S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 33–40 (2017) УДК 517.913
DOI 10.17377/semi.2017.14.005 MSC 53D25,37J35

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Ю.Ю. БАГДЕРИНА

Abstract. For projection of two-dimensional geodesic equations we consider the problem of finding integrals that are rational in generalized velocities. We obtain the conditions of the existence of integral in the form of the quotient of polynomials of the second degree when the denominator is a squared linear polynomial. In general case first condition of the existence of the rational integral of the second degree is given. Integrals in the form of the quotient of polynomials of the first, second, third and fourth degree are constructed for the simplest case of symmetric metrics.

Keywords: geodesic equations, projection, integral.

1. Рациональные интегралы уравнений геодезических

Геодезические линии на гладкой двумерной поверхности с метрикой

$$ds^2 = g_{11}(x,y)dx^2 + 2g_{12}(x,y)dxdy + g_{22}(x,y)dy^2 \tag{1}$$

определяются решением системы

$$\begin{aligned} &\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \quad (x^1, x^2) = (x, y), \\ &\Gamma^i_{jk} = \frac{g^{il}}{2}\Big(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\Big), \quad g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j, \quad i,j,k = 1,2 \end{aligned} \tag{2}$$

или, что то же самое, решением гамильтоновой системы

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1,2 \tag{3}$$

Bagderina, Yu.Yu., Rational integrals of the second degree of two-dimentional geodesic equations.

Поступила 18 октября 2016 г., опубликована 24 января 2017 г.

с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(g^{11}p_1^2 + 2g^{12}p_1p_2 + g^{22}p_2^2)$. Для интегрирования системы (3) необходим дополнительный первый интеграл F, функционально независимый с H. Чаще всего (см., например, обзор [1]) F ищется в форме однородного полинома по p_1, p_2. В [2] предполагается, что все первые интегралы задачи о геодезических являются либо полиномами по p_1, p_2, либо функциями таких полиномов. В простейшем случае это отношение двух полиномов степени m и n. Для системы (2) такой рациональный интеграл имеет вид

$$F = \Big(\sum_{j=0}^{m} A_j(x,y)\dot{x}^{m-j}\dot{y}^j\Big)\Big/\Big(\sum_{j=0}^{n} B_j(x,y)\dot{x}^{n-j}\dot{y}^j\Big), \quad \dot{x} = \frac{dx}{ds}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds}. \tag{4}$$

Здесь рассматривается случай, когда степени числителя и знаменателя совпадают, $m = n$. Тогда проекция системы (2) на плоскость (x, y) в форме скалярного ОДУ второго порядка

$$y'' = S(x,y)y'^3 + 3R(x,y)y'^2 + 3Q(x,y)y' + P(x,y), \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{5}$$

где $S = \Gamma^1_{22}$, $3R = 2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}$, $3Q = \Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12}$, $P = -\Gamma^2_{11}$, наследует интеграл (4) в форме

$$F = \Big(\sum_{j=0}^{n} A_j(x,y)y'^j\Big)\Big/\Big(\sum_{j=0}^{n} B_j(x,y)y'^j\Big). \tag{6}$$

На практике рациональный интеграл ОДУ (5) удобнее искать в форме

$$F_n = a_n(x,y) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j(x,y)}{y' + b_j(x,y)}. \tag{7}$$

Эта задача является более общей чем поиск интеграла (4) системы (2) при $m = n$, так как не каждое ОДУ (5) является проекцией некоторой системы уравнений геодезических (соответствующий критерий имеется в [3]). Например, уравнения Пенлеве таким свойством не обладают.

Для того чтобы функция (7) была интегралом ОДУ (5), коэффициенты a_n, a_j, b_j, $j = 0\ \ldots, n-1$, должны удовлетворять переопределенной системе уравнений

$$\begin{aligned} &a_{nx} = \sum_{j=0}^{n-1}(3Ra_j - 2Sa_jb_j - a_{jy}), \quad a_{jx} = (a_jb_j)_y + 3a_j(Q - 2Rb_j + Sb_j^2), \\ &a_{ny} = S\sum_{j=0}^{n-1} a_j, \quad b_{jx} = b_jb_{jy} - P + 3Qb_j - 3Rb_j^2 + Sb_j^3, \quad j = 0, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{8}$$

Относительно интегралов уравнений геодезических можно ставить разные задачи. Одна из них: для данной метрики (1) определить, будет ли система (2) иметь интеграл заданной формы. Такой критерий в случае полиномиального интеграла первой и второй степени получен в [4], в [5] он получен для ОДУ (5) и его интеграла (7) при $n = 1$.

Другая задача: описать метрики некоторого простого вида, например, $ds^2 = \lambda(x,y)(dx^2 + dy^2)$ или $ds^2 = \lambda(x,y)dx^2 + dy^2$, для которых система (2) имеет интеграл заданной формы (см. [1, 6]). Предварительно доказывается, что в подходящей системе координат любая метрика (1) имеет такой вид.

При всех n уравнения (8) могут быть проинтегрированы с некоторыми P, Q, R, S, что согласуется с основным результатом [2]. Наиболее просто это сделать в случае метрики

$$ds^2 = \frac{\partial\lambda(x,y)}{\partial y}dxdy.$$

Интегралы соответствующих уравнений геодезических можно получить из интегралов их проекции

$$y'' = \frac{\lambda_{xy}}{\lambda_y}y' - \frac{\lambda_{yy}}{\lambda_y}y'^2 \qquad (9)$$

подстановкой $y' = \dot{y}/\dot{x}$. Перечислим функции $\lambda(x,y)$ в ОДУ (9) и его интегралы вида (7) при $n = 1,2,3,4$ (здесь $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(y)$, $\gamma = \gamma(y)$, h, $h_0, \dots, h_3$, ρ, σ — функции x, y):

1) $n = 1$, интеграл

$$F_1 = \frac{(\alpha-\beta)\alpha'\lambda}{(\alpha-\beta)\lambda_y y' + \alpha'\lambda} - \alpha,$$

функция λ удовлетворяет уравнению

$$2\lambda_{xy} - \frac{\lambda_x\lambda_y}{\lambda} + \Big(\frac{2\alpha'}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha''}{\alpha'}\Big)\lambda_y + \frac{\alpha'\beta'}{(\alpha-\beta)^2}\lambda = 0,$$

которое заменой переменных $t = \alpha(x)$, $z = \beta(y)$, $u = \sqrt{(\alpha-\beta)\lambda/\alpha'}$ преобразуется в уравнение Эйлера-Пуассона

$$u_{tz} + \frac{u_t + u_z}{2(t-z)} = 0.$$

Его частными решениями являются $u = \sqrt{z/t}$ и $u = 1/\sqrt{tz} - \sqrt{z}t^{-3/2}$, с помощью решения $u_0 = 1$ по рекуррентной формуле

$$u_{m+1} = (t-z)u_m + 2t^2\frac{\partial u_m}{\partial t} + 2z^2\frac{\partial u_m}{\partial z}$$

можно получить решения вида $u_{m+1} = (t-z)P_m(t,z)$, где $P_m(t,z)$ — однородный полином степени m по t, z.

2) $n = 2$, интеграл

$$F_2 = \frac{\alpha'\lambda\lambda_y y' + (\alpha+\beta)h_0h_1}{(\lambda_y y' + h_0)(\lambda_y y' + h_1)} - \alpha,$$

при этом h_0, h_1 являются решениями уравнения

$$hh_y = \lambda_y h_x - 2\lambda_{xy}h, \qquad (10)$$

а λ удовлетворяет уравнению

$$((\alpha+\beta)h_0h_1 - \alpha'\lambda(h_0+h_1))_y + \alpha''\lambda\lambda_y + \alpha'(\lambda_x\lambda_y - 2\lambda\lambda_{xy}) = 0. \qquad (11)$$

В переменных $\alpha(x) = t$, $\beta(y) = z$, $\lambda = \alpha' U(t,z)$, $h_j = \alpha'^2 H_j(t,z)$ система, состоящая из уравнения (11) и пары уравнений (10) для $h = h_0$ и $h = h_1$, принимает вид

$$\begin{aligned}&2UU_{tz} - U_tU_z + (U(H_0+H_1))_z - (t+z)(H_0H_1)_z - H_0H_1 = 0,\\ &H_jH_{jz} = H_{jt}U_z - 2U_{tz}H_j, \qquad j = 0,1.\end{aligned}$$

3) $n = 3$, интеграл

$$F_3 = \frac{\alpha'\lambda\lambda_y^2 y'^2 + (\sigma\lambda_y y' + \alpha + \beta)h_0h_1h_2}{(\lambda_y y' + h_0)(\lambda_y y' + h_1)(\lambda_y y' + h_2)} - \alpha,$$

функции h_0, h_1, h_2 являются решениями уравнения (10),

$$\sigma = \frac{1}{\lambda_y^2}\Big(\gamma - \beta' \int \lambda_y dx\Big) + (\alpha+\beta)\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{h_j}, \tag{12}$$

λ удовлетворяет уравнению

$$(\sigma h_0 h_1 h_2 - \alpha'\lambda(h_0+h_1+h_2))_y + \alpha''\lambda\lambda_y + \alpha'(\lambda_x\lambda_y - 2\lambda\lambda_{xy}) = 0.$$

4) $n = 4$, интеграл

$$F_4 = \frac{\alpha'\lambda\lambda_y^3 y'^3 + (\rho\lambda_y^2 y'^2 + \sigma\lambda_y y' + \alpha+\beta)h_0h_1h_2h_3}{(\lambda_y y'+h_0)(\lambda_y y'+h_1)(\lambda_y y'+h_2)(\lambda_y y'+h_3)} - \alpha,$$

при этом h_0, h_1, h_2, h_3 являются решениями (10), σ определяется (12), функция ρ находится из уравнения

$$M_y + \alpha''\lambda\lambda_y + \alpha'(\lambda_x\lambda_y - 2\lambda\lambda_{xy}) = 0,$$

где $M = \rho h_0h_1h_2h_3 - \alpha'\lambda(h_0+h_1+h_2+h_3)$, λ удовлетворяет уравнению

$$N_y = 4\lambda_{xy}M - \lambda_y M_x,$$

где $N = \sigma h_0h_1h_2h_3 - M(h_0+h_1+h_2+h_3) - \alpha'\lambda\sum_{i\neq j} h_ih_j$.

При построении всех этих решений системы (8) предполагалось, что b_j отличны от нуля. Если $n = 1$, то имеется также решение, приводящее к интегралу

$$\tilde{F}_1 = \frac{\alpha'(\varepsilon+\beta)}{\beta' y'} - 2\alpha, \qquad \varepsilon = \varepsilon(x)$$

и метрике $ds^2 = \alpha'\beta'(\varepsilon+\beta)dxdy$. Если $n = 2$, то одно из решений системы (8) для ОДУ (9) приводит к

$$\tilde{F}_2 = \frac{(\alpha'\lambda + \beta\lambda_y^2)\rho}{\rho\lambda_y y' + \alpha'\lambda + \beta\lambda_y^2} - \frac{\beta\lambda_y}{y'} - \alpha, \quad \rho = \alpha+\gamma+\beta'\int\lambda_y dx + 2\beta\int\lambda_{yy}dx,$$

где λ удовлетворяет уравнению

$$((\alpha'\lambda+\beta\lambda_y^2)^2/\rho)_y = \alpha''\lambda\lambda_y + \alpha'(\lambda_x\lambda_y - 2\lambda\lambda_{xy}).$$

Когда при $n = 2$ знаменатель функции (6) имеет кратные корни, интеграл ОДУ (5) можно искать в форме

$$F_2 = a_2(x,y) + \frac{2a_1(x,y)}{y'+b(x,y)} + \frac{a_0(x,y)}{(y'+b(x,y))^2}, \quad a_0,\ a_1 \neq 0 \tag{13}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими переопределенной системе уравнений

$$\begin{array}{l} b_x = bb_y - P + 3Qb - 3Rb^2 + Sb^3, \\ a_{2y} = 2Sa_1, \quad a_{2x} = 6Ra_1 + 2S(a_0 - 2ba_1) - 2a_{1y}, \\ a_{1x} = (ba_1)_y - \frac{1}{2}a_{0y} + 3Qa_1 + 3R(a_0 - 2ba_1) + 3Sb(ba_1 - a_0), \\ a_{0x} = 2a_0b_y + ba_{0y} + 6a_0(Q - 2Rb + Sb^2). \end{array} \tag{14}$$

Для ОДУ (9) система (14) имеет решения

$$\bar{F}_2 = \frac{\beta\lambda_y^2}{y'^2} + \frac{\alpha'\lambda}{\lambda_y y'} - \alpha,$$

где λ удовлетворяет уравнению

$$(\beta\lambda_y^4)_y + \alpha''\lambda\lambda_y + \alpha'(\lambda_x\lambda_y - 2\lambda\lambda_{xy}) = 0,$$

$$\hat{F}_2 = \frac{\alpha'\lambda\lambda_y y' + (\alpha+\beta)h^2}{(\lambda_y y' + h)^2} - \alpha,$$

где h — решение уравнения (10), а λ удовлетворяет уравнению (ср. с (11))

$$((\alpha+\beta)h^2 - 2\alpha'\lambda h)_y + \alpha''\lambda\lambda_y + \alpha'(\lambda_x\lambda_y - 2\lambda\lambda_{xy}) = 0. \tag{15}$$

Можно ожидать, что и при $n > 2$ случай кратных корней в знаменателе функции (6) может быть получен из интеграла (7), приведенного к общему знаменателю, в котором некоторые из b_j совпадают. Система (10), (15) имеет частные решения $h = \dfrac{C_1\alpha\beta\alpha'^2 + C_2\sqrt{\alpha\beta}(\alpha-\beta)\alpha'^2}{\alpha^2(\alpha+\beta)^2}$, $\lambda = \dfrac{C_1\beta\alpha' + 2C_2\sqrt{\alpha\beta}\alpha'}{\alpha(\alpha+\beta)}$ и $h = \dfrac{C_1\alpha'^2}{(\alpha+\beta)^2}$, $\lambda = \dfrac{C_1\alpha'}{\alpha+\beta} + C_2\alpha'$, C_1, $C_2 = \mathrm{const}$.

2. Критерий существования интеграла (13)

Уравнение (5) имеет интеграл (13) тогда и только тогда, когда система (14) совместна. Трижды дифференцируя (14) по x, y, можно выразить все производные функций a_0, a_1, a_2, b четвертого порядка и часть производных второго и третьего порядка в терминах a_0, a_1, b, a_{0y}, a_{1y}, b_y, a_{0yy}, b_{yy}, b_{yyy}, а также коэффициентов P, Q, R, S уравнения (5) и их производных. Приравнивание смешанных производных a_0, a_1, a_2, b пятого порядка с подстановкой известных выражений для производных младшего порядка приводит к соотношению

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}(\delta_{20}-\delta_{11}) + \tfrac{1}{3}(\delta_{21}-\delta_{30})(T+b) + (\gamma_{10} - (\gamma_{20}+\gamma_{11})b + \gamma_{21}b^2)Y_1\\ &+\tfrac{1}{2}(2\gamma_{11} - 3\gamma_{20} + \gamma_{21}b)Y_0 + (\gamma_{20}+\gamma_{11}-\gamma_{21}(T+2b))Z_1\\ &+\tfrac{5}{2}(\beta_2 b - \beta_1)(Y_2 - 2Z_2) - \tfrac{5}{2}\beta_2 Y_0 Z_1 + 10TZ_2Z_3 + 15(Y_0 - 2Z_1)Z_2^2 = 0,\end{aligned} \tag{16}$$

где используются обозначения

$$\begin{aligned}&T = \frac{a_0}{a_1}, \quad Y_0 = \frac{a_{0y}}{a_1} + 4(Sb-R)T + 2Z_1, \quad Y_1 = \frac{a_{1y}}{a_1} + 2(Sb-R) - ST,\\ &Y_2 = Y_{0y} + Y_0(Y_1 - R) + (SY_0 + 2\alpha_2)(T+b) - 2\alpha_1 - 2Z_2,\\ &Z_1 = b_y + Q - 2Rb + Sb^2,\\ &Z_2 = Z_{1y} + (Sb-R)Z_1 + \alpha_2 b - \alpha_1, \quad Z_3 = Z_{2y} + \tfrac{1}{2}\beta_2.\end{aligned} \tag{17}$$

Выражения для величин α_i и всех относительных инвариантов β_i, γ_{ij}, δ_{ij}, ε_{ij} семейства уравнений (5), кроме

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{41} = \delta_{31y} - S(\delta_{30} + 2\delta_{21}) + 3R\delta_{31} - 12\alpha_2\gamma_{21},\\ &\lambda_{20} = \varepsilon_{10y} - 4R\varepsilon_{10} + Q(3\varepsilon_{20} + \varepsilon_{11}) - 21\alpha_1\delta_{10},\\ &\lambda_{30} = \varepsilon_{30x} - 2R\varepsilon_{20} + P(\varepsilon_{40} + \varepsilon_{31}) - 12\alpha_1\delta_{20} - \alpha_0(7\delta_{30} + 2\delta_{21})\\ &\qquad +6\beta_2\gamma_{10} + 2\beta_1(7\gamma_{20} + 2\gamma_{11}),\\ &\lambda_{40} = \varepsilon_{40x} - 3R\varepsilon_{30} + 2Q\varepsilon_{40} + P\varepsilon_{41} - 18\alpha_1\delta_{30} - 3\alpha_0\delta_{31}\\ &\qquad +6\beta_2(4\gamma_{20} - \gamma_{11}) + 18\beta_1\gamma_{21},\\ &\lambda_{50} = \varepsilon_{40y} - 3S\varepsilon_{30} + 2R\varepsilon_{40} + Q\varepsilon_{41} - 18\alpha_2\delta_{30} - 3\alpha_1\delta_{31} + 36\beta_2\gamma_{21},\\ &\lambda_{11} = \varepsilon_{11x} - R\varepsilon_{10} - 2Q\varepsilon_{11} + 3P\varepsilon_{21} - 3\alpha_1\delta_{10} - 18\alpha_0\delta_{11} - 36\beta_1\gamma_{10},\\ &\lambda_{21} = \varepsilon_{11y} - S\varepsilon_{10} - 2R\varepsilon_{11} + 3Q\varepsilon_{21} - 3\alpha_2\delta_{10} - 18\alpha_1\delta_{11}\\ &\qquad -18\beta_2\gamma_{10} + 6\beta_1(\gamma_{20} - 4\gamma_{11}),\\ &\lambda_{31} = \varepsilon_{21y} - S(\varepsilon_{20} + \varepsilon_{11}) + 2Q\varepsilon_{31} - \alpha_2(2\delta_{20} + 7\delta_{11}) - 12\alpha_1\delta_{21}\\ &\qquad -2\beta_2(2\gamma_{20} + 7\gamma_{11}) - 6\beta_1\gamma_{21},\\ &\lambda_{41} = \varepsilon_{41x} - R(\varepsilon_{40} + 3\varepsilon_{31}) + 4Q\varepsilon_{41} - 21\alpha_1\delta_{31},\\ &\lambda_{51} = \varepsilon_{41y} - S(\varepsilon_{40} + 3\varepsilon_{31}) + 4R\varepsilon_{41} - 21\alpha_2\delta_{31},\end{aligned}$$

можно найти в [5]. Дифференцирование (16) по x, y дает два соотношения

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}(\varepsilon_{30}-\varepsilon_{21})+\tfrac{1}{3}(\varepsilon_{31}-\varepsilon_{40})(T+b)+\tfrac{1}{6}(8\delta_{21}-11\delta_{30}+3\delta_{31}b)Y_0\\
&+\tfrac{1}{3}(4\delta_{20}-\delta_{11}-2(\delta_{21}+2\delta_{30})b+3\delta_{31}b^2)Y_1-3\gamma_{21}Y_0Z_1\\
&+\tfrac{1}{3}(2\delta_{21}+4\delta_{30}-3\delta_{31}(T+2b))Z_1+(\gamma_{11}-4\gamma_{20}+3\gamma_{21}b)Y_2\\
&+(13\gamma_{11}-7\gamma_{20}-6\gamma_{21}(T+b))Z_2+5\beta_2(\beta_2T-TZ_3-\tfrac{9}{2}Y_0Z_2\\
&+5(\beta_2b-\beta_1)(9Y_1Z_2+2\beta_2)+10TZ_3^2+60Z_2^3+45(2Y_1Z_1-Y_2)Z_2^2=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}(\varepsilon_{20}-\varepsilon_{11})+\tfrac{1}{3}(\varepsilon_{21}-\varepsilon_{30})(T+b)+\tfrac{1}{6}(7\delta_{11}-10\delta_{20}+(4\delta_{21}-\delta_{30})b)Y_0\\
&+\tfrac{1}{3}(3\delta_{10}-2(2\delta_{11}+\delta_{20})b+(4\delta_{21}-\delta_{30})b^2)Y_1+(\gamma_{20}-4\gamma_{11})Y_0Z_1\\
&+\tfrac{1}{3}(4\delta_{11}+2\delta_{20}+(\delta_{30}-4\delta_{21})(T+2b))Z_1+((4\gamma_{11}-\gamma_{20})b-3\gamma_{10})Y_2\\
&+(6\gamma_{10}+(7\gamma_{11}-13\gamma_{20})(T+b))Z_2+\tfrac{5}{2}\beta_2(\beta_1+\beta_2b)T\\
&+5(\beta_2b-\beta_1)(3TZ_3+9(Y_0-2Z_1+bY_1)Z_2+2\beta_1)\\
&-5\beta_2(TbZ_3+\tfrac{9}{2}bY_0Z_2+3TZ_1Z_2)+10TbZ_3^2+60TZ_1Z_2Z_3\\
&+60(T+b)Z_2^3+45(2bY_1Z_1-bY_2+2Y_0Z_1-4Z_1^2)Z_2^2=0.
\end{aligned}\qquad(18)$$

Дифференцирование (18) по x, y приводит к следующим трем соотношениям

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}(\lambda_{40}-\lambda_{31})+\tfrac{1}{3}(\lambda_{41}-\lambda_{50})(T+b)+\tfrac{1}{3}(\varepsilon_{31}+5\varepsilon_{40}-3\varepsilon_{41}(T+2b))Z_1\\
&+\tfrac{1}{6}(10\varepsilon_{31}-13\varepsilon_{40}+3\varepsilon_{41}b)Y_0+\tfrac{1}{3}(5\varepsilon_{30}-2\varepsilon_{21}-(\varepsilon_{31}+5\varepsilon_{40})b+3\varepsilon_{41}b^2)Y_1\\
&+\tfrac{7}{6}(2\delta_{21}-5\delta_{30}+3\delta_{31}b)Y_2+\tfrac{7}{3}(7\delta_{21}-4\delta_{30}-3\delta_{31}(T+b))Z_2-\tfrac{7}{2}\delta_{31}Y_0Z_1\\
&+7(5\gamma_{11}-5\gamma_{20}-3\gamma_{21}T)Z_3+21(\gamma_{11}-4\gamma_{20}+3\gamma_{21}b)Y_1Z_2-\tfrac{63}{2}\gamma_{21}Y_0Z_2\\
&+\tfrac{35}{2}\beta_2(3Y_2Z_2-Y_0Z_3-4Z_1Z_3-12Z_2^2-6Y_1Z_1Z_2)+\tfrac{175}{4}\beta_2^2Y_0-14\beta_1\gamma_{21}\\
&+35(\beta_2b-\beta_1)Y_1(3Z_3-\tfrac{1}{2}\beta_2)+\tfrac{7}{6}\beta_2(9\gamma_{21}(3T+4b)-7\gamma_{20}-17\gamma_{11})\\
&+70(2Z_1-Y_0)Z_3^2+210(Z_2-Y_2+2Y_1Z_1)Z_2Z_3-210Y_1Z_2^3=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}(\lambda_{30}-\lambda_{21})+\tfrac{1}{3}(\lambda_{31}-\lambda_{40})(T+b)+\tfrac{1}{6}(9\varepsilon_{21}-12\varepsilon_{30}+(4\varepsilon_{31}-\varepsilon_{40})b)Y_0\\
&+\tfrac{1}{3}(4\varepsilon_{20}-\varepsilon_{11}-3(\varepsilon_{21}+\varepsilon_{30})b+(4\varepsilon_{31}-\varepsilon_{40})b^2)Y_1\\
&+(\varepsilon_{21}+\varepsilon_{30}+\tfrac{1}{3}(\varepsilon_{40}-4\varepsilon_{31})(T+2b))Z_1+\tfrac{7}{6}(\delta_{11}-4\delta_{20}+(4\delta_{21}-\delta_{30})b)Y_2\\
&+\tfrac{7}{3}(4\delta_{20}-\delta_{11}+(5\delta_{21}-8\delta_{30})(T+b))Z_2+\tfrac{7}{6}(\delta_{30}-4\delta_{21})Y_0Z_1\\
&+7(\gamma_{11}(T+5b)-\gamma_{20}(4T+5b))Z_3+21(\gamma_{11}-4\gamma_{20}+3\gamma_{21}b)bY_1Z_2\\
&+\tfrac{21}{2}(2\gamma_{11}-8\gamma_{20}+3\gamma_{21}b)Y_0Z_2+63(\gamma_{11}+\gamma_{20}-\gamma_{21}(T+2b))Z_1Z_2\\
&+35(\beta_2b-\beta_1)Y_1(3bZ_3+9Z_1Z_2+\tfrac{1}{2}\beta_2b-\beta_1)+\tfrac{35}{4}\beta_2(6\beta_1-\beta_2b)Y_0\\
&+\tfrac{7}{3}(6\gamma_{21}(T+b)-\gamma_{20}-11\gamma_{11})\beta_1\\
&+\tfrac{7}{6}\beta_2(\gamma_{11}(5T+17b)+\gamma_{20}(10T+7b)-12\gamma_{10})\\
&+\tfrac{35}{2}\beta_2(3bY_2Z_2-2(T+2b)(Z_1Z_3+3Z_2^2)-bY_0Z_3-6bY_1Z_1Z_2-9Y_0Z_1Z_2)\\
&+70((T+2b)Z_1-bY_0)Z_3^2+210((T+2b)Z_2-bY_2+2bY_1Z_1)Z_2Z_3\\
&+210(2Y_0-2Z_1-bY_1)Z_2^3+315(2Y_1Z_1-Y_2)Z_1Z_2^2=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}(\lambda_{20}-\lambda_{11})+\tfrac{1}{3}(\lambda_{21}-\lambda_{30})(T+b)+\tfrac{1}{6}(8\varepsilon_{11}-11\varepsilon_{20}+(5\varepsilon_{21}-2\varepsilon_{30})b)Y_0\\
&+\tfrac{1}{3}(3\varepsilon_{10}-(5\varepsilon_{11}+\varepsilon_{20})b+(5\varepsilon_{21}-2\varepsilon_{30})b^2)Y_1+\tfrac{7}{6}(2\delta_{20}-5\delta_{11})Y_0Z_1\\
&+\tfrac{1}{3}(5\varepsilon_{11}+\varepsilon_{20}+(2\varepsilon_{30}-5\varepsilon_{21})(T+2b))Z_1+\tfrac{7}{6}((5\delta_{11}-2\delta_{20})b-3\delta_{10})Y_2\\
&+\tfrac{7}{3}(3\delta_{10}+(4\delta_{11}-7\delta_{20})(T+b))Z_2+\tfrac{21}{2}((4\gamma_{11}-\gamma_{20})b-6\gamma_{10})Y_0Z_2\\
&+7(5(\gamma_{11}-\gamma_{20})b(T+b)-3\gamma_{10}T)Z_3+21((4\gamma_{11}-\gamma_{20})b-3\gamma_{10})bY_1Z_2\\
&+21(6\gamma_{10}+\gamma_{11}(T-3b)-\gamma_{20}(4T+3b))Z_1Z_2\\
&+\tfrac{35}{2}(\beta_2b-\beta_1)[6b^2Y_1Z_3+6TZ_1Z_3+18(T+b)Z_2^2-9bY_2Z_2+18Y_0Z_1Z_2\\
&\qquad+36bY_1Z_1Z_2-36Z_1^2Z_2+(3\beta_2b-4\beta_1)bY_1+(4\beta_1-\beta_2(T+4b))Z_1]\\
&+\tfrac{35}{2}\beta_2[3b^2Y_2Z_2-4b(T+b)(Z_1Z_3+3Z_2^2)-b^2Y_0Z_3-6b^2Y_1Z_1Z_2\\
&\qquad-9bY_0Z_1Z_2-6TZ_1^2Z_2]+\tfrac{7}{2}\beta_2(\gamma_{10}(T+4b)+5(\gamma_{11}-\gamma_{20})b(T+b))\\
&+\tfrac{14}{3}\beta_1(2(4\gamma_{20}-\gamma_{11})(T+b)-9\gamma_{10})+\tfrac{35}{4}(8\beta_1^2-4\beta_1\beta_2b+\beta_2^2b^2)Y_0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+210((T+b)bZ_2-b^2Y_2+2b^2Y_1Z_1+2TZ_1^2)Z_2Z_3\\
&+70(2(T+b)Z_1-bY_0)bZ_3^2+105(2(4T+5b)Z_1-2b^2Y_1-bY_0)Z_2^3\\
&+630(2bY_1Z_1-bY_2+Y_0Z_1-2Z_1^2)Z_1Z_2^2=0.
\end{aligned}\tag{19}
$$

Их дифференцирование по x, y дает еще четыре соотношения. Исключение величин b и (17) из этих 10 соотношений дает два условия совместности системы (14), зависящих только от относительных инвариантов семейства ОДУ (5) и не содержащих a_0, a_1, a_2, b и их производных. Их дифференцирование по x, y позволяет получить еще три условия совместности системы (14). С другой стороны, дифференцирование получаемых из (16) последних четырех соотношений на величины b и (17) приводит к пяти соотношениям, исключение из которых величин b и (17) дает еще пять условий совместности системы (14), не содержащих a_0, a_1, a_2, b. При этом три из них будут дифференциальными следствиями предыдущих двух условий. Поэтому из пяти последних соотношений на величины b и (17) достаточно рассматривать два. Критерий существования у ОДУ (5) интеграла (13) формулируется как условие совместности системы (16), (18), (19) и еще шести уравнений, алгебраических относительно 8 величин b и (17).

Заметим, что величины Z_1, Z_2, Z_3 зависят только от функции b и ее производных, а T, Y_0, Y_1, Y_2 входят в (16), (18), (19) линейно.

3. Рациональный интеграл (7) второй степени

Условия существования интеграла (7) при $n=2$ проще получить, представив его в виде

$$
F=a_2(x,y)+\frac{a_1(x,y)+a_0(x,y)}{y'+b_1(x,y)+b_0(x,y)}+\frac{a_1(x,y)-a_0(x,y)}{y'+b_1(x,y)-b_0(x,y)},\quad a_0,\ b_0\neq 0.\tag{20}
$$

Для того чтобы функция (20) была интегралом ОДУ (5), должна быть совместна переопределенная система уравнений

$$
\begin{aligned}
&b_{1x}=b_0b_{0y}+b_1b_{1y}-P+3Qb_1-3R(b_0^2+b_1^2)+Sb_1(3b_0^2+b_1^2),\\
&b_{0x}=(b_0b_1)_y+3b_0(Q-2Rb_1+Sb_1^2)+Sb_0^3,\\
&a_{2y}=2Sa_1,\qquad a_{2x}=6Ra_1-4S(a_0b_0+a_1b_1)-2a_{1y},\\
&a_{1x}=(a_0b_0+a_1b_1)_y+3a_1(Q-2Rb_1+S(b_0^2+b_1^2))+6a_0b_0(Sb_1-R),\\
&a_{0x}=(a_0b_1+a_1b_0)_y+3a_0(Q-2Rb_1+S(b_0^2+b_1^2))+6a_1b_0(Sb_1-R).
\end{aligned}\tag{21}
$$

Здесь условия совместности являются более громоздкими, чем в случае интеграла (13), поэтому приводится только первое условие. Четырежды дифференцируя (21) по x, y, можно выразить все производные функций a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 пятого порядка и часть производных второго, третьего и четвертого порядка в терминах a_j, b_j, a_{jy}, b_{jy}, a_{0yy}, b_{jyy}, b_{jyyy}, b_{0yyyy}, $j=0,1$. Приравнивание смешанных производных шестого порядка приводит к соотношению

$$
\begin{aligned}
&\tfrac13(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{20})+\tfrac23(\varepsilon_{30}-\varepsilon_{21})(b_1-Tb_0)+\tfrac13(\varepsilon_{31}-\varepsilon_{40})(b_0^2+b_1^2-2Tb_0b_1)\\
&+(-\delta_{10}+(\delta_{11}+2\delta_{20})b_1+(2\delta_{21}+\delta_{30}-\delta_{31}b_1)(b_0^2-b_1^2))Y_1\\
&+\tfrac13(7\delta_{11}-10\delta_{20}+2(5\delta_{30}-2\delta_{21})b_1+3\delta_{31}(b_0^2-b_1^2))(b_0Y_0+TX_1)\\
&+\tfrac13(14\delta_{20}-17\delta_{11}+2(10\delta_{21}-7\delta_{30})(b_1-Tb_0)+3\delta_{31}(2Tb_0b_1-b_0^2-b_1^2))Z_1\\
&+\tfrac23(2\delta_{21}-5\delta_{30})b_0(b_0Y_1+X_1)+2\delta_{31}b_0(b_1-Tb_0)X_1+12\gamma_{21}(T^2-1)b_0^2Z_2\\
&+6(\gamma_{10}-(\gamma_{20}+\gamma_{11})b_1+\gamma_{21}(b_1^2-b_0^2))(2Y_1Z_1-2Y_0X_1-b_0Y_2-Z_2-TX_2)\\
&+6(\gamma_{20}+\gamma_{11}+2\gamma_{21}(Tb_0-b_1))(Z_1^2-X_1^2-b_0X_2-Tb_0Z_2)\\
&+20(\gamma_{11}-\gamma_{20})((T-1/T)b_0Z_2+b_0(Y_1X_1-Y_0Z_1)+Z_1^2-TX_1Z_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+30(\beta_1-\beta_2 b_1)[b_0(Y_2Z_1-X_3-TZ_3)+Y_1(2b_0Z_2/T-b_0X_2-Z_1^2-X_1^2)\\
&\qquad\qquad +Y_0(2X_1Z_1-3b_0Z_2)+Z_1(Z_2+TX_2)-3X_1(X_2+TZ_2)]\\
&+30\beta_2[b_0^2(Y_2X_1+Y_1Z_2)+b_0X_1(Z_2-2Y_1Z_1)+Tb_0(X_1X_2-Z_1Z_2)\\
&\quad +b_0Y_0(Z_1^2+X_1^2)+b_0(Z_1-b_0Y_0)(X_2+2Z_2/T)+(TX_1-Z_1)(Z_1^2-X_1^2)]\\
&+10\beta_2b_0^2(Z_3+TX_3)+10(\beta_1-\beta_2b_1)^2+\tfrac{5}{2}\beta_2b_0(\beta_2(b_0+Tb_1)-\beta_1T)\\
&+40(T-1/T)b_0Z_2(b_0X_4+4X_1X_3+3Z_2^2+3X_2^2)-240b_0^2Y_2Z_2^2/T\\
&+\tfrac{80}{3}b_0^2(X_3^2+2TX_3Z_3+Z_3^2)+160b_0(Y_1-Y_0/T)Z_2(b_0Z_3+3X_1Z_2)\\
&+160b_0(Y_0-Y_1/T)Z_2(b_0X_3+3X_1X_2)+240X_1^2(X_2^2+2TX_2Z_2+Z_2^2)\\
&+160b_0X_1(X_2X_3+Z_2Z_3+T(X_2Z_3+Z_2X_3))=0,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где используются обозначения

$$
\begin{gathered}
T=\frac{a_0}{a_1},\quad Y_0=\frac{a_{0y}}{a_1}-2RT+2S(b_0+b_1T),\quad Y_1=\frac{a_{1y}}{a_1}-2R+2S(b_1+b_0T),\\
\begin{aligned}
&Y_2=Y_{0y}+(Y_1+R-Sb_1)Y_0+S(b_0(Y_1-2TY_0)+X_1+TZ_1)+\alpha_2T,\\
&X_1=b_{0y}+2b_0(Sb_1-R),\qquad X_2=X_{1y}+(Sb_1-R)X_1+Sb_0Z_1+\alpha_2b_0,\\
&X_4=X_{3y}+(R-Sb_1)X_3-S(b_0Z_3+3X_1Z_2+3Z_1X_2+\tfrac{3}{4}\beta_2b_0)-3\alpha_2X_2,\\
&X_3=X_{2y},\qquad Z_1=b_{1y}+Q-2Rb_1+S(b_0^2+b_1^2),\\
&Z_2=Z_{1y}+(Sb_1-R)Z_1+Sb_0X_1+\alpha_2b_1-\alpha_1,\qquad Z_3=Z_{2y}+\tfrac{1}{4}\beta_2.
\end{aligned}
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Для получения всех независимых условий совместности системы (21) необходимо пятикратное дифференцирование равенства (22) по x, y. Причем при последнем дифференцировании из шести получаемых соотношений достаточно оставить в рассмотрении три. Критерий существования у ОДУ (5) интеграла (20) формулируется как условие совместности системы 18 алгебраических уравнений относительно 13 величин b_0, b_1 и (23).

References

[1] A.V. Bolsinov, V.S. Matveev, A.T. Fomenko, *Two-dimensional Riemannian metrics with integrable geodesic flows. Local and global geometry*, Sb. Math., **189** (1998), 1441–1466. MR1691292

[2] V.V. Kozlov, *On rational integrals of geodesic flows*, Regul. Chaotic Dyn., **19** (2014), 601–606. MR3284603

[3] R. Bryant, M. Dunajski, M. Eastwood, *Metrisability of two-dimensional projective structures*, J. Diff. Geom., **83** (2009), 465–499. MR2581355

[4] B. Kruglikov, *Invariant characterization of Liouville metrics and polynomial integrals*, J. Geom. Phys., **58** (2008), 979–995. MR2441213

[5] Yu.Yu. Bagderina, *Invariants of a family of scalar second-order ODEs for Lie symmetries and first integrals*, J. Phys. A: Math. Theor., **49** (2016), 155202. MR3479124

[6] M.V. Pavlov, S.P. Tsarev, *On local description of two-dimensional geodesic flows with a polynomial first integral*, J. Phys. A: Math. Theor., **49** (2016), 175201. MR3480196

Yulia Yurievna Bagderina
Institute of Mathematics with Computer Center,
Chernyshevsky str., 112,
450008, Ufa, Russia
E-mail address: bagderinayu@yandex.ru