

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 14, стр. 308–316 (2017)

УДК 519.632

DOI 10.17377/semi.2017.14.028

MSC 65N21

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯГ.А. ПРОКОПЬЕВ, В.И. ВАСИЛЬЕВ,
А.М. КАРДАШЕВСКИЙ, П.В. СИВЦЕВ

АБСТРАКТ. This paper is interested at the Cauchy problem for Laplace's equation, which is to recover Dirichlet condition on the accessible part of the domain from additional conditions on the other part of domain. To solve this kind of ill-posed problem, we use a variational iterative method. Also, a direct method for numerical solution of the inverse boundary value problem is presented.

Keywords: inverse problem, ill-posed problem, Laplace equation, iterative method, direct method, difference scheme.

1. ВВЕДЕНИЕ

Математические модели многих явлений природы и технологических процессов представляют собой начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными для которых известными являются: геометрия области, коэффициенты определяющих уравнений, граничные и начальные условия. Однако, на практике не всегда известны коэффициенты уравнения, часть граничных и начальных условий. Для их определения приходится задавать дополнительные условия. Эти задачи входят в класс, так называемых, обратных задач [3], [4]. Одним из известных обратных задач является граничная обратная задача, целью которой является восстановление недостающих условий на некоторой недоступной части границы (которые не могут быть

PROKOPEV, G.A., VASIL'EV, V.I., KARDASHEVSKY, A.M., SIVTSEV, P.V., NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE CAUCHY PROBLEM FOR THE ELLIPTIC EQUATION.

© 2017 Прокопьев Г.А., Васильев В.И., Кардашевский А.М., Сивцев П.В.

Работа поддержана РФФИ (грант 17-01-00732), Правительством Российской Федерации (договор №14.Y26.31.0013).

Поступила 11 ноября 2016 г., опубликована 4 апреля 2017 г.

оценены из-за физических трудностей или недоступностью геометрии) из дополнительных граничных данных на оставшейся части границы. Простейшей обратной задачей из этого класса является задача Коши для уравнения Лапласа. М.М.Лаврентьевым была доказана условная корректность задачи Коши [1] в классе ограниченных решений, а в работе [2] впервые была сформулирована в виде обратной задачи.

Обратная задача Коши для уравнения эллиптического типа возникает в ряде приложений, таких как колебания конструкций, обнаружение коррозии внутри трубы, аналитическое и гармоническое продолжение функций, в геофизических методах разведки полезных ископаемых, в сверхзвуковой аэродинамике и т. д. К сожалению обратная задача Коши является некорректной, следовательно, численное решение может не зависеть непрерывно от начальных данных, что приводит к тому, что небольшая ошибка в дополнительном условии может привести к неограниченному решению. Это показал пример Адамара [8]. В течении последних десятилетий, задача Коши для эллиптических уравнений широко изучалась, например, в работах [9], [11] – [16].

В данной работе рассматривается обратная граничная задача Коши для эллиптического уравнения в прямоугольной области, заключающаяся в восстановлении значения граничного условия с помощью задания дополнительного условия на другой границе. Из-за некорректности данной обратной задачи, нам приходится находить решение с помощью подходящего численного метода [4] – [7], в частности, можно использовать итерационные методы. Для численного решения обратной задачи Коши в работах [11] – [17] предложены различные численные методы, такие как, модифицированная коллокация Треффта [11], метод фундаментальных решений (МФР) и различные итерационные методы [12] – [19]. Подробный сравнительный анализ прямых и итерационных методов проведен в работе [20].

Итерационные методы имеют ряд преимуществ, которые позволяют учитывать различные физические ограничения непосредственно в схеме итерационного алгоритма и отличаются простотой численной реализации. Одним из возможных недостатков такого метода является большое количество итераций, которое может потребоваться для достижения сходимости. Также рассматривается прямой метод численного решения обратной задачи с помощью разностной схемы с отрицательным весовым множителем, который может трактоваться как параметр регуляризации.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В прямоугольной области

$$\Omega = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = (x_1, x_2), 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

рассматривается неклассическая задача Коши для уравнения Лапласа

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega,$$

$$(2) \quad u(0, x_2) = \mu_1(x_2), \quad u(l_1, x_2) = \mu_2(x_2), \quad x_2 \in [0, l_2],$$

$$(3) \quad u(x_1, 0) = \mu_3(x_1), \quad x_1 \in (0, l_1),$$

$$(4) \quad u_{x_2}(x_1, 0) = \phi(x_1), \quad x_1 \in (0, l_1).$$

Необходимо найти решение $u(x_1, x_2)$ для эллиптического уравнения в прямоугольной области удовлетворяющее граничным условиям (2),(3) и восстановить неизвестную функцию $f(x_1)$ на недоступной части границы, с помощью дополнительного граничного условия на оставшейся части границы (4)

$$(5) \quad u(x_1, l_2) = f(x_1), \quad x_1 \in (0, l_1),$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \phi$ – известные функции.

3. ПРЯМОЙ МЕТОД

Введем равномерную сетку с шагом h_1 на интервале $\Omega_1 = [0, l_1]$

$$\omega = \{x_1 | x_1 = x_{1_i} = ih_1, i = 0, 1, \dots, N, Nh_1 = l_1\}$$

причем ω – множество внутренних узлов, а $\partial\omega$ – множество граничных узлов. Во внутренних узлах дифференциальный оператор аппроксимируем с помощью разностного оператора второго порядка

$$(6) \quad \Lambda y = -y_{\bar{x}_1 x_1}, \quad x_1 \in \omega$$

В сеточном гильбертовом пространстве H введем норму $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$, где

$$(7) \quad (y, w) = \sum_{x_1 \in \omega} y(x_1)w(x_1)h_1.$$

После дискретизации по пространственной переменной x_1 , получаем дифференциально-разностную задачу

$$(8) \quad \frac{d^2 y}{dx_2^2} - \Lambda y = 0, \quad x_1 \in \omega, \quad x_2 > 0,$$

$$(9) \quad y(x_1, 0) = \mu_3(x_1), \quad x_1 \in \omega,$$

$$(10) \quad \frac{dy}{dx_2}(x_1, 0) = \phi(x_1), \quad x_1 \in \omega.$$

Разностная схема для задачи (8)–(10) будет иметь вид

$$(11) \quad \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h_2^2} - \Lambda y_n = 0, \quad x_1 \in \omega, \quad n = 1, 2, \dots, M - 1$$

с дискретными аналогами граничных условий (2). Здесь $h_2 = l_2/M$.

Дискретный аналог граничного условия первого рода (9) имеет вид

$$(12) \quad y_0 = \mu_3(x_1), \quad x_1 \in \omega.$$

Дискретизацию граничного условия второго рода при $x_2 = h_2$ проведем со вторым порядком по h_2 на решении уравнения (8). Принимая во внимание, что

$$(13) \quad y_1 = y_0 + h_2 \frac{dy}{dx_2}(0) + \frac{h_2^2}{2} \frac{d^2 y}{dx_2^2}(0) + O(h_2^3),$$

получим

$$(14) \quad \frac{y_1 - y_0}{h_2} + \frac{h_2}{2} \Lambda y_0 = \phi(x_1).$$

Зададим произвольный отрицательный параметр σ и определим разностную схему

$$(15) \quad \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h_2^2} - \Lambda(\sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma)y_n + \sigma y_{n-1}) = 0.$$

При отрицательных значениях весового параметра $\sigma < 0$ данная разностная схема на каждом слое по второму направлению $n = 1, \dots, M - 1$ относительно компонент неизвестного вектора y_{n+1} представляет собой замкнутую систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, обладающей свойством диагонального преобладания, и поэтому решается одним из вариантов метода прогонки.

Следует отметить, что в работе монографии [4] доказана *Теорема 7.20* о том, что разностная схема (15) с начальными условиями (12) и (14) при отрицательных значениях весового параметра σ является ρ -устойчивой и представляет собой регуляризованную схему с параметром регуляризации $\alpha > 0$, а весовой множитель $\sigma = -\alpha/h_2^2$.

3.1. Результаты. Пример №1. Для вычислительного эксперимента было использовано точное решение $u(x_1, x_2) = \sin(x_1) \operatorname{sh}(x_2) + \cos(x_1) \operatorname{ch}(x_2)$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, x_2) &= \operatorname{ch}(x_2), & u(l_1, x_2) &= \operatorname{ch}(x_2), & x_2 &\in [0, l_2], \\ u(x_1, 0) &= \cos(x_1), & & & x_1 &\in (0, l_1), \\ u_{x_2}(x_1, 0) &= \sin(x_1), & & & x_1 &\in (0, l_1) \end{aligned}$$

в прямоугольной области $\Omega = (0, 2\pi) \times \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

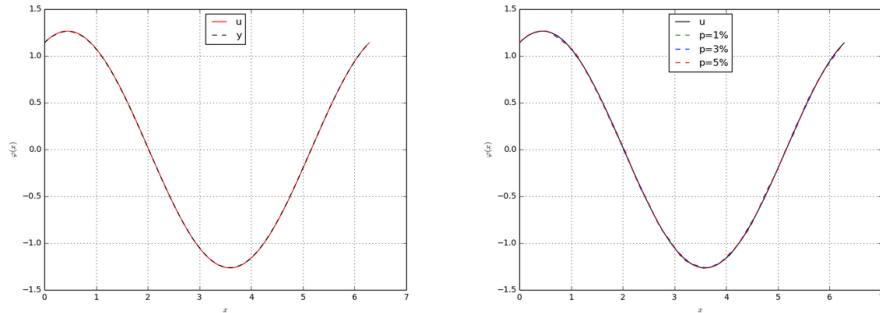


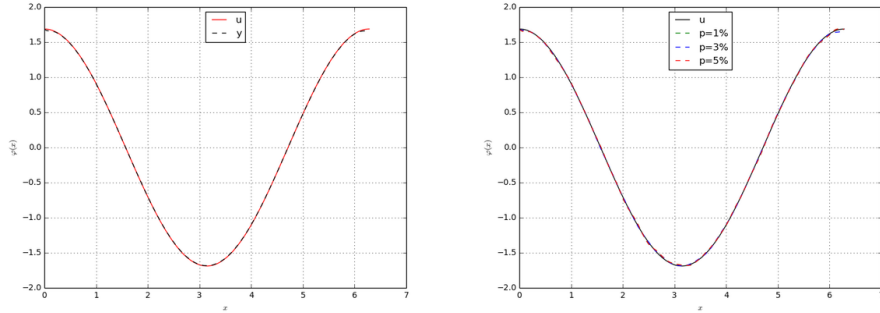
Рис. 1. Относительная погрешность $R = 0.2869\%$.

Пример №2. Для вычислительного эксперимента было использовано точное решение $u(x_1, x_2) = \cos(x_1) \exp(x_2)$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, x_2) &= \exp(x_2), & u(l_1, x_2) &= \exp(x_2), & x_2 &\in [0, l_2], \\ u(x_1, 0) &= \cos(x_1), & & & x_1 &\in (0, l_1), \\ u_{x_2}(x_1, 0) &= \cos(x_1), & & & x_1 &\in (0, l_1). \end{aligned}$$

в прямоугольной области $\Omega = (0, 2\pi) \times \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

Для вычисления применяется метод конечных разностей с использованием разностной схемы описанной в разделе 3. Расчеты проводились на равномерной

Рис. 2. Относительная погрешность $R = 0.4169\%$.

прямоугольной сетке. Относительную погрешность определяем по формуле

$$R = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (f_i - y_i^M)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N f_i^2}}.$$

На рисунках 1 и 2 слева показаны графики значения точного(u) и приближенного(y) решения с весовыми множителями на границе с искомым условием без добавления шума. Справа приведены результаты, при тех же весовых множителях, по решению данной задачи в условиях, когда дополнительное условие $\phi(x_1)$ задано с погрешностью $p = 1\%$, 3% , 5% соответственно. В экспериментах дополнительное условие возмущалось следующим образом:

$$\phi_p(x_1) = \phi(x_1) + 2p(0.5 - \sigma(x_1)) \max_{x_1 \in (0, l_1)} \phi(x_1), \quad x_1 \in (0, l_1),$$

где $\sigma(x_1)$ – случайная величина, равномерно распределенные на интервале $(0, 1)$. Для выделения более гладкого решения в качестве сглаживающего оператора возьмем K – кратно использованную трехточечную формулу:

$$\phi_i^{k+1} = (\phi_{i+1}^k + 4\phi_i^k + \phi_{i-1}^k)/6, \quad i = 1, \dots, M-1, \quad k = 0, \dots, K-1;$$

$$\tilde{\phi}_i = \phi_i^K, \quad i = 1, \dots, M-1.$$

сеточных функций, согласованных с дискретными аналогами граничных условий (2).

Для примера №1, расчетная сетка состоит из $N = 150$ узлов по пространственной переменной x и $M = 20$ узлов по пространственной переменной y с параметрами $\sigma = -15$, $K = 20$.

Для примера №2, расчетная сетка состоит из $N = 150$ узлов по пространственной переменной x и $M = 20$ узлов по пространственной переменной y с параметрами $\sigma = -150$, $K = 40$.

4. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

Будем ориентироваться на применении метода, для которого на каждой итерации решаются соответствующие корректные задачи на основе использования стандартного трехслойного итерационного процесса вариационного типа.

Пусть вместо задачи (1) – (4) рассматривается прямая задача для уравнения (1), когда вместо (3) используется граничное условие

$$(16) \quad y(x_1, l_2) = \varphi(x_1).$$

Для приближенного решения данной задачи будем использовать итерационный метод сопряженных градиентов, основанный на последовательном уточнении искомого граничного условия.

Итерационный метод:

$$(17) \quad B \frac{(\varphi_{k+1} - \varphi_k) + (1 - \alpha_{k+1})(\varphi_k - \varphi_{k-1})}{\alpha_{k+1}\tau_{k+1}} + A\varphi_k = \mu_3, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где A – самосопряженный положительно определенный оператор, τ_{k+1}, α_{k+1} – определяются следующими формулами

$$(18) \quad \tau_{k+1} = \frac{(w_k, r_k)}{(Aw_k, w_k)}, \quad w_k = B^{-1}r_k \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$(19) \quad \alpha_{k+1} = 1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \frac{1}{\alpha_k} \frac{(w_k, r_k)}{(Aw_{k-1}, w_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_1 = 1.$$

Данные формулы получены из условия минимизации погрешности $\|z_n\|_A$, $z_n = \varphi_n - \varphi$.

Критерием остановки итерационного процесса является $\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\| < \varepsilon$, где ε – достаточно малое положительное число.

4.1. Результаты. Пример №1. Для вычислительного эксперимента было использовано точное решение $u(x_1, x_2) = \cos(x_1) \exp(x_2)$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, x_2) &= \exp(x_2), & u(l_1, x_2) &= \exp(x_2), & x_2 &\in [0, l_2], \\ u(x_1, 0) &= \cos(x_1), & & & x_1 &\in (0, l_1), \\ u_{x_2}(x_1, 0) &= \cos(x_1), & & & x_1 &\in (0, l_1). \end{aligned}$$

в прямоугольной области $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{6})$.

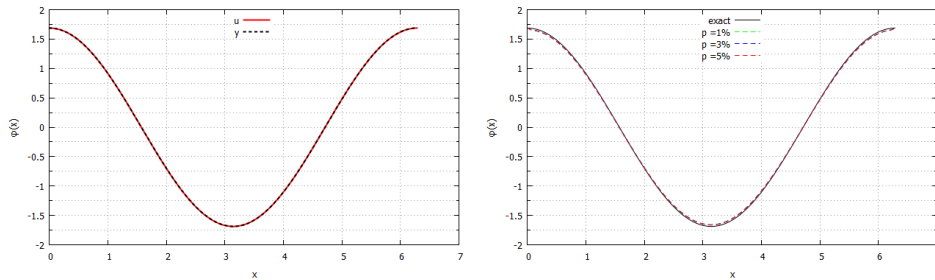


Рис. 3. Относительная погрешность $R = 0.0801\%$.

Пример №2. Для вычислительного эксперимента было использовано точное решение $u(x_1, x_2) = \sin(x_1) \operatorname{sh}(x_2) + \cos(x_1) \operatorname{ch}(x_2)$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, x_2) &= \operatorname{ch}(x_2), & u(l_1, x_2) &= \operatorname{ch}(x_2), & x_2 &\in [0, l_2], \\ u(x_1, 0) &= \cos(x_1), & & & x_1 &\in (0, l_1), \\ u_{x_2}(x_1, 0) &= \sin(x_1), & & & x_1 &\in (0, l_1). \end{aligned}$$

в прямоугольной области $\Omega = (0, 2\pi) \times \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

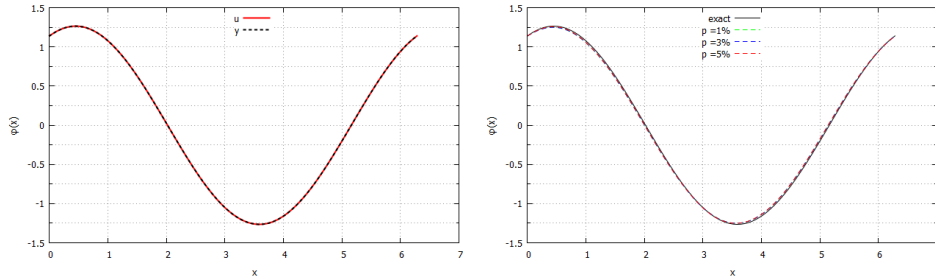


Рис. 4. Относительная погрешность $R = 0,1613\%$.

Для использования итерационного алгоритма, описанного в разделе 4 и решения прямой задачи на каждой итерации применен метод конечных разностей с $\varepsilon = 10^{-5}$. Расчетная сетка, во всех примерах, состоит из $N = 100$ узлов по пространственной переменной x и $M = 20$ узлов по пространственной переменной y . На рисунках 3 и 4 слева представлены значения точного (u) и приближенного (y) решения на неизвестной границе. Справа представлены значения точного и приближенного решения на неизвестной границе с добавлением шума уровня p , $p \in \{1\%, 3\%, 5\%\}$ в граничное условие Неймана (4).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлены два метода решения обратной граничной задачи Коши для уравнения Лапласа. Приводятся результаты численных расчетов для различных модельных задач с точными решениями. На основе приведенных результатов можно утверждать что все предлагаемые методы можно рекомендовать для применения численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа, имеющей ограниченное решение. Что касается сравнения прямого и итерационного метода, на основе полученных результатов можно утверждать, что точность прямого метода несколько выше чем у итерационного метода.

Авторы выражают искреннюю признательность С.И.Кабанихину, предложившему обратить внимание на численные методы решения обратной задачи Коши для уравнения Лапласа, также благодарны П.Н.Вабищевичу и рецензенту за конструктивные замечания.

REFERENCES

- [1] M.M. Lavrent'ev, *O zadache Koshi dlya uravneniya Laplasa*, Izv. AN SSSR. Ser. matem., **20**:6 (1956), 819–842. MR0087874
- [2] S.I. Kabanikhin, A.L. Karchevsky, *Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **3**:1 (1995), 21–46. MR1332876
- [3] S.I. Kabanikhin, *Obratnye i nekorrektnye zadachi*, Sibirskoe nauchnoe izd-vo, Novosibirsk, 2009.
- [4] A.A. Samarskiy, P.N. Vabishchevich, *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki*, Izdatelstvo LKI, Moskva, 2009.
- [5] A.A. Samarskiy, A.B. Gylin, *Chislennye metody*, Nayka, Moskva, 1989.
- [6] A.A. Samarskiy, E. S. Nikolaev, *Metody resheniya setochnykh uravneniy*, Nayka, Moskva, 1978.
- [7] Henk A. van der Vorst, *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*, Cambridge University Press, USA, 2003. MR1990752
- [8] J. Hadamard, *Lecture on the Cauchy problem in linear partial differential equations*, Oxford University Press, London, 1923. JFM 49.0725.04
- [9] S.I. Kabanikhin, *Definitions and examples of inverse and ill-posed problems*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **16** (2008), 317–357. MR2426856
- [10] O.A. Liskovec, *Teoriya i metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Itogi nauki i tekhniki. Matematicheskii analiz, VINITI, **20** (1982), 116–178.
- [11] Chein-Shan Liu, Satya N. Atluri, *Numerical solution of the Laplacian Cauchy problem by using a better post conditioning collocation Trefftz method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, **37**:1 (2013), 74–83.
- [12] V.A. Kozlov, V.G. Mazya, A.V. Fomin, *Ob odnom iteracionnom metode resheniya zadachi Koshi dlya ellipticheskikh uravneniy*, Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki, **31**:1 (1991), 64–74. MR1099360
- [13] C. Tajani, J. Abouchabaka, *Missing boundary data reconstruction by an alternating iterative method*, International Journal of Advances in Engineering & Technology, **2**:1 (2012), 578–586.
- [14] C. Tajani, J. Abouchabaka, O. Abdoun, *Data recovering problem using a new KMF algorithm for annular domain*, American Journal of Computational Mathematics, **2**:2 (2012), 88–94.
- [15] C. Tajani, J. Abouchabaka, *An Alternating KMF Algorithm to Solve the Cauchy Problem for Laplace's Equation*, International Journal of Computer Applications, **38**:8 (2012), 30–36.
- [16] Franck Delvare, Alain Cimetière, Jean-Luc Hanus, Patrice Bailly, *An iterative method for the Cauchy problem in linear elasticity with fading regularization effect*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, **199**:49–52 (2010), 3336–3344. MR2740796
- [17] L. Marin, *Relaxation procedures for an iterative MFS algorithm for two-dimensional steady-state isotropic heat conduction Cauchy problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, **35**:3 (2011), 415–429. MR2753787
- [18] Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. and Vasil'ev V.I., *Iterative Solution of a Retrospective Inverse Problem of Heat Conduction*, Matematicheskoe Modelirovanie, **9**:5 (1997), 119–127. MR1684813
- [19] V.I.Vasil'ev, A.M.Kardashevsky and P.V.Sivtsev, *Computational experiment on the numerical solution of some inverse problems of mathematical physics*, IOP Publishing IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, **158** (2016), 012093.
- [20] S.I.Kabanikhin, M.A.Shishlenin, D.B.Nurseitov, A.T.Nurseitova, S.E.Kasenov, *Comparative analysis of methods for regularizing an initial boundary value problem for the Helmholtz equation*, Journal of Applied Mathematics, (2014), 786326. MR3261255

GEORGIY ANATOLYEVICH PROKOPEV
 NORTH-EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
 58 BELINSKY STR,
 670000, YAKUTSK, REPUBLIC OF SAKHA (YAKUTIA), RUSSIA
E-mail address: khloros35@gmail.com

VASILII IVANOVICH VASIL'EV
 NORTH-EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
 58 BELINSKY STR,
 670000, YAKUTSK, REPUBLIC OF SAKHA (YAKUTIA), RUSSIA
E-mail address: vasvasil@mail.ru

ANATOLY MIKHAILOVICH KARDASHEVSKY
NORTH-EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
58 BELINSKY STR,
670000, YAKUTSK, REPUBLIC OF SAKHA (YAKUTIA), RUSSIA
E-mail address: kardam123@gmail.com

PETR VASILIEVICH SIVSEV
NORTH-EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
58 BELINSKY STR,
670000, YAKUTSK, REPUBLIC OF SAKHA (YAKUTIA), RUSSIA
E-mail address: sivkapetr@mail.ru