(z)$ при всех $k \in \mathbb{N}$:

$$|\widetilde{\Omega}_k(z)| = |g_k(z)| \frac{|\pi_{m,k}(z)|}{(s_k-1)!} \cdot \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\overline{\alpha}_k z|}\right)^{m+p_k+1}$$
$$\times \left|\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^{\nu+s_k-1}\right|.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\overline{\alpha_k}z|}\right)^{m+p_k+1}|z-\alpha_k|^{s_k-1+\nu}\leq\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{m+p_k+1}}{|1-\overline{\alpha_k}z|^{m+p_k+2-s_k-\nu}}$$

$$=\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}\cdot(1-|\alpha_k|^2)^{p_k}}{|1-\overline{\alpha_k}z|^{m+p_k+2-s_k-\nu}}\leq\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}}{|1-\overline{\alpha_k}z|^{m+2}}.$$

Но

$$\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}}{|1-\overline{\alpha_k}z|^{m+2}}\leq\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}}{(1-|z|)^{m+2}},$$

поэтому

$$|f(z)|\leq c_0\sum_{k=1}^{+\infty}|\widetilde{\Omega}_k(z)|\cdot|g_k(z)|\leq c_0\sum_{k=1}^{+\infty}|g_k(z)|^2\frac{|\pi_{m,k}(z)|}{(s_k-1)!}\cdot\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}}{(1-|z|)^{m+2}}.$$

Зафиксируем номер $k=k_0$ и обозначим через g_{k_0} функцию

$$g_{k_0}(z)=\exp\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{+\infty}q_{k_0}^{j}\frac{(1-{\rho_j}^2)^{\hat{\beta}}}{(1-z\rho_je^{-i\theta_s})^{\hat{\beta}+\frac{\alpha+1}{p}+1}},z\in D.$$

Принимая во внимание известную оценку произведения Джрбашяна (см. [13]):

$$\ln^+|\pi_{m,k}(z,\alpha_j)|\leq c_m\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|\alpha_j|}{|1-\overline{\alpha}_jz|}\right)^{m+1},$$

при всех $k\geq k_0$ будем иметь:

$$|f(z)|\leq c_0|g_{k_0}(z)|^2\cdot\exp\left\{c_m\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|\alpha_j|}{|1-\overline{\alpha}_jz|}\right)^{m+1}\right\}$$

$$\times\frac{1}{(1-|z|)^{m+2}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(s_k-1)!}(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}.$$

Из (7) следует сходимость ряда (11) и поэтому функция f удовлетворяет следующей оценке:

$$|f(z)|\leq c_0|g_{k_0}(z)|^2\cdot\exp\left\{c_m\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|\alpha_j|}{|1-\overline{\alpha}_jz|}\right)^{m+1}\right\}\cdot\frac{c_3}{(1-|z|)^{m+2}}.$$

Из работ Ф.А. Шамояна (см. [14], также [15, с. 132]) и автора (см. [10]) следует, что мажоранта принадлежит пространству $S^p_{\alpha,a}$, а следовательно, и функция $f\in S^p_{\alpha,a}$ при всех $\alpha>-1$, $0<p<+\infty$.

Обратное утверждение непосредственно следует из результата, установленного в работе [11]. Теорема 1 доказана.

Хорошо известно, что если $\{z_k\}$ — последовательность полюсов функции $F\in M(D)$ порядка не выше, чем n, то по теореме Лорана в окрестности любой точки z_k функция F допускает разложение вида:

$$F(z)=\frac{a_{k,n}}{(z-z_k)^n}+\frac{a_{k,n-1}}{(z-z_k)^{n-1}}\ldots+\frac{a_{k,1}}{(z-z_k)}+\psi(z),$$

где ψ — аналитическая в окрестности точки z_k функция.

Приведем теперь очень важное следствие из теоремы 1, в котором мы получим описание коэффициентов $a_{k,i}$, $i=\overline{1,n}$ главных частей разложения Лорана произвольной функции $F \in S_\alpha^p$ в окрестности особых точек.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > -1$, $0 < p < +\infty$; $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *- произвольная последовательность комплексных чисел из* D, *расположенных в конечном числе углов Штольца:*

$$\{z_k\}_1^\infty \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$$

при некотором δ, $0 < \delta < \frac{p}{2(\alpha+p+1)}$.

Если $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \in \widetilde{\Delta}$, *то для того, чтобы существовала функция* $F \in S_\alpha^p$ *с главными частями*

$$H(z, z_k, a_k) = \frac{a_{k,n}}{(z-z_k)^n} + \frac{a_{k,n-1}}{(z-z_k)^{n-1}} \ldots + \frac{a_{k,1}}{(z-z_k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\ln^+ |a_{k,i}| = o\left(\frac{1}{(1-|z_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}\right), k \to +\infty,\, i=\overline{1,n}.$$

Это утверждение устанавливается аналогичным образом, как в работе [2].

References

[1] Bednazh V. A., *Description of traces, characteristic of the principal parts in the Laurent expansion of classes of meromorphic functions with restrictions on growth characteristics Nevanlinna*: Thesis Abstract. St.Peter., (2007), 16 p. (in Russian)

[2] Bednazh V. A., Rodikova E. G., Shamoyan F. A., *Multiple interpolation and principal parts of a Laurent series for meromorphic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic*, Complex Analysis and Operator Theory, **11**:1 (2017), 197–215. MR3595982

[3] Carleson L.,*An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math., **80** (1958), 921–930. MR0117349

[4] Djrbashian M. M., *On the representation problem of analytic functions*, Soob. Inst. Math. i Mekh. AN ArmSSR., **2** (1948), 3-–40 . (in Russian)

[5] Djrbashian M.M., *Basicity of some biorthogonal systems and the solution of the multiple interpolation problem in H^p-classes in the halfplane*, Izv. Akad. Nauk ArmSSR, Matematika., **43**:6 (1978), 1327–1384 . (in Russian)

[6] Hartmann A., Massaneda X., Nicolau A., Thomas P., *Interpolation in the Nevanlinna and Smirnov classes and harmonic majorants*, J. Funct. Anal., **217** (2004), 1–37. MR2097605

[7] Kotochigov A. M., *Free interpolation in Jordan domains*: Thesis Abstract, The Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics, St.Peter., (2001), 24 p. (in Russian)

[8] Naftalevic A. G., *On interpolation by functions of bounded characteristic*, Vilniaus Valst. Univ. Mokslu Darbai. Mat. Fiz. Chem. Mokslu Ser., **5** (1956), 5–27. (in Russian) MR0120387

[9] Nevanlinna R., *Eindeutige analytische Funktionen*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin (1953). MR0057330

[10] Rodikova E. G., *On estimates of the expansion coefficients of certain classes of analytic functions in the disk*, in: Abstracts of Petrozavodsk international conference «Complex analysis and its applications», Petrozavodsk St.Univ., (2012), 64–69. (in Russian)

[11] Rodikova E. G., *On Interpolation in the class of analytic functions in the unit disk with the Nevanlinna characteristic from Lp-spaces*, Journal of Siberian Federal University, Math. and phys. **9**:1 (2016), 69–78.

[12] Seip K.,*Interpolation and sampling in spaces of analytic functions*, University Lecture Series, Amer. Math. Soc., Providence., **33** (2004). MR2040080

[13] Shamoyan F.A.,*M. M. Dzhrbashian's factorization theorem and characterization of zeros of functions analytic in the disk with a majorant of bounded growth*, Izv. Akad. Nauk ArmSSR, Matematika. **13**:5–6 (1978), 405–422 . (in Russian) MR0541789

[14] Shamoyan F. A., *Parametric representation and description of the root sets of weighted classes of holomorphic functions in a disk*, Sib. Math. Journ., **40**:6 (1999), 1422–1440. (in Russian) MR1741095

[15] Shamoyan F.A., *Weighted spaces of analytic functions with mixed norm*, Bryansk: Bryansk St. Univ., 2014. (in Russian)

[16] Shamoyan F. A., Bednazh V. A.,*Multiple interpolation in weighted classes of analytic functions in the disk*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 354–361. (in Russian) Zbl 1327.30069

[17] Shamoyan F. A., Kursina I. S., *On the invariance of some class of holomorphic functions with respect to integro-differentiation operator*, Zapiski nauch. semin. POMI,**255** (1998), 184–197. (in Russian) Zbl 1134.30326

[18] Shapiro J., Shields A.,*On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. J. Math., **83** (1961), 513–532. MR0133446

[19] Stein E.M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press (1970). MR0290095

[20] Vinogradov S. A., Havin V. P., *Free interpolation in H^∞ and in some other classes of functions*, J. of Math. Sci., **47** (1974), 15–54. (in Russian) MR0393497

Eugenia Gennadevna Rodikova
Bryansk State University,
str. Bezhitskaya, 14,
241036, Bryansk,Russia
E-mail address: evheny@yandex.ru