S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 274–279 (2017) УДК 512.552.18
DOI 10.17377/semi.2017.14.025 MSC 16P10

КОНЕЧНЫЕ КОЛЬЦА С ЭЙЛЕРОВЫМИ НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ГРАФАМИ

А.С. КУЗЬМИНА, Ю.Н. МАЛЬЦЕВ

Abstract. We describe all associative finite rings with Eulerian nilpotent graphs.

Keywords: associative ring, finite ring, nilpotent graph, Eulerian graph.

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца (не обязательно коммутативные и не обязательно имеющие единицу).

Графом делителей нуля $\Gamma(R)$ кольца R называется граф, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

В последние годы был опубликован ряд статей, в которых изучаются кольца, графы делителей нуля которых обладают тем или иным свойством. Так, например, полностью описаны конечные ассоциативные кольца, имеющие планарные графы делителей нуля [1, 2, 3, 4], описаны конечные ассоциативные кольца с эйлеровыми графами делителей нуля [5] и конечные кольца с полными двудольными графами делителей нуля [6]. Далее, работа [7] посвящена полному описанию конечных ассоциативных колец с однородными графами делителей нуля. В статье [8] авторами изучаются свойства конечных колец, графы делителей нуля которых удовлетворяют условию Дирака (полного описания таких колец пока получить не удалось). Позже понятие графа делителей нуля было сформулировано и для неассоциативного случая (см., например, работы [9, 10, 11]).

Kuzmina, A.S., Maltsev, Yu.N., Finite rings with Eulerian nilpotent graphs.

Поступила 9 февраля 2017 г., опубликована 30 марта 2017 г.

Понятие графа делителей нуля неоднократно модифицировалось, вводились и исследовались разновидности графа делителей нуля. Так, например, в работах [12, 13, 14, 15, 16, 17] изучается так называемый нильпотентный граф кольца. Данное определение было введено в работе [13]. Изучению такого графа посвящена и настоящая статья. Дадим определение нильпотентного графа кольца. Итак, пусть R – произвольное ассоциативное кольцо и $N(R)$ – множество нильпотентных элементов кольца R. Вершинами нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$ кольца R являются элементы множества

$$Z_N(R)^* = \{x \in R \setminus \{0\} \mid (\exists y \in R \setminus \{0\})(xy \in N(R))\},$$

при этом две различные вершины $x, y \in Z_N(R)^*$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $xy \in N(R)$. Легко видеть, что если $(xy)^n = 0$, то $(yx)^{n+1} = y(xy)^n x = 0$. Кроме того, из определений следует, что граф делителей нуля $\Gamma(R)$ является подграфом нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$. В работах [12, 13, 14, 15, 16] исследуются свойства нильпотентного графа матричных, регулярных (в смысле фон Неймана) колец, некоторых классов коммутативных колец (стоит отметить, что в работе [12] в качестве вершин нильпотентного графа рассматривались все элементы кольца). В работе [17] полностью описаны конечные ассоциативные кольца, нильпотентный граф которых является однородным, двудольным или полным.

Цель настоящей работы – описать конечные ассоциативные кольца, нильпотентный граф которых является эйлеровым.

Введем обозначения и понятия, используемые в настоящей работе.

Пусть аддитивная группа кольца R разлагается в прямую сумму своих ненулевых аддитивных подгрупп $A_i, i = 1, \ldots, n$ и $n \geq 2$, т.е. $R = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_n$. Если все A_i являются двусторонними идеалами кольца R, то кольцо R называют *разложимым* и пишут $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Через $J(R)$ мы будем обозначать радикал Джекобсона кольца R [19, с. 73].

Для простого числа p будем полагать, что $GF(p^n)$ – поле из p^n элементов. Кольцо всех квадратных матриц n-го порядка с коэффициентами из кольца R обозначим через $M_n(R)$. Символами e_{ij}, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, обозначим матричные единицы кольца $M_n(R)$, если кольцо R содержит единицу, а символом $A = (a_{ij})$ – матрицу из кольца $M_n(R)$, у которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит элемент $a_{ij} \in R$, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Количество элементов в конечном множестве A мы будем обозначать через $|A|$.

Эйлеровым графом называется граф, имеющий такой цикл, в котором содержатся все вершины и все ребра графа, причем каждое ребро встречается один раз. Из теории графов известно, что связный граф является эйлеровым в том и только в том случае, если каждая вершина этого графа имеет четную степень [18]. Подчеркнем, что пустой граф и граф, состоящий из одной вершины, мы будем считать эйлеровыми. Степень вершины v графа мы будем обозначать символом $\rho(v)$.

Перед тем, как приступить к формулировке и доказательству основного результата нашей статьи, докажем вспомогательную лемму.

Лемма. *Пусть R – ненулевое ассоциативное конечное ненильпотентное кольцо, $|R| = p^\alpha$ (p – простое число) и $J(R) \neq (0)$. Тогда $|N(R)| = p^\beta$, причем $\beta \geq 1$.*

Доказательство. Заметим, что $J(R) \subseteq N(R)$ и $R/J(R) \cong \oplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(GF(p^{\gamma_i}))$ [19, С. 80]. Элемент $x \in R$ является нильпотентным в том и только в том случае, когда его образ $\overline{x}$ при каноническом гомоморфизме $\pi : R \to R/J(R)$, $\pi(y) = \overline{y}$ для всех $y \in R$, является нильпотентным. Поскольку $J(R) \neq (0)$ и $\langle J(R), +\rangle$ является подгруппой группы $\langle R, +\rangle$, то по теореме Лагранжа $|J(R)| = p^{\delta}$, где $\delta \geq 1$. По теореме Файна–Херстейна $|N(M_{n_i}(p^{\gamma_i}))| = p^{\gamma_i(n_i^2 - n_i)}$, $i \leq k$ [21]. Поэтому

$$|N(R)| = |J(R)| \cdot \prod_{i=1}^{k} (p^{\gamma_i})^{n_i^2 - n_i} = p^{\beta}$$

для некоторого числа $\beta \geq 1$. $\square$

Теперь мы переходим к изложению основного результата работы.

Теорема. *Пусть R – ненулевое ассоциативное конечное кольцо. Нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ является эйлеровым тогда и только тогда, когда кольцо R удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) *кольцо R является нильпотентным кольцом четного порядка;*
(2) *$R \cong \oplus_{i=1}^{k} GF(p_i^{\alpha_i})$, где $p_i \neq 2$ при $i = 1, 2, \ldots, k$ и $k \geq 2$;*
(3) *R является конечным полем;*
(4) *$R \cong GF(2^a) \oplus B$, где B – ненулевое нильпотентное кольцо нечетного порядка.*

Доказательство. Докажем сначала, что если кольцо R удовлетворяет одному из условий (1)–(4) теоремы, то граф $\Gamma_N(R)$ является эйлеровым. При этом мы будем пользоваться тем, что нильпотентный граф любого конечного ассоциативного кольца является связным [13, теорема 2.3], а также выше приведенной теоремой Эйлера [18, С. 34].

Если R – нильпотентное кольцо четного порядка и a – произвольный ненулевой элемент кольца R, то $\rho(a) = |R| - 2$ является четным числом. По теореме Эйлера граф $\Gamma_N(R)$ является эйлеровым. Если R изоморфно кольцу типа (2) или (3) из условия теоремы, то кольцо R не содержит нильпотентных элементов и его нильпотентный граф делителей нуля $\Gamma_N(R)$ совпадает с обычным графом делителей нуля $\Gamma(R)$. Согласно работе [5] в этом случае граф $\Gamma_N(R) = \Gamma(R)$ является эйлеровым. Если, наконец, $R \cong GF(2^a) \oplus B$, где B – ненулевое нильпотентное кольцо нечетного порядка, то для любого ненулевого элемента $b \in B$ его степень $\rho(b) = |R| - 2$ является четным числом. Пусть $x = u + v \in R$, где $0 \neq u \in GF(2^a)$ и $v \in B$. Если элемент $y = u_1 + v_1 \in R$, где $u_1 \in GF(2^a)$ и $v_1 \in B$, такой, что $xy = uu_1 + vv_1 \in N(R)$, то $u_1 = 0$. Верно и обратное утверждение. Поэтому $\rho(x) = |B| - 1$ является четным числом и граф $\Gamma_N(R)$ эйлеров.

Предположим, далее, что граф $\Gamma_N(R)$ является эйлеровым. И пусть также $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_s$, где R_i – не разложимые в прямую сумму идеалов кольца порядка $p_i^{\alpha_i}$ и p_i – простые числа при $i = 1, 2, \ldots, s$ [19, С. 29].

Случай 1. Пусть $R_1 = J(R_1), \ldots, R_s = J(R_s)$.

Тогда кольцо R является нильпотентным и для любого элемента $a \in R$ имеем, что $\rho(a) = |R| - 2$. По теореме Эйлера это число является четным, т.е. кольцо R является нильпотентным кольцом четного порядка.

Случай 2. Пусть $J(R_1) = (0), \ldots, J(R_s) = (0)$.

Так как каждое кольцо R_i, $i \leq s$, является неразложимым в прямую сумму, то $R \cong M_{n_1}\left(GF\left(p_1^{a_1}\right)\right) \oplus \ldots \oplus M_{n_s}\left(GF\left(p_s^{a_s}\right)\right)$. Согласно теореме Файна–Херстейна [21] в кольце матриц $M_n(GF(q))$ содержится ровно q^{n^2-n} нильпотентных элементов. Поэтому число всех нильпотентных элементов кольца R равно $p_1^{a_1(n_1^2-n_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s(n_s^2-n_s)}$ и степень единичного элемента кольца R в графе $\Gamma_N(R)$ равна $\rho(1) = |N(R)| - 1 = p_1^{a_1(n_1^2-n_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s(n_s^2-n_s)} - 1$. Поскольку $\Gamma_N(R)$ является эйлеровым, то $\rho(1)$ – четное число. Если, например, $n_1 \geq 2$ и e_{12} – матричная единица кольца $M_{n_1}\left(GF\left(p_1^{a_1}\right)\right)$, у которой на пересечении первой строки и второго столбца стоит единица, а остальные вхождения равны нулю, то степень элемента $c = (e_{12}, 0, \ldots, 0)$ равна

$$\rho(c) = p_1^{a_1(n_1^2-1)} \cdot p_2^{a_2 n_2^2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s n_s^2} - 2.$$

Действительно, если взять такой элемент $y = ((x_{ij}), b_2, \ldots, b_s) \in R$, где $(x_{ij}) \in M_{n_1}\left(GF\left(p_1^{a_1}\right)\right)$, $b_2 \in M_{n_2}\left(GF\left(p_2^{a_2}\right)\right), \ldots, b_s \in M_{n_s}\left(GF\left(p_s^{a_s}\right)\right)$, что cy является нильпотентным элементом, то $x_{21} = 0$, а x_{ij} при $(i,j) \neq (2,1)$ – произвольный элемент поля $GF\left(p_1^{a_1}\right)$ и $b_2, \ldots, b_s$ – произвольные элементы слагаемых $M_{n_2}\left(GF\left(p_2^{a_2}\right)\right), \ldots, M_{n_s}\left(GF\left(p_s^{a_s}\right)\right)$ соответственно. Вычисляя далее $\rho(c)$, мы должны исключить $y = 0$ и $y = c$. Аналогично доказывается, что

$$\rho((e_{11}, 0, \ldots, 0)) = p_1^{a_1(n_1^2-1)} \cdot p_2^{a_2 n_2^2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s n_s^2} - 1.$$

Противоречие доказывает, что $n_1 = n_2 = \ldots = n_s = 1$ и $R \cong \oplus_{i=1}^{k} GF(p_i^{\alpha_i})$. В этом случае $\Gamma_N(R) = \Gamma(R)$ и согласно результатам работы [5] получаем, что $p_1, \ldots, p_s$ – нечетные числа.

Случай 3. Пусть каждое кольцо R_i либо является нильпотентным, либо является полупростым, где $i \leq s$, причем само кольцо R не является ни нильпотентным, ни полупростым.

Тогда мы можем записать $R = A \oplus B$, где A – ненулевое полупростое кольцо, B – ненулевое нильпотентное кольцо. Возьмем произвольный ненулевой элемент $b \in B$. Тогда его степень $\rho((0,b)) = |R| - 2 = |A| \cdot |B| - 2$ является четным числом. Откуда следует, что порядок кольца R тоже является четным числом. Известно, что полупростое кольцо A содержит единицу e (см. [19]). Поскольку $\rho((e,0)) = |N(A)| \cdot |B| - 1$ – четное число, то числа $|B|$ и $|N(A)|$ являются нечетными. По теореме Веддербарна-Артина [19] имеем, что $A \cong \oplus_{i=1}^{t} M_{n_i}\left(GF\left(q_i\right)\right)$. Следовательно, по теореме Файна–Херстейна (см. [21]) число $|N(A)| = q_1^{n_1^2-n_1} \cdot q_2^{n_2^2-n_2} \cdot \ldots \cdot q_t^{n_t^2-n_t}$ является нечетным. Поскольку $|R| = |A| \cdot |B|$ – четное число, то $|A|$ тоже является четным числом и, например, $q_1 = 2^a$, $a \geq 1$. Откуда следует, что $n_1^2 - n_1 = 0$, т.е. $n_1 = 1$. Итак,

$$A = GF\left(2^a\right) \oplus M_{n_2}\left(GF\left(q_2\right)\right) \oplus \ldots \oplus M_{n_t}\left(GF\left(q_t\right)\right),$$

где $t \geq 1$. Если $t \geq 2$ и f – единичный элемент в $M_{n_2}\left(GF\left(q_2\right)\right)$, то

$$\rho((0, f, 0, \ldots, 0)) = \left|N\left(M_{n_2}\left(GF\left(q_2\right)\right)\right)\right| \cdot 2^a \cdot q_3^{n_3^2} \cdot \ldots \cdot q_t^{n_t^2} \cdot |B| - 1.$$

Это число является нечетным. Противоречие. Значит, $t = 1$ и $R = GF\left(2^a\right) \oplus B$, где B – нильпотентное кольцо нечетного порядка.

Случай 4. Пусть среди слагаемых $R_1, \ldots, R_s$ существует такое кольцо R_i, что $R_i \neq J(R_i)$ и $J(R_i) \neq (0)$.

Не нарушая общности, можно полагать, что $i = 1$, т.е. именно $R_1 \neq J(R_1)$ и $J(R_1) \neq (0)$. Тогда запишем $R = R_1 \oplus C$, где $C = R_2 \oplus \ldots \oplus R_s$. Возьмем произвольный ненулевой элемент $a \in J(R_1)$. Тогда $\rho((a, 0)) = |R| - 2$. Поскольку это число является четным, то $|R| = |R_1| \cdot |C|$ тоже является четным числом. Предположим, что кольцо R_1 содержит единицу f. Тогда $\rho((f, 0)) = |N(R_1)| \cdot |C| - 1$ – четное число. Откуда следует, что число $|N(R_1)| \cdot |C|$ является нечетным. Итак, число $|N(R_1)| \cdot |C|$ является нечетным, а число $|R_1| \cdot |C|$ является четным. Следовательно, $p_1 = 2$ и по лемме $|N(R_1)| = 2^\beta$, где $\beta \geq 1$. Получили противоречие, которое доказывает, что кольцо R_1 не может содержать единицу. Поскольку $R_1 \neq J(R_1)$, то фактор-кольцо $R_1/J(R_1)$ является полупростым кольцом с единицей [19]. Тогда в кольце R существует идемпотент e, являющийся прообразом этой единицы. Рассмотрим пирсовское разложение кольца R_1 (см. [19, С. 32]):

$$R_1 = eR_1e \dotplus eR_1(1-e) \dotplus (1-e)R_1e \dotplus (1-e)R_1(1-e).$$

Поскольку кольцо R_1 не содержит единицу и является не разложимым в прямую сумму идеалов, то, например, $eR_1(1-e) \neq (0)$. Кроме того,

$$eR_1(1-e) \dotplus (1-e)R_1e \dotplus (1-e)R_1(1-e) \subseteq J(R_1)$$

(см. [19]). Далее, число

$$\rho((e, 0)) = |N(eR_1e)| \cdot |eR_1(1-e)| \cdot |(1-e)R_1e| \cdot |(1-e)R_1(1-e)| \cdot |C| - 1$$

является четным. Поскольку $eR_1(1-e) \neq (0)$ и $\langle eR_1(1-e), +\rangle$ является подгруппой группы $\langle R_1, +\rangle$, то по теореме Лагранжа $|eR_1(1-e)| = p_1^\delta$, где $\delta > 0$. Значит, числа $|eR_1(1-e)|$, p_1 и $|C|$ являются нечетными. С другой стороны, пусть $0 \neq b \in J(R_1)$. Тогда число $\rho((b, 0)) = |R| - 2 = |R_1| \cdot |C| - 2$ является четным. Следовательно, $p_1 = 2$. Противоречие доказывает, что этот случай невозможен. □

References

[1] S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi, *When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph*, J.Algebra, **270** (2003), 169–180. MR2016655

[2] R. Belshoff, J. Chapman, *Planar zero-divisor graphs*, J. Algebra, **316** (2007), 471–480. MR2354873

[3] A.S. Kuz'mina, Yu.N. Maltsev, *Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs*, Asian-European J. Math., **1**:4 (2008), 565–574. MR2474188

[4] A.S. Kuzmina, *On finite non-nilpotent rings with planar zero-divisor graphs*, Discretnaya Matematika, **4** (2009), 60–75 (in Russian). MR2641018

[5] A.S. Kuzmina, *Finite rings with Eulerian zero-divisor graphs*, J. of Algebra and Its Appl., **11**:3 (2012), 551–559. MR3076515

[6] S. Akbari, A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings*, J. Algebra, **296** (2006), 462–479. MR2201052

[7] A.S. Kuzmina, Yu.N. Maltsev, *Finite rings with some restrictions on zero-divisor graphs*, Izvestiya vyzov. Matematika, **12** (2014), 49–59. MR3408298

[8] A.S. Kuzmina, Yu.N. Maltsev, *On Finite Rings in Which Zero-Divisor Graphs Satisfy the Dirac's condition*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **4(36)** (2015), 376–384. MR3431197

[9] I.M. Isaev, A.S. Kuzmina, *On Connectivity of Zero-Divisor Graphs of Algebras*, Vestnik Altai State Pedagogical Academy. Natural sciences, **7** (2011), 7–10.

[10] A.S. Kuzmina, *On structure of finite nilpotent rings with some restrictions on zero-divisor graphs*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 122–129. Zbl 06607072

[11] Kuzmina A.S. *On Nilpotent Finite Alternative Rings with Planar Zero-Divisor Graphs*, Alg. Colloquium, **23**:4 (2016), 657–661. MR3563557

[12] P. Chen, *A kind of graph structure of rings*, Alg. Colloquium, **10** (2003), 229–238. MR1980442
[13] A. Li, Q. Li, *A kind of graph structure on non-reduced rings*, Alg. Colloquium, **17**:1 (2010), 173–180. MR2589755
[14] A. Li, Q. Li, *A kind of graph structure on von-Neumann regular rings*, Int. J. of Algebra, **4**:6 (2010), 291–302. MR2652245
[15] M.J. Nikmehr, S. Khojasteh, *On nilpotent graph of a ring*, Turkish J. of Math., **37** (2013), 553–559. MR3070932
[16] A. Mahmoodi, *Nilpotent graphs of matrix algebras*, J. of Algebraic Structures and Their Appl., **1**:2 (2014), 123–132.
[17] A.S. Kuzmina, Yu.N. Maltsev, *Finite rings with regular nilpotent graphs*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 810–817. Zbl 1345.16021
[18] R. Diestel, *Graph theory*, Novosibirsk, 2002 (in Russian).
[19] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Moscow, Gelios–ARV, 2006 (in Russian).
[20] N. Jacobson, *Structure of rings*, AMS, **37**, 1968.
[21] N.J. Fine, I.N. Herstein, *The probability that a matrix be nilpotent*, Illinois J. Math., **2** (1958), 499–504. MR0096677

Anna S. Kuzmina, Yurii N. Maltsev
Altai State Pedagogical University,
55, Molodeghnaya st.,
Barnaul, Russia, 656031
E-mail address: akuzmina1@yandex.ru, maltsevyn@gmail.com