S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 41–58 (2017) УДК 517.929
DOI 10.17377/semi.2017.14.006 MSC 34K06,34K25

АСИМПТОТИКА РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

П.Г. СУРКОВ

Abstract. We consider an ill-posed Cauchy problem for a linear non-autonomous system of differential equations with delay. We find asymptotic formulas describing analytical dependances of regularized solutions on the regularization parameter on a finite interval of the negative half-line. The Tikhonov regularization method is used. We chose the stabilizing functional such that it does not generate a compact set in the space of states. The asymptotic formulas are found for smooth enough initial functions which do not provide backward continuation.

Keywords: differential equations with delay, ill-posed problem, asymptotic methods.

Введение

Рассматривается n-мерная система линейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-r), \quad t \in (-\infty, \sigma], \tag{1}$$

с заданным условием

$$x(t) = \varphi(t) \quad \text{при} \quad t \in [\sigma - r, \sigma]. \tag{2}$$

Здесь $x(t)$, $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$; матрицы $A(t)$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, элементы которых являются непрерывными функциями на $(-\infty, \sigma]$; положительный параметр r является запаздыванием; φ — начальная функция.

Surkov, P.G., Asymptotic of regularized solutions of the ill-posed Cauchy problem for a linear nonautonomous system with delay.

Поступила 19 октября 2015 г., опубликована 24 января 2017.

Пусть φ принадлежит функциональному пространству состояний $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, впервые введенном в [1], тогда для начального момента $\sigma=0$ существует единственное решение $x(\cdot,\varphi)$ системы (1) на полуоси $[-r,+\infty)$, удовлетворяющее условию (2) и непрерывно зависящее от начальной функции [2]. В задаче продолжения решения $x(\cdot,\varphi)$ системы дифференциальных уравнений с запаздыванием на отрицательную полуось $(-\infty,-r)$ все не так однозначно. Для продолжения назад решения системы (1) накладываются достаточно серьезные ограничения, сужающие класс рассматриваемых начальных функций. Так они должные иметь соответствующую отрезку продолжения гладкость и удовлетворять некоторому набору краевых условий [2]. Кроме того, эта задача не является корректной по Адамару ввиду отсутствия непрерывной зависимости решения от начальных данных [3].

В настоящей работе рассматривается задача нахождения решения системы (1) на конечном отрезке отрицательной полуоси, удовлетворяющего условию (2), для начальной функции, не обеспечивающей продолжения назад [2]. Используемая в статье методика была предложена в [4, 5], где вышеуказанная некорректная задача Коши трактовалась как обратная задача, и для ее решения применялся метод регуляризации А. Н. Тихонова [6] со стабилизирующим функционалом классического вида

$$\Omega[x]=x^\top(0)Gx(0)+\int\limits_{-r}^{0}\big(\dot x^\top(s)P\dot x(s)+x^\top(s)Qx(s)\big)\,ds.$$

Предлагаемое в настоящей статье исследование является обобщением [7], где в случае автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием метод Тихонова использовался со стабилизатором вида

$$\Omega[x]=x^\top(0)x(0)+\int\limits_{-r}^{0}x^\top(s)x(s)\,ds,\tag{3}$$

как частный случай указанного в [8, с. 70] и не порождающего компактное множество в пространстве состояний.

В работах [5, 7] была определена пошаговая процедура нахождения решений на конечном отрезке отрицательной полуоси, которое мы также будем использовать, и получены асимптотические формулы регуляризованных решений. В отличие от [7] зависимость коэффициентов системы (1) от времени требует применения специальных методов для построения асимптотик [9].

Основные результаты настоящей статьи представлены теоремами 3 и 5.

1. Постановка задачи

Для нахождения решения $x(\cdot,\varphi)$ системы (1) на отрицательной полуоси можно использовать пошаговую процедуру, которая в функциональном пространстве состояний C задается следующими уравнениями

$$U_kx_{k-1}=x_k,\quad k\le 0,\quad x_0=\varphi,\tag{4}$$

где $x_k(\cdot) = x(\cdot + kr)$, $U_k\colon C \to C$ — линейные вполне непрерывные операторы, определяемые формулами

$$(U_k x_{k-1})(\vartheta) = V_k(\vartheta)\Bigg(V_{k-1}^{-1}(0)x_{k-1}(0) + \int\limits_{-r}^{\vartheta} V_k^{-1}(s)B_k(s)x_{k-1}(s)ds\Bigg), \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad k \le 0. \tag{5}$$

Здесь V — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $t \in (-\infty, 0]$, с начальным условием $V(0) = I_n$ — единичная матрица $\mathbb{R}^{n\times n}$, $B_k(\vartheta) = B(kr + \vartheta)$ и $V_k(\vartheta) = V(kr + \vartheta)$.

Используя непрерывные расширения операторов U_k, вполне непрерывность которых сохраняется, перейдем к постановке задачи в сепарабельном гильбертовом пространстве $H = \mathbb{R}^n \times L_2([-r, 0), \mathbb{R}^n)$ со скалярным произведением

$$(x, y) = y^\top(0)x(0) + \int\limits_{-r}^{0} y^\top(s)x(s)\,ds.$$

Решение задачи Коши (1), (2) на отрицательной полуоси будем определять с помощью пошаговой процедуры

$$x_{k-1} = R_k(\delta, x_k), \quad k \le 0, \quad x_0 = \varphi, \tag{6}$$

где для каждого $k \le 0$ оператор R_k — регуляризирующий оператор для уравнения (4) в пространстве H, и δ — допустимая погрешность. Нахождение решений операторных уравнений (4) является некорректной задачей, и для ее решения используется метод регуляризации А.Н. Тихонова со стабилизирующим функционалом вида (3). Данный метод позволяет найти значение регуляризирующего оператора $x_{k-1}^\delta = R_k(\delta, x_k)$. Тогда регуляризованное решение задачи Коши $x(\cdot, \varphi)$ на отрезке отрицательной полуоси будем определять формулами $x(kr + \vartheta, \varphi) = x_k^\delta(\vartheta)$, $\vartheta \in (-r, 0]$ при $k \le 0$.

Таким образом, ставится задача: получить асимптотические формулы, определяющих аналитические зависимости регуляризованных решений системы (1) от допустимой погрешности δ на конечном отрезке отрицательной полуоси.

2. Краевая задача для регуляризованного решения уравнения (4)

Следуя методу регуляризации Тихонова, для фиксированных положительного значения параметра регуляризации α и $x_k \in H$ будем искать элемент $x_{k-1}^\alpha \in H$ минимизирующий функционал

$$M^\alpha[x_k, x] = (U_k x - x_k, U_k x - x_k) + \alpha\Omega[x], \quad k \le 0. \tag{7}$$

Параметр регуляризации определяется допустимой погрешностью как значение функции $\alpha_k(\delta, x_k)$ из уравнения невязки

$$(U_k x_{k-1}^\alpha - x_k, U_k x_{k-1}^\alpha - x_k) = \delta^2. \tag{8}$$

В результате, значение регуляризирующего оператора определяется следующей формулой

$$x_{k-1}^\delta = R_k(\delta, x_k) = x_{k-1}^{\alpha_k(\delta, x_k)}, \quad k \le 0.$$

Используя необходимое условие минимума функционала (7), получаем систему уравнений для определения минимизирующего элемента

$$\begin{aligned} (U_k^* U_k x)(\vartheta) + \alpha x(\vartheta) = (U_k^* x_k)(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0), \\ (U_k^* U_k x)(0) + \alpha x(0) = (U_k^* x_k)(0), \quad k \leq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь сопряженные операторы $U_{k+1}^* \colon H \to H$ задаются формулами

$$\begin{aligned} &(U_k^* y)(0) = V_{k-1}^{-1\top}(0)\Bigg(V_k^\top(0)y(0) + \int\limits_{-r}^{0} V_k^\top(s)y(s)\,ds\Bigg), \\ &(U_k^* y)(\vartheta) = B_k^\top(\vartheta)V_k^{-1\top}(\vartheta)\Bigg(V_k^\top(0)y(0) + \int\limits_{\vartheta}^{0} V_k^\top(s)y(s)\,ds\Bigg), \quad \vartheta \in [-r, 0). \end{aligned} \tag{10}$$

Для преобразования системы интегральных уравнений (9) введем вспомогательные функции χ_k и ξ_k с помощью формул

$$\begin{aligned} &\chi_k(\vartheta) = U_k x_{k-1}(\vartheta), \quad \xi_k(\vartheta) = U_k^*(\chi_k - x_k)(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0), \\ &\chi_k(0) = \chi_k(-0), \qquad \xi_k(0) = \xi_k(-0), \qquad k \leq 0, \end{aligned} \tag{11}$$

в результате чего можно получить эквивалентную (9) краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предложение 1. *Пусть $\varphi \in H$, элементы матрицы A являются непрерывными функциями, а матрицы B — непрерывно дифференцируемыми функциями на $(-\infty, 0]$ и $\det B(t) \neq 0$ при $t \in (-\infty, 0]$. Тогда минимизирующий элемент x_k^α при каждом $k \leq 0$ является компонентой решения следующей гибридной системы дифференциально-алгебраических уравнений*

$$\begin{aligned} &\alpha x_{k-1} + \xi_k = 0, \\ &\dot{\xi}_k = -B_k^{-1}(\vartheta)\big(\dot{B}_k(\vartheta) + A_k(\vartheta)B_k(\vartheta)\big)^\top \xi_k - B_k^\top(\vartheta)(\chi_k - x_k), \\ &\dot{\chi}_k = A_k(\vartheta)\chi_k + B_k(\vartheta)x_{k-1}, \end{aligned} \tag{12}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \xi_k(-r) + \alpha B_k^\top(-r)x_{k-1}(0) = 0, \\ \xi_k(0) = B_k^\top(0)\big(\chi_k(0) - x_k(0)\big), \quad x_{k-1}(0) = \chi_k(-r), \end{aligned} \tag{13}$$

где $A_k(\vartheta) = A(kr + \vartheta)$, α — малый положительный параметр.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из явного представления операторов (5) и (10), а также обозначений (11). □

3. Асимптотика решений краевой задачи

Для нахождении асимптотического решения краевой задачи (12) и (13) потребуем дополнительную гладкость начальной функции, т.е. чтобы φ, $\dot{\varphi} \in H$ ($\varphi \in H^1$). Без ограничения общности будем решать краевую задачу при $k = 0$ и примем следующие обозначения $A = A_0$, $B = B_0$, $x = x_{-1}$, $\chi = \chi_{-1}$ и $\xi = \xi_{-1}$. Тогда система (12) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &\alpha x + \xi = 0, \\ &\dot{\xi} = -B^{-1}(\vartheta)\big(\dot{B}(\vartheta) + A(\vartheta)B(\vartheta)\big)^\top \xi - B^\top(\vartheta)(\chi - \varphi), \\ &\dot{\chi} = A(\vartheta)\chi + B(\vartheta)x, \end{aligned} \tag{14}$$

а условия (13) примут следующий вид

$$\begin{gathered}\xi(-r)+\alpha B^{\top}(-r)x(0)=0,\\ \xi(0)=B^{\top}(0)\big(\chi(0)-\varphi(0)\big),\quad x(0)=\chi(-r).\end{gathered}\tag{15}$$

Исключим вспомогательные переменные χ и ξ из системы (14), получаем

$$\xi=-\alpha x,\tag{16}$$

$$\chi=\alpha B^{-1\top}(\vartheta)\dot{x}-\alpha B^{-1\top}(\vartheta)\widetilde{A}(\vartheta)x+\varphi,\tag{17}$$

где $\widetilde{A}(\vartheta)=\big(B^{-1}(\vartheta)(\dot{B}(\vartheta)-A(\vartheta)B(\vartheta))\big)^{\top}$. Найденные формулы подставляем в третье векторное уравнение системы (14), имеем

$$\alpha B^{-1\top}(\vartheta)\ddot{x}+\alpha\widehat{A}(\vartheta)\dot{x}+\alpha\widehat{B}(\vartheta)x-B^{\top}(\vartheta)B(\vartheta)x=-B^{\top}(\vartheta)\big(\dot{\varphi}-A(\vartheta)\varphi\big),\tag{18}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\widehat{A}(\vartheta)=B^{\top}(\vartheta)\dot{B}^{-1\top}(\vartheta)-\widetilde{A}(\vartheta)-B^{\top}(\vartheta)A(\vartheta)B^{-1\top}(\vartheta),\\ \widehat{B}(\vartheta)=B^{\top}(\vartheta)\bigg(A(\vartheta)B^{-1\top}(\vartheta)\widetilde{A}(\vartheta)-\frac{d}{d\vartheta}\big(B^{-1\top}(\vartheta)\widetilde{A}(\vartheta)\big)\bigg).\end{gathered}$$

С учетом формул (16) и (17) краевые условия (15) преобразуются к виду

$$\begin{gathered}\alpha\dot{x}(-r)-\alpha\widetilde{A}(-r)x(-r)-x(-r)+B^{\top}(-r)\varphi(-r)=0,\\ \dot{x}(0)+\big(I_n-\widetilde{A}(0)\big)x(0)=0.\end{gathered}\tag{19}$$

Система уравнений (18) имеет малый параметр при старшей производной, поэтому при нахождении асимптотической зависимости решений этой системы от параметра регуляризации α будем использовать методы работ [9, с. 48] и [10, с. 223]. Далее, переходя к переменным $x_1=x$ и $x_2=\alpha^{\frac{1}{2}}\dot{x}$, заменим (18) системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1=&\alpha^{-\frac{1}{2}}x_2,\\ \dot{x}_2=&-\widehat{A}(\vartheta)x_2-\alpha^{\frac{1}{2}}\widehat{B}(\vartheta)x_1+\alpha^{-\frac{1}{2}}B^{\top}(\vartheta)B(\vartheta)x_1-\alpha^{-\frac{1}{2}}B^{\top}(\vartheta)(\dot{\varphi}-A(\vartheta)\varphi).\end{aligned}\tag{20}$$

Аналогичным образом преобразуем краевые условия (19), тогда получаем

$$\begin{gathered}\alpha^{\frac{1}{2}}x_2(-r)-\alpha\widetilde{A}(-r)x_1(-r)-x_1(-r)+B^{\top}(-r)\varphi(-r)=0,\\ x_2(0)+\alpha^{\frac{1}{2}}\big(I_n-\widetilde{A}(0)\big)x_1(0)=0.\end{gathered}\tag{21}$$

Вводя вектор $z=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n}$, краевую задачу (20), (21) запишем в следующей форме

$$\begin{gathered}\dot{z}=\big(\alpha^{-\frac{1}{2}}\mathcal{A}(\vartheta)+\mathcal{A}_0(\vartheta)+\alpha^{\frac{1}{2}}R(\vartheta)\big)z+\alpha^{-\frac{1}{2}}f(\vartheta),\\ \mathcal{B}_1(\alpha)z(0)+\mathcal{B}_2(\alpha)z(-r)=b.\end{gathered}\tag{22}$$

Здесь

$$\mathcal{A}(\vartheta)=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ B^{\top}(\vartheta)B(\vartheta) & 0\end{pmatrix},\quad \mathcal{A}_0(\vartheta)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -\widehat{A}(\vartheta)\end{pmatrix},\quad R(\vartheta)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\widehat{B}(\vartheta) & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_1(\alpha)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha^{\frac{1}{2}}\big(I_n-\widetilde{A}(0)\big) & I_n\end{pmatrix},\quad \mathcal{B}_2(\alpha)=\begin{pmatrix}-I_n-\alpha\widetilde{A}(-r) & \alpha^{\frac{1}{2}}I_n\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$f(\vartheta)=\begin{pmatrix}0\\ -B^{\top}(\vartheta)\big(\dot{\varphi}-A(\vartheta)\varphi\big)\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-B^{\top}(-r)\varphi(-r)\\ 0\end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Собственные числа матрицы $\mathcal{A}(\vartheta)$ определяются следующими формулами*

$$w_{jk}(\vartheta) = \lambda_k^{\frac{1}{2}}(\vartheta)e_j, \quad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, n}, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Здесь $\lambda_k(\vartheta)$ — собственные числа матрицы $B^\top(\vartheta)B(\vartheta)$ с учетом их кратности, $e_1 = -1$ и $e_2 = 1$.

Доказательство. Уравнение $\mathcal{A}(\vartheta)h = wh$, где $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ и $h_j \in \mathbb{C}^n$, эквивалентно системе

$$h_2 = wh_1, \quad \big(B^\top(\vartheta)B(\vartheta) - w^2 I_n\big)h_1 = 0.$$

Последняя имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\det\big(B^\top(\vartheta)B(\vartheta) - w^2 I_n\big) = 0,$$

т.е. $w = w_{jk}(\vartheta) = \lambda_k^{\frac{1}{2}}(\vartheta)e_j$. □

Рассмотрим следующие условия на систему (1):

(B1) $\det B(\vartheta) \neq 0,\ \vartheta \in [-r, 0]$;

(B2) собственные числа матрицы $B^\top(\vartheta)B(\vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, — простые.

Замечание. Выполнение (B1) является одним из условий, необходимых для существования продолжения назад [2, с. 67]. Условие (B2) потребуется для использования асимптотического метода [9] при решении краевой задачи (22).

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (B1) *и* (B2). *Тогда функции* $\mathrm{Re}\big(w_{jk}(\vartheta) - w_{im}(\vartheta)\big)$, $i, j = 1, 2$, $k, m = \overline{1, n}$, *не меняют знак на отрезке* $[-r, 0]$.

Доказательство. Ввиду симметричности матрицы $B^\top(\vartheta)B(\vartheta)$ ($\vartheta \in [-r, 0]$) ее собственные числа положительны [11], а по условию (B2) — простые, тогда их можно занумеровать таким образом, что будут выполнены следующие неравенства

$$0 < \lambda_1(\vartheta) < \lambda_2(\vartheta) < \ldots < \lambda_n(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Тогда имеем

$$\mathrm{Re}\big(w_{jk}(\vartheta) - w_{im}(\vartheta)\big) = w_{jk}(\vartheta) - w_{im}(\vartheta) = e_j\lambda_k^{\frac{1}{2}}(\vartheta) - e_i\lambda_m^{\frac{1}{2}}(\vartheta),$$
$$i, j = 1, 2, \quad k, m = \overline{1, n}.$$

Если $e_ie_j = -1$, то

$$e_j\left(\lambda_k^{\frac{1}{2}}(\vartheta) - \frac{e_i}{e_j}\lambda_m^{\frac{1}{2}}(\vartheta)\right) = e_j(\lambda_k^{\frac{1}{2}}(\vartheta) + \lambda_m^{\frac{1}{2}}(\vartheta)),$$

и соответствующая функция сохраняет знак на $[-r, 0]$.

Если $e_ie_j = 1$, тогда функция $e_i\big(\lambda_k^{\frac{1}{2}}(\vartheta) - \lambda_m^{\frac{1}{2}}(\vartheta)\big)$ сохраняет знак на $[-r, 0]$ при $k \neq m$ и тождественно равна нулю на $[-r, 0]$ при $k = m$. □

Пусть выполнены условия (B1) и (B2). Тогда жорданова форма матрицы $B^\top(\vartheta)B(\vartheta)$ имеет вид $J(\vartheta) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(\vartheta), \ldots, \lambda_n(\vartheta)\big)$, и матрица $S(\vartheta)$, удовлетворяющая уравнению $B^\top(\vartheta)B(\vartheta)S(\vartheta) = S(\vartheta)J(\vartheta)$, может быть выбрана ортогональной.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (B1) *и* (B2). *Тогда матрица*

$$T_0(\vartheta) = \begin{pmatrix} S(\vartheta) & S(\vartheta) \\ e_1 S(\vartheta) J^{\frac{1}{2}}(\vartheta) & e_2 S(\vartheta) J^{\frac{1}{2}}(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [-r, 0], \tag{23}$$

приводит матрицу $\mathcal{A}(\vartheta)$ к жордановой форме.

Доказательство. Жорданова форма матрицы $\mathcal{A}(\vartheta)$, согласно лемме 1, имеет вид

$$\mathcal{J}(\vartheta) = \operatorname{diag}\bigl(e_1 J^{\frac{1}{2}}(\vartheta), e_2 J^{\frac{1}{2}}(\vartheta)\bigr), \quad \vartheta \in [-r, 0],$$

а матрица $T(\vartheta)$, приводящая матрицу $\mathcal{A}(\vartheta)$ к жордановой форме, удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}(\vartheta)T(\vartheta) = T(\vartheta)\mathcal{J}(\vartheta)$. Используя блочное представление матрицы $T(\vartheta) = \|T_{ij}(\vartheta)\|_1^2$, последнее уравнение заменяем эквивалентной системой уравнений

$$T_{2j}(\vartheta) = e_j T_{1j}(\vartheta) J^{\frac{1}{2}}(\vartheta),$$
$$B^\top(\vartheta) B(\vartheta) T_{1j}(\vartheta) = e_j T_{2j}(\vartheta) J^{\frac{1}{2}}(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad j = 1, 2,$$

решения которой определяют формулу (23). □

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (B1) *и* (B2), *элементы матрицы B — непрерывно дифференцируемые функции на $[-r, 0]$. Тогда система собственных векторов матрицы $\mathcal{A}(\vartheta)$ ($\vartheta \in [-r, 0]$) может быть выбрана таким образом, что все элементы матрицы*

$$G(\vartheta) = T^{-1}(\vartheta)\bigl(\dot{T}(\vartheta) - \mathcal{A}_0(\vartheta)T(\vartheta)\bigr), \quad \vartheta \in [-r, 0], \tag{24}$$

расположенные на главной диагонали, будут равны нулю. Соответствующая матрица $T(\vartheta)$ определяется формулами

$$T(\vartheta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S(\vartheta)\Gamma(\vartheta) & S(\vartheta)\Gamma(\vartheta) \\ e_1 S(\vartheta)\Gamma(\vartheta) J^{\frac{1}{2}}(\vartheta) & e_2 S(\vartheta)\Gamma(\vartheta) J^{\frac{1}{2}}(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [-r, 0],$$

где $\Gamma(\vartheta) = \operatorname{diag}\bigl(\gamma_1(\vartheta), \gamma_2(\vartheta), \ldots, \gamma_n(\vartheta)\bigr)$, $\gamma_k(\vartheta) = \exp\bigl(-\int_{-r}^{\vartheta} \beta_k(s)\,ds\bigr)$, $\beta_k(\vartheta) = \sum\limits_{j=1}^{n} s_{jk}(\vartheta)\dot{s}_{jk}(\vartheta) + \frac{1}{4}\lambda_k^{-1}(\vartheta)\dot{\lambda}_k(\vartheta) + \frac{1}{4}\sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} s_{qk}(\vartheta) a_{qp}(\vartheta) s_{pk}(\vartheta)$, $k = \overline{1, n}$, $S(\vartheta) = \|s_{ij}(\vartheta)\|_1^n$, $\widehat{A}(\vartheta) = \|a_{ij}(\vartheta)\|_1^n$.

Доказательство. Будем искать матрицу $T(\vartheta)$ в виде

$$T(\vartheta) = T_0(\vartheta)\mathcal{G}(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0], \tag{25}$$

где $\mathcal{G}(\vartheta)$ — подлежащая определению диагональная матрица. Подставляя (25) в (24), получаем

$$G(\vartheta) = \mathcal{G}^{-1}(\vartheta) T_0^{-1}(\vartheta)\bigl(\dot{T}_0(\vartheta) - \mathcal{A}_0(\vartheta)T_0(\vartheta)\bigr)\mathcal{G}(\vartheta) + \mathcal{G}^{-1}(\vartheta)\dot{\mathcal{G}}(\vartheta).$$

Найдем элементы блочной матрицы

$$T_0^{-1}(\vartheta)\bigl(T_0'(\vartheta) - \mathcal{A}_0(\vartheta)T_0(\vartheta)\bigr) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P(\vartheta) + Q(\vartheta) & P(\vartheta) - Q(\vartheta) \\ P(\vartheta) - Q(\vartheta) & P(\vartheta) + Q(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [-r, 0],$$

где $Q(\vartheta) = J^{-\frac{1}{2}}(\vartheta)P(\vartheta)J^{\frac{1}{2}}(\vartheta) + \frac{1}{2}J^{-1}(\vartheta)\dot{J}(\vartheta) + \frac{1}{2}J^{-\frac{1}{2}}(\vartheta)S^\top(\vartheta)\widehat{A}(\vartheta)S(\vartheta)J^{\frac{1}{2}}(\vartheta)$, $P(\vartheta) = S^\top(\vartheta)\dot{S}(\vartheta)$.

Поскольку блоки, стоящие на главной диагонали полученной матрицы, одинаковы, то матрицу $\mathcal{G}(\vartheta)$ можно определить в виде $\mathcal{G}(\vartheta) = \operatorname{diag}\bigl(\Gamma(\vartheta), \Gamma(\vartheta)\bigr)$.

Для того, чтобы элементы главной диагонали матрицы $G(\vartheta)$ были равны нулю при всех $\vartheta \in [-r, 0]$, элементы $\gamma_k(\vartheta)$ диагональной матрицы $\Gamma(\vartheta)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\dot\gamma_k + \beta_k(\vartheta)\gamma_k = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Лемма доказана. □

Осуществляя в системе дифференциальных уравнений (22) линейную подстановку

$$z = T(\vartheta)\big(I_{2n} + \alpha^{\frac12}K(\vartheta)\big)y, \quad \vartheta \in [-r, 0], \tag{26}$$

где элементы матрицы K являются непрерывно дифференцируемыми функциями на $[-r, 0]$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot y = \big(I_{2n} + \alpha^{\frac12}K(\vartheta)\big)^{-1}\Big(&\alpha^{-\frac12}T^{-1}(\vartheta)\mathcal{A}(\vartheta)T(\vartheta) + T^{-1}(\vartheta)\mathcal{A}_0(\vartheta)T(\vartheta)\\ &+ T^{-1}(\vartheta)\big(\mathcal{A}(\vartheta)T(\vartheta)K(\vartheta) - \dot T(\vartheta)\big) + \alpha^{\frac12}T^{-1}(\vartheta)R(\vartheta)T(\vartheta)\big(I_{2n} + \alpha^{\frac12}K(\vartheta)\big)\\ &+ \alpha^{\frac12}T^{-1}(\vartheta)\big(\mathcal{A}_0(\vartheta)T(\vartheta) - \dot T(\vartheta)\big)K(\vartheta) - \alpha^{\frac12}\dot K(\vartheta)\Big)y - \alpha^{-\frac12}g(\alpha, \vartheta),\end{aligned} \tag{27}$$

где $g(\alpha, \vartheta) = -\big(I_{2n} + \alpha^{\frac12}K(\vartheta)\big)^{-1}T^{-1}(\vartheta)f(\vartheta)$.

Принимая во внимание (24) и определение матрицы $T(\vartheta)$, можно преобразовать систему дифференциальных уравнений (27) к виду

$$\begin{aligned}\dot y = \big(I_{2n} + \alpha^{\frac12}K(\vartheta)\big)^{-1}\Big(&\alpha^{-\frac12}\mathcal{J}(\vartheta) - G(\vartheta) + \mathcal{J}(\vartheta)K(\vartheta) - \alpha^{\frac12}G(\vartheta)K(\vartheta)\\ &+ \alpha^{\frac12}T^{-1}(\vartheta)R(\vartheta)T(\vartheta)\big(I_{2n} + \alpha^{\frac12}K(\vartheta)\big) - \alpha^{\frac12}\dot K(\vartheta)\Big)y - \alpha^{-\frac12}g(\alpha, \vartheta).\end{aligned}$$

Рассмотрим матричное уравнение

$$\mathcal{J}(\vartheta)K(\vartheta) - K(\vartheta)\mathcal{J}(\vartheta) = G(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Оно эквивалентно системе уравнений

$$e_iJ^{\frac12}(\vartheta)K_{ij}(\vartheta) - e_jK_{ij}(\vartheta)J^{\frac12}(\vartheta) = G_{ij}(\vartheta), \quad i, j = 1, 2,$$

или используя покоординатную запись

$$\big(e_i\lambda_m^{\frac12}(\vartheta) - e_j\lambda_k^{\frac12}(\vartheta)\big)K_{ij}^{mk}(\vartheta) = G_{ij}^{mk}(\vartheta), \quad i, j = 1, 2, \quad k, m = \overline{1, n},$$

где $G(\vartheta) = \|G_{ij}(\vartheta)\|_1^2$, $G_{ij}(\vartheta) = \|G_{ij}^{mk}(\vartheta)\|_1^n$, $K(\vartheta) = \|K_{ij}(\vartheta)\|_1^2$, $K_{ij}(\vartheta) = \|K_{ij}^{mk}(\vartheta)\|_1^n$. При $i \neq j$ или $k \neq m$ получаем

$$\begin{gathered}K_{ij}^{mk}(\vartheta) = \big(e_i\lambda_m^{\frac12}(\vartheta) - e_j\lambda_k^{\frac12}(\vartheta)\big)^{-1}G_{ij}^{mk}(\vartheta),\\ i, j = 1, 2, \quad k, m = \overline{1, n}, \quad \vartheta \in [-r, 0],\end{gathered}$$

и учитывая условия $G_{ii}^{kk}(\vartheta) = 0$, имеем $K_{ii}^{kk}(\vartheta) = 0$.

Пусть выполнены условия (B1) и (B2) и элементы матрицы B дважды непрерывно дифференцируемые функции на $[-r, 0]$. Тогда система дифференциальных уравнений краевой задачи (22) преобразуется к виду

$$\dot y = \big(\alpha^{-\frac12}\mathcal{J}(\vartheta) + \alpha^{\frac12}C(\alpha, \vartheta)\big)y - \alpha^{-\frac12}g(\alpha, \vartheta), \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}&C(\alpha, \vartheta)\\ &= \big(I_{2n} + \alpha^{\frac12}K(\vartheta)\big)^{-1}\Big(T^{-1}(\vartheta)R(\vartheta)T(\vartheta)\big(I_{2n} + \alpha^{\frac12}K(\vartheta)\big) - G(\vartheta)K(\vartheta) - \dot K(\vartheta)\Big).\end{aligned}$$

Далее, найдем асимптотическое представление общего решения системы (28). Для этого сделаем замену переменных

$$y = \eta \exp\left(\alpha^{-\frac{1}{2}} e_j \int\limits_{\vartheta_j}^{\vartheta} \lambda_k^{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau\right), \quad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, n}, \quad \vartheta \in [-r, 0], \tag{29}$$

где $\vartheta_1 = -r$, $\vartheta_2 = 0$. В результате (28) преобразуется к виду

$$\dot{\eta} = \left(\alpha^{-\frac{1}{2}} \left(\mathcal{J}(\vartheta) - e_j \lambda_k^{\frac{1}{2}}(\vartheta) I_{2n}\right) + \alpha^{\frac{1}{2}} C(\alpha, \vartheta)\right)\eta, \quad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, n}.$$

Полагая $\eta = \|\eta_{pq}\|_{p=1,2}^{q=\overline{1,n}} \in \mathbb{C}^{2n}$, $C(\alpha, \vartheta) = \|C_{ip}^{mq}\|_{i,p=1,2}^{m,q=\overline{1,n}}$ и переходя к координатной записи, получим

$$\dot{\eta}_{im} = \alpha^{-\frac{1}{2}} \left(e_i \lambda_m^{\frac{1}{2}}(\vartheta) - e_j \lambda_k^{\frac{1}{2}}(\vartheta)\right)\eta_{im} + \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{p=1}^{2} \sum_{q=1}^{n} C_{ip}^{mq}(\alpha, \vartheta)\eta_{pq}, \tag{30}$$

$$i, j = 1, 2, \quad k, m = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\eta_{im}(\vartheta) = \delta_{ij}\delta_{km} + \alpha^{\frac{1}{2}} \int\limits_{\vartheta_{ij}^{km}}^{\vartheta} \exp\left(\alpha^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{t}^{\vartheta} \left(e_i \lambda_m^{\frac{1}{2}}(\tau) - e_j \lambda_k^{\frac{1}{2}}(\tau)\right) d\tau\right)$$

$$\times \sum_{p=1}^{2} \sum_{q=1}^{n} C_{ip}^{mq}(\alpha, t)\eta_{pq}(t)\, dt, \quad i, j = 1, 2, \quad k, m = \overline{1, n}, \quad \vartheta \in [-r, 0], \tag{31}$$

где δ_{ij} и δ_{km} — символы Кронекера. Числа ϑ_{ij}^{km} определяются следующим образом:

$$\vartheta_{ij}^{km} = -r, \quad \text{если} \quad \begin{cases} e_i = -e_j = -1; \\ e_i = e_j = -1, & k \le m; \\ e_i = e_j = 1, & k > m; \end{cases}$$

$$\vartheta_{ij}^{km} = 0, \quad \text{если} \quad \begin{cases} e_i = -e_j = 1; \\ e_i = e_j = 1, & k \le m; \\ e_i = e_j = -1, & k > m. \end{cases}$$

Такой выбор границ промежутков интегрирования ϑ_{ij}^{km}, а также лемма 2, позволяют обеспечить выполнение условий

$$\int\limits_{t}^{\vartheta} \left(e_i \lambda_m^{\frac{1}{2}}(\tau) - e_j \lambda_k^{\frac{1}{2}}(\tau)\right) d\tau \le 0, \quad t \in [\vartheta_{ij}^{km}, \vartheta],$$

$$i, j = 1, 2, \quad k, m = \overline{1, n}, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Система интегральных уравнений (31) эквивалентна системе дифференциальных уравнений (30) с краевыми условиями $\eta_{im}(\vartheta_{ij}^{km}) = \delta_{ij}\delta_{km}$. В этом нетрудно убедиться, дифференцируя равенство (31), получаем

$$\dot{\eta}_{im} = \alpha^{-\frac{1}{2}} \left(\eta_{im} - \delta_{ij}\delta_{km}\right)\left(e_i \lambda_m^{\frac{1}{2}}(\vartheta) - e_j \lambda_k^{\frac{1}{2}}(\vartheta)\right) + \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{p=1}^{2} \sum_{q=1}^{n} C_{ip}^{mq}(\alpha, \vartheta)\eta_{pq},$$

$$i, j = 1, 2, \quad k, m = \overline{1, n}.$$

Поскольку $\delta_{ij}\delta_{km}\big(e_i\lambda_m^{\frac{1}{2}}(\vartheta)-e_j\lambda_k^{\frac{1}{2}}(\vartheta)\big)=0$, для любых $i,j=1,2$, $k,m=\overline{1,n}$, то имеем систему (30).

При малых положительных α и фиксированных j и k из принципа сжатых отображений [13] следует, что решение системы интегральных уравнений (31) существует и единственно. Для различных j и k решения системы интегральных уравнений (31) $\eta_j^k=\|\eta_{jp}^{kq}\|_{j,p=1,2}^{k,q=\overline{1,n}}$ линейно независимы и удовлетворяют условиям

$$\eta_{jp}^{kq}(\alpha,\vartheta)=\delta_{jp}\delta_{kq}+O(\alpha^{\frac{1}{2}};\vartheta,j,k,p,q),\quad \vartheta\in[-r,0]. \tag{32}$$

Будем использовать комплекснозначные скалярные функции $O(\alpha^\beta;\vartheta,D_1,D_2,\varphi,i_1,\dots,i_N)$, определенные при малых положительных значениях аргумента α, зависящие от $\vartheta\in[-r;0]$, $D_j\in\mathbb{C}^n$, $j=1,2$, $\varphi\in H^p$ и от конечного числа параметров $i_1,\dots,i_N$, являющихся натуральными числами, а также допускающих оценки

$$\big|O(\alpha^\beta;\vartheta,D_1,D_2,\varphi,i_1,\dots,i_N)\big|\le K_{i_1,\dots,i_N}(D_1,D_2,\varphi)\alpha^\beta.$$

Здесь β и $K_{i_1,\dots,i_N}(D_1,D_2,\varphi)$ — положительные числа. Аргументы ϑ и φ опускаются, если рассматриваемые функции не зависят от них явно. Комплекснозначные векторные функции $\mathcal{O}(\alpha^\beta;\vartheta,D_1,D_2,\varphi,i_1,\dots,i_N)$ и матрицы-функции $\mathbb{O}(\alpha^\beta;\vartheta,D_1,D_2,\varphi,i_1,\dots,i_N)$ определяем как функции, элементы которых являются функциями $O(\alpha^\beta;\vartheta,D_1,D_2,\varphi,i_1,\dots,i_N)$. Здесь $\mathbb{C}^n$ — линейное пространство n-мерных векторов над полем комплексных чисел, H^p — линейное пространство функций $\varphi\in H$, для которых $\varphi^{(k)}\in H$, $k=\overline{1,p}$. В пространстве H^p можно ввести норму

$$||\varphi||_p=\big((\varphi,\varphi)+(\dot\varphi,\dot\varphi)+\dots+(\varphi^{(p)},\varphi^{(p)})\big)^{\frac{1}{2}}.$$

С помощью формулы (29) находим линейно независимые решения однородной части системы (28) и ее общее решение

$$y_{im}(\alpha,\vartheta)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\eta_{ij}^{km}(\alpha,\vartheta)\exp\Bigg(\alpha^{-\frac{1}{2}}e_j\int\limits_{\vartheta_j}^{\vartheta}\lambda_k^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\Bigg)E_{jk}, \tag{33}$$

$$i=1,2,\quad m=\overline{1,n},\quad \vartheta\in[-r,0],$$

где E_{jk} — произвольные постоянные. Переходя к вспомогательным функциям $y_i=\|y_{im}\|_1^n$ и $\eta_{ij}=\|\eta_{ij}^{km}\|_1^n$ в записи формул (33), имеем

$$y_i(\alpha,\vartheta)=\sum_{j=1}^{2}\eta_{ij}(\alpha,\vartheta)\exp\Bigg(\alpha^{-\frac{1}{2}}e_j\int\limits_{\vartheta_j}^{\vartheta}J^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\Bigg)E_j,\quad i=1,2,\quad \vartheta\in[-r,0]. \tag{34}$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi\in H^2$, выполнены условия* (B1) *и* (B2)*, элементы матрицы A непрерывно дифференцируемые, а матрицы B — дважды непрерывно дифференцируемые функции на $[-r,0]$. Тогда компоненты решения системы* (28) *определяются асимптотическими формулами*

$$y_i(\alpha,\vartheta)=\exp\Bigg(\alpha^{-\frac{1}{2}}e_i\int\limits_{\vartheta_i}^{\vartheta}J^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\Bigg)D_i+\frac{1}{2}\Gamma^{-1}(\vartheta)S^\top(\vartheta)B^{-1}(\vartheta)$$
$$\times\big(\dot\varphi(\vartheta)-A(\vartheta)\varphi(\vartheta)\big)+\mathcal{O}(\alpha^{\frac{1}{2}};\vartheta,\varphi,i),\quad i=1,2,\quad \vartheta\in[-r,0], \tag{35}$$

где D_i — произвольные постоянные векторы из $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Используя для неоднородной системы (28) метод вариации произвольных постоянных [12], имеем

$$\dot{E}_i = -\alpha^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{2} \exp\Bigl(-\alpha^{-\frac{1}{2}} e_j \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} J^{\frac{1}{2}}(s)\,ds\Bigr) \hat{\eta}_{ij}(\alpha,\vartheta) g_j(\alpha,\vartheta), \quad i = 1,2,$$

где $g(\alpha,\vartheta) = \begin{pmatrix} g_1(\alpha,\vartheta) \\ g_2(\alpha,\vartheta) \end{pmatrix}$, $\hat{\eta}_{ij}(\alpha,\vartheta)$ — блочные элементы обратной матрицы для матрицы $\|\eta_{ij}(\alpha,\vartheta)\|_1^2$. Интегрируя последнее равенство, находим

$$E_i = \widetilde{E}_i - \alpha^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{2} \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \exp\Bigl(-\alpha^{-\frac{1}{2}} e_j \int_{\vartheta_j}^{\tau} J^{\frac{1}{2}}(s)\,ds\Bigr) \hat{\eta}_{ij}(\alpha,\tau) g_j(\alpha,\tau)\,d\tau,$$
$$i = 1,2, \quad \vartheta \in [-r,0],$$

где $\widetilde{E}_i$ — новые постоянные. В полученном выражении применим формулу интегрирования по частям и используем условия (32), что дает следующие асимптотические формулы

$$\begin{aligned} E_i &= \widetilde{E}_i + \sum_{j=1}^{2} e_j^{-1} J^{-\frac{1}{2}}(\vartheta) \exp\Bigl(-\alpha^{-\frac{1}{2}} e_j \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} J^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\Bigr) \hat{\eta}_{ij}(\alpha,\vartheta) g_j(\alpha,\vartheta) \\ &\qquad - \sum_{j=1}^{2} e_j^{-1} J^{-\frac{1}{2}}(\vartheta_j) \hat{\eta}_{ij}(\alpha,\vartheta_j) g_i(\alpha,\vartheta_j) + \mathcal{O}(\alpha^{\frac{1}{2}};\vartheta,\varphi,i) \\ &= D_i + e_i^{-1} J^{-\frac{1}{2}}(\vartheta) \exp\Bigl(-\alpha^{-\frac{1}{2}} e_i \int_{\vartheta_i}^{\vartheta} J^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\Bigr) g_i(\alpha,\vartheta) + \mathcal{O}(\alpha^{\frac{1}{2}};\vartheta,\varphi,i), \\ &\qquad i = 1,2, \quad \vartheta \in [-r,0], \end{aligned}$$

где D_i — новые постоянные. Найдем компоненты вектор-функции g, учитывая определение матричной функции T, имеем

$$g_i(\alpha,\vartheta) = \tfrac{1}{2} e_i \Gamma^{-1}(\vartheta) J^{\frac{1}{2}}(\vartheta) S^{\top}(\vartheta) B^{-1}(\vartheta)\bigl(\dot{\varphi}(\vartheta) - A(\vartheta)\varphi(\vartheta)\bigr) + \mathcal{O}(\alpha^{\frac{1}{2}};\vartheta,i),$$
$$i = 1,2, \quad \vartheta \in [-r,0].$$

Из последних формул и (34) следует (35). □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда компоненты решения краевой задачи* (22) *определяются асимптотическими формулами*

$$\begin{aligned} x_i(\alpha,\vartheta,\varphi) &= F_i(\alpha,\vartheta)\Delta(\varphi) + \delta_{i1} B^{-1}(\vartheta)\bigl(\varphi'(\vartheta) - A(\vartheta)\varphi(\vartheta)\bigr) \\ &\qquad + \mathcal{O}(\alpha^{\frac{1}{2}};\vartheta,\varphi), \quad i = 1,2, \quad \vartheta \in [-r,0], \end{aligned} \tag{36}$$

где

$$F_i(\alpha,\vartheta) = (-1)^{i-1} S(\vartheta) J^{\frac{i-1}{2}} \Gamma(\vartheta) \exp\Bigl(-\alpha^{-\frac{1}{2}} \int_{-r}^{\vartheta} J^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\Bigr) \Gamma^{-1}(-r) S^{\top}(-r),$$

$$\Delta(\varphi) = B^{\top}(-r)\varphi(-r) - B^{-1}(-r)\bigl(\varphi'(-r) - A(-r)\varphi(-r)\bigr).$$

Доказательство. Используя асимптотические формулы (35) и проводя обратную замену в (26), находим компоненты решения системы (20) в виде

$$x_i(\alpha,\vartheta,\varphi)=\sum_{j=1}^{2}e_j^{i-1}S(\vartheta)J^{\frac{i-1}{2}}(\vartheta)\Gamma(\vartheta)\exp\biggl(\alpha^{-\frac12}e_j\int\limits_{\vartheta_j}^{\vartheta}J^{\frac12}(\tau)\,d\tau\biggr)D_j$$
$$+\delta_{1i}B^{-1}(\vartheta)\bigl(\dot\varphi(\vartheta)-A(\vartheta)\varphi(\vartheta)\bigr)+\mathcal{O}(\alpha^{\frac12};\vartheta,\varphi),\quad i=1,2,\quad \vartheta\in[-r,0]. \tag{37}$$

Последнее выражение подставляем в краевые условия (21). Тогда получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}S(-r)\Gamma(-r)D_1+\mathbb{O}(\alpha^{\frac12})D_2+B^{-1}(-r)\bigl(\dot\varphi(-r)-A(-r)\varphi(-r)\bigr)\\ -B^{-1}(-r)\varphi(-r)=\mathcal{O}(\alpha^{\frac12}),\\ \mathbb{O}(\alpha^{\frac12})D_1+e_2S(0)J^{\frac12}(0)\Gamma(0)D_2=\mathcal{O}(\alpha^{\frac12};D_1,D_2),\end{gathered}\tag{38}$$

При $\alpha=0$ система имеет решение

$$D_1=\Gamma_0^{-1}(-r)S^{\top}(-r)\Delta(\varphi),\quad D_2=0.$$

Учитывая асимптотику коэффициентов и неоднородности алгебраической системы (38), имеем

$$D_1=\Gamma^{-1}(-r)S^{\top}(-r)\Delta(\varphi)+\mathcal{O}(\alpha^{\frac12};\varphi),\quad D_2=\mathcal{O}(\alpha^{\frac12};\varphi). \tag{39}$$

Подставляя найденные значения постоянных (39) в (37), получим (36). □

Используя асимптотики (36) в формуле (17), из краевых условий (15) находим

$$x(0)=\chi(-r)=\varphi(-r)+\mathcal{O}(\alpha^{\frac12};\varphi). \tag{40}$$

4. Зависимость параметра регуляризации от допустимой погрешности

Исследуем вопрос разрешимости уравнения невязки и введем следующее условие на начальную функцию:

(D1) $\Delta(\varphi)=B^{\top}(-r)\varphi(-r)-B^{-1}(-r)\bigl(\dot\varphi(-r)-A(-r)\varphi(-r)\bigr)\neq 0.$

Предложение 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и условие* (D1). *Тогда зависимость параметра регуляризации от допустимой погрешности выражается следующей формулой*

$$\alpha(\delta,\varphi)=\gamma^{\frac23}(\varphi)\delta^{\frac43}+O(\delta^2,\varphi),\quad \varphi\in H^2, \tag{41}$$

где $\gamma(\varphi)=\frac12\Delta^{\top}(\varphi)S(-r)J^{-\frac12}(-r)S^{\top}(-r)\Delta(\varphi)$, $O(\delta^2,\cdot)$ *— непрерывное отображение* $H^2\to\mathbb{R}^-=(-\infty,0)$, *определенное на множестве начальных функций, удовлетворяющих* (D1) *при малых положительных значениях* δ.

Доказательство. Поскольку $Ux_\alpha=\chi_\alpha$, то уравнение невязки примет вид

$$\delta^2=(Ux_\alpha-\varphi,Ux_\alpha-\varphi)=(\chi_\alpha(0,\varphi)-\varphi(0))^{\top}(\chi_\alpha(0,\varphi)-\varphi(0))$$
$$+\int\limits_{-r}^{0}(\chi_\alpha(s,\varphi)-\varphi(s))^{\top}(\chi_\alpha(s,\varphi)-\varphi(s))\,ds.$$

Используя в (17) переменные x_1 и x_2, имеем

$$\chi_\alpha(\vartheta,\varphi)-\varphi(\vartheta)=\alpha^{\frac{1}{2}}B^{-1\top}(\vartheta)x_2+\mathcal{O}(\alpha;\vartheta,\varphi),\quad \vartheta\in[-r,0].$$

Полученное равенство перепишем с учетом (37):

$$\chi_\alpha(\vartheta,\varphi)-\varphi(\vartheta)=-\alpha^{\frac{1}{2}}V(\vartheta)\exp\left(-\alpha^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-r}^{\vartheta}J^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\right)$$
$$\times\,\Gamma^{-1}(-r)S^\top(-r)\Delta(\varphi)+\mathcal{O}(\alpha;\vartheta,\varphi),\quad \vartheta\in[-r,0]. \tag{42}$$

где $V(\vartheta)=B^{-1\top}(\vartheta)S(\vartheta)J^{\frac{1}{2}}(\vartheta)\Gamma(\vartheta)$. Ортогональность матрицы S дает $V^\top(\vartheta)V(\vartheta)=\Gamma^2(\vartheta)$. Тогда из формулы (42) при $\vartheta=0$ имеем

$$\chi_\alpha(0)-\varphi(0)=\mathcal{O}(\alpha).$$

Используя последнее выражение и (42), уравнение невязки приводим к виду

$$\delta^2=\alpha\Delta^\top(\varphi)S(-r)\Gamma^{-1}(-r)\widetilde{V}\Gamma^{-1}(-r)S^\top(-r)\Delta(\varphi)+O(\alpha^2), \tag{43}$$

где $\widetilde{V}=\int_{-r}^{0}\Gamma^2(\tau)\exp\bigl(-2\alpha^{-\frac{1}{2}}\int_{-r}^{\tau}J^{\frac{1}{2}}(s)\,ds\bigr)\,d\tau$. Матрица $\widetilde{V}$ является диагональной, и ее ненулевые элементы допускают асимптотики

$$v_k=\int\limits_{-r}^{0}\gamma_k^2(\tau)\exp\left(-2\alpha^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-r}^{\tau}\lambda_k^{\frac{1}{2}}(s)\,ds\right)d\tau=\frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma_k^2(-r)\lambda_k^{-\frac{1}{2}}(-r)+O(\alpha),\quad k=\overline{1,n}.$$

В результате (43) преобразуется к виду

$$\delta^2=\frac{1}{2}\alpha^{\frac{3}{2}}\Delta^\top(\varphi)S(-r)J^{-\frac{1}{2}}(-r)S^\top(-r)\Delta(\varphi)+O(\alpha^2,\varphi),\quad \varphi\in H^2.$$

При условии (D1) получаем $\gamma(\varphi)=\frac{1}{2}\Delta^\top(\varphi)S(-r)J^{-\frac{1}{2}}(-r)S^\top(-r)\Delta(\varphi)>0$. Тогда уравнение

$$\delta^2=\gamma(\varphi)\alpha^{\frac{3}{2}}+O(\alpha^2,\varphi),\quad \varphi\in H^2,$$

имеет единственное непрерывное решение при малых положительных δ, определяемое формулой (41). $\square$

Введем для начальных функций следующее множество

$$\Phi=\left\{\varphi\colon \Delta(\varphi)\neq 0,\varphi\in H^2\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия предложения* 2. *Тогда значения регуляризирующего оператора для уравнения* $U_0x=\varphi$ *на множестве* Φ *определяются асимптотическими формулами*

$$R(\delta,\varphi)(\vartheta)=\widetilde{F}(\delta,\vartheta)\Delta(\varphi)+B^{-1}(\vartheta)\bigl(\varphi'(\vartheta)-A(\vartheta)\varphi(\vartheta)\bigr)+\mathcal{O}(\delta^{\frac{2}{3}};\vartheta,\varphi),\quad \vartheta\in[-r,0],$$
$$R(\delta,\varphi)(0)=\varphi(-r)+\mathcal{O}(\delta^{\frac{2}{3}};\varphi).$$

где $\widetilde{F}(\delta,\vartheta)=S(\vartheta)\Gamma(\vartheta)\exp\bigl(-\alpha^{-\frac{1}{2}}(\delta,\varphi)\int_{-r}^{\vartheta}J^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\bigr)\Gamma^{-1}(-r)S^\top(-r)$, $\mathcal{O}(\delta^{\frac{2}{3}};\cdot,\varphi)$ *— значение непрерывного отображения* $\Phi\to C$, *определенного при малых положительных* δ.

Доказательство. Для уравнения $U_0x=\varphi$ и стабилизирующего функционала (3) выполнены условия, обеспечивающие существование регуляризирующего оператора $R(\delta,\cdot)\colon H\to H$ [6, с. 62]. Подставляя (41) в (36) и учитывая (40), находим асимптотические формулы для значений этого оператора на множестве Φ. $\square$

Для удобства численного моделирования рассмотрим операторы:
$R_1\colon H^2 \to H$, определяемый формулами

$$R_1(\varphi)(\vartheta) = B^{-1}(\vartheta)\big(\dot{\varphi}(\vartheta) - A(\vartheta)\varphi(\vartheta)\big), \quad \vartheta \in [-r, 0),$$
$$R_1(\varphi)(0) = \varphi(-r),$$

и $R_2\colon H^2 \to H$, определяемый формулами

$$R_2(\delta,\varphi)(\vartheta) = \widetilde{F}(\delta,\vartheta)\Delta(\varphi) + B^{-1}(\vartheta)\big(\dot{\varphi}(\vartheta) - A(\vartheta)\varphi(\vartheta)\big), \quad \vartheta \in [-r, 0),$$
$$R_2(\delta,\varphi)(0) = \varphi(-r).$$

Для этих операторов справедливы следующие утверждения.

Предложение 3 (5, теорема 4)**.** *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда для уравнения $U_0 x = \varphi$ на множестве Φ оператор R_1 является регуляризирующим.*

Предложение 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда для уравнения $U_0 x = \varphi$ на множестве Φ оператор R_2 является регуляризирующим.*

Доказательство. Справедливость утверждения устанавливается аналогичным способом в [5, теорема 5]. □

5. Асимптотика регуляризованных решений

Если элементы матрицы B_k являются непрерывными функциями на $[-r, 0]$, и $\det B_k(\vartheta) \neq 0$ $(k \leq 0)$ при $\vartheta \in [-r, 0]$, то в пространстве H для уравнения $U_k x_{k-1} = x_k$ и стабилизирующего функционала (3) выполнены условия обеспечивающие существование регуляризирующего оператора $R_k\colon H \to H$ [6, с. 62].

Пусть H_{loc} — пространство функций определенных на полуоси $(-\infty, -r]$, сужение которого на любой конечный отрезок $[t^-, -r]$, $t^- < -r$, является гильбертовым пространством H_{t^-} со скалярным произведением $\langle x, y\rangle_{t^-} = \int_{t^-}^{-r} y^\top(s)x(s)\mu(ds)$, где $\mu(s) = -\frac{s}{r} + k - 1$, $s \in [(k-1)r, kr)$, $k \leq -1$, $\mu(-r) = 1$. Для произвольного решения $x_k(\delta,\vartheta,\varphi)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $k \leq -1$, разностного уравнения (6), рассмотрим функцию $x(\delta,\cdot,\varphi) \in H_{loc}$, определяемую с помощью формул $x(\delta, kr+\vartheta, \varphi) = x_k(\delta,\vartheta,\varphi)$, $\vartheta \in (-r, 0]$, $k \leq -1$. Полагая $x_{t^-}(\delta,t,\varphi,) = x(\delta,t,\varphi,)$ при $t \in [t^-, -r]$, вводим сужение последней функции на отрезок $[t^-, -r]$.

Теорема 4. *Пусть элементы матриц B_k — непрерывные функции на $[-r, 0]$, $\det B_k(\vartheta) \neq 0$, $k \leq 0$, при $\vartheta \in [-r, 0]$. Тогда отображение $\varphi \to x_{t^-}(\delta,t,\varphi)$ из H в H_{t^-} является регуляризирующим для задачи Коши системы* (1) *на отрезке $[t^-, -r]$. Здесь $t^- < -r$, N совпадает с целой частью числа $|t^-|/r$.*

Доказательство. Справедливость теоремы устанавливается аналогичным способом в [5, теорема 6]. □

Функции $x(\delta,\cdot,\varphi) \in H_{t^-}$ будем называть регуляризованными решениями системы (1) на отрицательной полуоси полуоси.

Пусть выполнены условия теоремы 4 и функция $\varphi \in H^{N+1}$, $N \geq 2$. Введем последовательность функций

$$\varphi_{k-1}(\vartheta) = B_k^{-1}(\vartheta)\big(\dot{\varphi}_k(\vartheta) - A_k(\vartheta)\varphi_k(\vartheta)\big), \quad k = \overline{-N+1, 0},$$
$$\varphi_0(\vartheta) = \varphi(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Рассмотрим операторы $R^1_k\colon \Phi_k \to H$, определяемые формулами

$$R^1_k(\varphi_k)(\vartheta) = B_k^{-1}(\vartheta)\big(\dot\varphi_k(\vartheta) - A_k(\vartheta)\varphi_k(\vartheta)\big), \quad \vartheta \in [-r,0),$$
$$R^1_k(\varphi_k)(0) = \varphi_k(-r), \quad k = \overline{-N+1,0},$$

и операторы $R^2_k\colon \Phi_k \to H$, определяемые формулами

$$R^2_k(\delta,\varphi_k)(\vartheta) = \widetilde{F}_k(\delta,\vartheta,\varphi_k)\Delta_k(\varphi_k) + B_k^{-1}(\vartheta)\big(\dot\varphi_k(\vartheta) - A_k(\vartheta)\varphi_k(\vartheta)\big), \quad \vartheta \in [-r,0),$$
$$R^2_k(\varphi_k)(0) = \varphi_k(-r), \quad k = \overline{-N+1,0}.$$

Здесь

$$\Phi_k = \{\varphi_k\colon \Delta_k(\varphi_k) \neq 0, \varphi_k \in H^2\},$$
$$\Delta_k(\varphi_k) = B_k^\top(-r)\varphi_k(-r) - B_k^{-1}(-r)\big(\dot\varphi_k(-r) - A_k(-r)\varphi_k(-r)\big),$$
$$\widetilde{F}_k(\delta,\vartheta,\varphi_k) = S_k(\vartheta)\Gamma_k(\vartheta)\exp\bigg(-\tilde\alpha_k^{-\frac12}(\delta,\varphi_k)\int\limits_{-r}^{\vartheta} J_k^{\frac12}(\tau)\,d\tau\bigg)\Gamma_k^{-1}(-r)S_k^\top(-r),$$
$$\tilde\alpha_k(\delta,\varphi_k) = \gamma_k^{-\frac23}(\varphi_k)\delta^{\frac43}, \quad \gamma_k(\varphi_k) = \frac12\Delta_k^\top(\varphi_k)S_k(-r)J_k^{\frac12}(-r)S_k^\top(-r)\Delta_k(\varphi_k);$$

$J_k(\vartheta)$ — жорданова форма матрицы $B_k^\top(\vartheta)B_k(\vartheta)$, $S_k(\vartheta)$ — матрица приводящая ее к жордановой форме; матрица $\Gamma_k(\vartheta)$ определяется леммой 4, в которой матрицы A_0 и B_0 заменяются на A_k и B_k; значения $\alpha_k(\delta,\varphi_k)$ находятся из уравнения невязки (8) при $x_k = \varphi_k$.

Определим функции $x^1(\cdot,\varphi)$, $x^2_\delta(\cdot,\varphi) \in H_{t^-}$, с помощью формул

$$x^1(t,\varphi) = R^1_k(\varphi_k)(t_{k-1} - t),$$
$$x^2_\delta(t,\varphi,) = R^2_k(\delta,\varphi_k)(t_{k-1} - t), \quad t \in [t_{k-2}, t_{k-1}), \quad t_k = kr, \quad k = \overline{-N+2,0},$$
$$x^1(t,\varphi) = R^1_{-N+1}(\varphi_{-N+1})(-Nr - t),$$
$$x^2_\delta(t,\varphi) = R^2_{-N+1}(\delta,\varphi_{-N+1})(-Nr - t), \quad t \in [t^-, -Nr).$$

Теорема 5. *Пусть элементы матриц A_k являются $N+k$ раз непрерывно дифференцируемыми, а матриц B_k — $N+1+k$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями на $[-r,0]$, $k = \overline{-N+1,0}$, а также $\det B_k(\vartheta) \neq 0$ и собственные числа матриц $B_k^\top(\vartheta)B_k(\vartheta)$ простые при $\vartheta \in [-r,0]$. Тогда для задачи Коши системы (1) на отрезке $[t^-,-r]$ отображения $\varphi \to x^1(\cdot,\varphi)$ и $\varphi \to x^2_\delta(\cdot,\varphi)$ из $\mathcal{D} \to H_{t^-}$, являются регуляризирующими. Здесь $\mathcal{D} = \{\varphi\colon \varphi_k \in \Phi_k, k = \overline{-N+1,0}\}$.*

Доказательство. Справедливость теоремы устанавливается аналогичным способом в [5, теорема 7]. □

Функции $x^1(\cdot,\varphi) \in H_{t^-}$ и $x^2_\delta(\cdot,\varphi) \in H_{t^-}$ будем называть асимптотическими регуляризованными решениями системы (1) на отрезке $[t^-,-r]$. Асимптотические регуляризованные решения являются кусочно-непрерывными функциями с точками разрыва первого рода при $t = t_k$, $k = \overline{-N,-1}$. При малом значении допустимой погрешности δ асимптотические регуляризованные решения $x^1(\cdot,\varphi)$ и $x^2_\delta(\cdot,\varphi)$ существенно отличаются только в малых окрестностях точек $t = t_k$.

Пример. Рассмотрим систему с запаздыванием

$$x'(t) = -tx(t) + ty(t) + (1-t)x(t-1) - ty(t-1),$$
$$y'(t) = -tx(t) - ty(t) + tx(t-1) + (1-t)y(t-1)$$

с заданной начальной вектор-функцией $\varphi(\vartheta) = (\sin(\vartheta), \vartheta/2)^\top$, $\theta \in [-1, 0]$. Построим регуляризованное решение на отрезке $[-3, -1]$. Система имеет следующие параметры: $n = 2$, $r = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} -t & t \\ -t & -t \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}, \quad J_0(t) = \begin{pmatrix} 1-2t+2t^2 & 0 \\ 0 & 1-2t+2t^2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_0(t) = \exp\left(\frac{1}{8}\big(t - t^2 - \ln(1-2t+2t^2)\big)\right).$$

Первое асимптотическое регуляризованное решение определяется формулами

$$x^1(-1, \varphi) = \sin(-1), \quad y^1(-1, \varphi) = -\frac{1}{2},$$

при $t \in [-2, -1)$ имеем

$$x^1(t, \varphi) = (-2t\cos(1+t) + (1+t)(2+3t+2t^2+2\sin(1+t)))/(2+4t+4t^2),$$
$$y^1(t, \varphi) = (1+t+t^2 - 2(1+t)\cos(1+t) - 2(1+3t+2t^2)\sin(1+t))(2+4t+4t^2),$$

также при $t \in [-3, -2)$:

$$\begin{aligned} x^1(t, \varphi) = {} & (82 + 311t + 500t^2 + 438t^3 + 224t^4 + 64t^5 + 8t^6 - 4(19 + 80t + 123t^2 \\ & + 88t^3 + 30t^4 + 4t^5)\cos(2+t) - 2(9 + 100t + 280t^2 + 340t^3 + 208t^4 \\ & + 64t^5 + 8t^6)\sin(2+t))/(2(1+2t+2t^2)(5+6t+2t^2)^2), \\ y^1(t, \varphi) = {} & -(76 + 423t + 960t^2 + 1160t^3 + 820t^4 + 344t^5 + 80t^6 + 8t^7 - 4(-8 - 5t \\ & + 27t^2 + 42t^3 + 22t^4 + 4t^5)\cos(2+t) + 4(19 + 80t + 123t^2 + 88t^3 + 30t^4 \\ & + 4t^5)\sin(2+t))/(2(1+2t+2t^2)(5+6t+2t^2)^2). \end{aligned}$$

При значении допустимой погрешности $\delta = 10^{-3}$ второе асимптотическое регуляризованное решение определяется равенствами

$$\begin{aligned} x^2_\delta(t, \varphi) &= x^1(t, \varphi) - 1.67494 \exp\big(\zeta_1(t)\big), \\ y^2_\delta(t, \varphi) &= y^1(t, \varphi) - 0.190113 \exp\big(\zeta_1(t)\big), \quad t \in [-2, -1), \\ x^2_\delta(t, \varphi) &= x^1(t, \varphi) - 2.96818 \exp\big(\zeta_1(t)\big), \\ y^2_\delta(t, \varphi) &= y^1(t, \varphi) + 3.04737 \exp\big(\zeta_1(t)\big), \quad t \in [-3, -2), \end{aligned}$$

где

$$\zeta_1(t) = \frac{1}{8}\big(t - t^2 - \ln(1-2t+2t^2)\big) - 112.42\int\limits_{-1}^{t}(1-2s+2s^2)^{\frac{1}{2}}\,ds,$$

$$\begin{aligned} \zeta_2(t) = {} & \frac{1}{8}\Big(-1 - (-1+t)^2 + t - \ln\big(1 - 2(-1+t) + 2(-1+t)^2\big)\Big) \\ & - 201.707\int\limits_{-2}^{-1+t}(1-2s+2s^2)^{\frac{1}{2}}\,ds. \end{aligned}$$

На Рис. 1 и 2 отражены результаты вычислений при значении допустимой погрешности $\delta = 10^{-3}$. Графики асимптотических регуляризованных решений

$x^1(\cdot,\varphi)$ и $y^1(\cdot,\varphi)$ изображены пунктирной линией, а графики асимптотических регуляризованных решений $x^2_\delta(\cdot,\varphi)$ и $y^2_\delta(\cdot,\varphi)$ — сплошной.

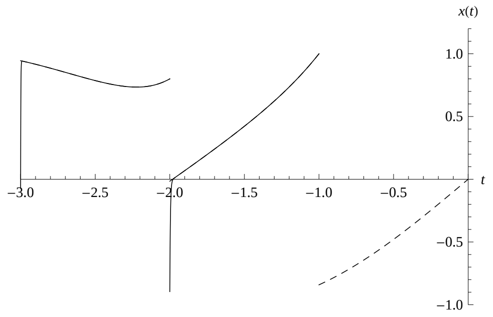

Рис. 1. Асимптотические регуляризованные решения x^1 и x^2_δ.

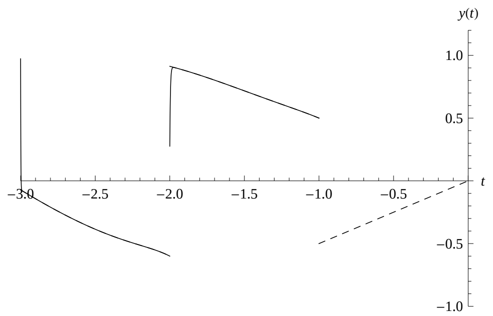

Рис. 2. Асимптотические регуляризованные решения y^1 и y^2_δ.

References

[1] N. N. Krasovskii, *Certain problems in the theory of stability of motion*, Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1959. MR0106313

[2] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional-Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993. MR1243878

[3] A. D. Myshkis, *Linear differential equations with retarded argument*, Nauka, Moscow, 1972. MR0352648

[4] Yu. F. Dolgii and E. N. Putilova, *Backward of Solutions of a Linear Differential Equation with Delay as an Ill-Posed Problem*, Differential Equations, **29**:8 (1994), 1141–1146. MR1281254

[5] Yu. F. Dolgii and P. G. Surkov, *Asymptotic behavior of regularized solutions of a linear nonautonomous system of differential equations with anticipation.*, Differential Equations. **46**:4 (2010), 470–488. MR2796522

[6] A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Solutions of ill-posed problems*, Scripta Series in Mathematics, John Wiley & Sons, New York-Toronto, Ont.-London, 1977. MR0455365

[7] P. G. Surkov, *Regularization of ill-posed Cauchy problem for an autonomous system with delay using one class of stabilizing functionals*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **20**:3 (2014), 234–245.

[8] V. K. Ivanov, V. V. Vasin, V. P. Tanana, *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya (Theory of linear ill-posed problems and its applications)*, Nauka, Moscow, 1978. MR0511653

[9] I. M. Rapoport, *On Some Asymptotic Methods in the Theory of Differential Equations*, Izdat. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kiev, 1954. MR0075366

[10] M. V. Fedoryuk, *Asymptotic Methods for Linear Ordinary Differential Equations*, Nauka, Moscow, 1983. MR0732787

[11] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, 1959. MR0107649

[12] L. S. Pontryagin, *Ordinary differential equations*, Nauka, Moscow, 1982. MR0708719

[13] K. Yosida, *Functional Analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 123, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980. MR0617913

Platon Gennad'evich Surkov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS,
16 S.Kovalevskaya Str.,
620990, Ekaterinburg, Russian Federation.
Yeltsin Ural Federal University
19 Mira Str.,
620002, Ekaterinburg, Russian Federation.
E-mail address: platon.surkov@gmail.com