S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 511–517 (2017) УДК 517.544

DOI 10.17377/semi.2017.14.041 MSC 47A68

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАРКУШЕВИЧА

А.Ф. ВОРОНИН

Abstract. In this article we study the problem of Markushevich (generalized Riemann boundary value problem). New conditions are obtained for the stability and the unique of the Markushevich problem.

Keywords: problem of Markushevich, Riemann boundary value problems, factorization of matrix functions, factorization indices, stability, unique.

1. Введение

Прежде чем формулировать задачу введем необходимые обозначения и приведем некоторые хорошо известные результаты в теории краевой задачи Римана.

Для $1 \le n, m \le 2$ положим $L_{n\times m}$ — пространство $n \times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$, R — расширенная вещественная прямая, $\mathcal{F}f$ — образ Фурье матрицы-функции $f \in L_{n\times m}$:

$$\mathcal{F}f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt,\ x \in R;$$

$W^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $c + \mathcal{F}f$, где c — постоянная матрица порядка n и $f \in L_{n\times n}$; $W_+^{n\times n}$ ($W_-^{n\times n}$) — подалгебра в $W^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $c + \mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$); при c=0 соответствующие алгебры и подалгебры будем снабжать нижним индексом 0 ($W_0^{n\times n}$, $W_{0\pm}^{n\times n}$).

Voronin, A.F., Conditions for the stability and uniqueness of the solution of the Markushevich problem.

Поступила 3 апреля 2017 г., опубликована 25 мая 2017 г.

На алгебре $W_0^{n\times n}$ определим дополнительные друг к другу проекторы P_0^+ и P_0^- по следующим формулам,

$$P_0^{\pm}\ :\ W_0^{n\times n}\ \to\ W_{0\pm}^{n\times n},\ P_0^{\pm}\mathcal{F}f(p)\equiv P_0^{\pm}\{\mathcal{F}f(t)\}(p)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ipt}f(t)\theta(\pm t)\,dt,\ p\in R,$$

где θ - функция Хевисайда.

Отметим следующие свойства линейных операторов $P_0^{\pm}$:

$$P_0^+ + P_0^- = I,\ \mathcal{F}^{-1}\{P_0^{\pm}\mathcal{F}f(p)\}(t)=f(t)\theta(\pm t),\ t\in R,$$

где I – единичный оператор, $\mathcal{F}^{-1}$ - обратное преобразование Фурье.

Если A — некоторая алгебра, то через $\mathcal{G}A$ обозначим группу из обратимых элементов в A.

Будем говорить, что матрица $G\in\mathcal{G}W^{2\times2}$ допускает стандартную факторизацию, если она представляется в виде следующего произведения матриц:

$$G(x)=G_+(x)D(x)G_-(x),\ x\in R,$$

где $G_{\pm}\in\mathcal{G}W_{\pm}^{2\times2}$, $D(x)$ - диагональная матрица-функция,

$$D(x)=\operatorname{diag}\left((\frac{x-i}{x+i})^{\kappa_1},(\frac{x-i}{x+i})^{\kappa_2}\right),$$

$\kappa_1\ \geq\ \kappa_2$ — частные индексы матрицы G (целые числа), κ :=Ind det $G(t)\ \equiv$ $\frac{1}{2\pi}\Delta_R\arg\det\,G(x)=\sum\limits_{j=1}^{2}\kappa_j$ — суммарный индекс матрицы G.

Если $\kappa_1=\kappa_2=0$ ($D=I$ — единичная матрица), то $G=G_+G_-$ — каноническая факторизация матрицы-функции G.

При $n=1$ верхний индекс $n\times n$ при W будем опускать.

Рассмотрим краевую задачу Маркушевича [1-2] о нахождении функций $\varphi^{\pm}\in W_{0\pm}$ по краевому условию на контуре совпадающем с R:

$$\varphi^+(x)=a(x)\varphi^-(x)+b(x)\overline{\varphi^-(x)}+c(x),\ x\in R, \tag{0.1}$$

где

$$a,b\in W,\quad c\in W_0,\quad a(x)\neq0,\ x\in R. \tag{0.2}$$

Как и в [2] будем обозначать через l – число линейно независимых решений, а через p – число условий разрешимости задачи Маркушевича (0.1)-(0.2). Под устойчивостью задачи будем понимать устойчивость чисел l и p относительно изменения коэффициентов задачи a,b (в норме алгебры W).

В [2] задача Маркушевича (0.1)-(0.3) сведена к задаче Римана для кусочно-аналитического вектора $\Phi(x)=(\Phi_1(x),\Phi_2(x))^T$ (T– знак транспонирования),

$$\Phi^+(x)=G(x)\Phi^-(x)+g(x),\ x\in R, \tag{0.3}$$

где

$$\Phi^{\pm}\in W_{0\pm}^{2\times1},\ G\in\mathcal{G}W^{2\times2},\ g(x)=(g_1(x),g_2(x))^T\in W_0^{2\times1}. \tag{0.4}$$

Вектор-функции $\Phi^{\pm}$ определяются равенствами

$$\Phi_1^{\pm}(x)=\varphi^{\pm}(x),\ \Phi_2^{\pm}(x)=\overline{\varphi^{\mp}(x)}, \tag{0.5}$$

а матрица $G(x)$ и вектор $g(x)$ вычисляются по следующим формулам, соответственно,

$$G(x)=\frac{1}{\overline{a(x)}}\begin{pmatrix}|a(x)|^2-|b(x)|^2 & b(x)\\ -\overline{b(x)} & 1\end{pmatrix},$$

$$g_1(x) = \frac{\overline{a(x)}c(x) - b(x)\overline{c(x)}}{\overline{a(x)}},\ g_2(x) = -\frac{\overline{c(x)}}{\overline{a(x)}}. \tag{0.6}$$

Положим

$$G_1(x) := \begin{pmatrix} |a(x)|^2 - |b(x)|^2 & b(x) \\ -\overline{b(x)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{0.7}$$

Из выражений для матриц G и G_1 в (0.6)-(0.7) следует, что для частных индексов матрицы G справедлива формула

$$\kappa_j = \kappa_j^1 + \nu,\ j = 1, 2, \tag{0.8}$$

где κ_1^1, κ_2^1 - частные индексы матрицы G_1 ($\kappa_1^1 = -\kappa_2^1$), ν – индекс Коши функции $a(x)$, $\nu = \mathrm{Ind}\ a(x), x \in R$.

Хорошо известно (см., например, [2], [3, гл. 6]), что корректность краевой задачи Римана(0.3) определяют частные индексы ее матричного коэффициента G. В частности, имеют место следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для устойчивости чисел p и l, где l – число линейно независимых решений, p — число условий разрешимости задачи Римана* (0.3)–(0.4)*, относительно элементов матрицы $G(x)$ в* (0.6)*, достаточно чтобы частные индексы матрицы G были равны между собой.*

Теорема 2. *Если частные индексы матрицы $G(x)$ неположительны, то задача Римана* (0.3)–(0.4) *не может иметь более одного решения.*

Из равенства (0.8) следует, что для нахождения частных индексов матрицы $G(x)$ достаточно найти частные индексы матрицы $G_1(x)$ в (0.7).

В следующем пункте будет найдено условие на коэффициенты a и b, при выполнении которого частные индексы матрицы $G_1(x)$ будут равны нулю. В пункте 2 показана эквивалентность задачи Маркушевича и краевой задачи типа Римана, в которой требуется определить аналитическую в верхней полуплоскости $Im\, z > 0$ вектор-функцию по краевому условию на R.

Заметим, что интерес к задаче Маркушевича возник в связи с тем, что она встречается в теории бесконечно малых изгибаниях склеенных поверхностей [4]. В статье [2] и монографии [5, гл. 5, § 39.3] можно найти историю изучения задачи Маркушевича. На настоящий момент устойчивость задачи исследована для следующих случаев или сводятся к ним:

$$|a| > |b|,\ |a| = |b|,\ b \in W_+. \tag{0.9}$$

Выполнение второго или третьего условия в (0.9) существенно упрощает задачу Маркушевича, что позволяет достаточно полно ее исследовать и получить решения в замкнутой форме. В [6], с точностью до обозначений, подробно исследована задача Маркушевича (0.1) в случае кругового контура при выполнении последнего условия в (0.9). Отметим также работу [7], где исследована задача Маркушевича (0.1) на многосвязных круговых областях в случае $a = 0$.

1. Основные результаты. Условие устойчивости и единственности решения задачи Маркушевича. Положим

$$I_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ I_2 := \mathrm{diag}(1, -1), \tag{1.1}$$

$$G_2(x) := I_2 I_1 \, G_1(x) \, I_1, \;\; \alpha(x) := -\frac{b(x)}{a^0_+(x)},$$

где a^0_+ – множитель в факторизации функции $|a(x)|^2$:

$$|a(x)|^2 = a^0_+(x)\overline{a^0_+(x)}, \;\; x \in R, \;\; (a^0_+ \in \mathcal{G}W_+, \;\; \mathrm{Ind}\, |a(x)| = 0).$$

Из (1.1) и (0.7) имеем

$$G_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{b(x)} \\ -b(x) & -|a(x)|^2 + |b(x)|^2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица $G_2(x)$ – эрмитова с отрицательным определителем. Является проблемой нахождение частных индексов таких матриц в общем случае. Здесь будет доказана

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (0.2) *и справедливы соотношения в* (1.1). *Если*

$$|P^-_0\{\alpha(x) - \alpha(\infty)\}| < 1, \tag{1.2}$$

то частные индексы матрицы $G_2(x)$ (и $G_1(x)$) равны нулю.

Доказательство. Непосредственно устанавливаем справедливость следующего разложения матрицы G_2

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & a^0_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{b} \\ 0 & -\overline{a^0_+} \end{pmatrix} \equiv AB, \tag{1.3}$$

где $A, B \in \mathcal{G}W^{2\times 2}$. Легко видеть, что треугольные матрицы $A(x)$ и $B(x)$ допускают канонические факторизации:

$$\begin{gathered} A(x) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b(x) & a^0_+(x) \end{pmatrix} = A_+(x)A_-(x), \\ B(x) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\overline{b(x)} \\ 0 & -\overline{a^0_+(x)} \end{pmatrix} = B_+(x)B_-(x), \end{gathered} \tag{1.4}$$

где

$$\begin{gathered} A_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_+ & a^0_+ \end{pmatrix}, \;\; A_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_- & 1 \end{pmatrix}, \;\; \alpha_\pm \in W_\pm, \\ B_+ = \begin{pmatrix} 1 & \beta_+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; B_- = \begin{pmatrix} 1 & \beta_- \\ 0 & -\overline{a^0_+} \end{pmatrix}, \;\; \beta_\pm \in W_\pm, \end{gathered} \tag{1.5}$$

функции $\alpha_\pm, \beta_\pm$ находятся из следующих уравнений, соответственно,

$$\begin{gathered} -b(x) = \alpha_+(x) + a^0_+(x)\alpha_-(x), \\ -\overline{b(x)} = \beta_-(x) - \overline{a^0_+(x)}\beta_+(x), \;\; x \in R. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Непосредственно убеждаемся, что функции $\alpha_\pm$, определенные ниже,

$$\begin{gathered} \alpha_-(x) = P^-_0\{\alpha(x) - \alpha(\infty)\}, \\ \alpha_+(x) = a^0_+(x)(P^+_0\{\alpha(x) - \alpha(\infty)\} + \alpha(\infty)), \end{gathered} \tag{1.7}$$

будут удовлетворять первому уравнению в (1.6). Применив операцию комплексного сопряжения к левой и правой частям первого уравнения в (1.6) и положив

$$\beta_- := \overline{\alpha_+},\ \beta_+ := -\overline{\alpha_-} \tag{1.8}$$

получим второе уравнение в (1.6).

Вернемся к разложениям (1.3)-(1.5). Положим

$$M(x) := A_-(x)B_+(x),\ x \in R. \tag{1.9}$$

Тогда из (1.3)-(1.5),(1.9)для матрицы G_2 получим представление

$$G_2(x) = A_+(x)M(x)B_-(x),\ x \in R. \tag{1.10}$$

Для матриц-функций в (1.9)-(1.10) выполняются следующие включения (по построению):

$$M \in \mathcal{G}W^{2\times 2},\ A_+ \in \mathcal{G}W_+^{2\times 2},\ A_- \in \mathcal{G}W_-^{2\times 2}.$$

Следовательно, матрицы-функции M и G_2 имеют одинаковый набор частных индексов. Далее будем изучать частные индексы матрицы $M(x)$.

Подставив в правую часть равенства (1.9) выражения для матриц A_- и B_+ из (1.5), с учетом второго равенства в (1.8) получим цепочку равенств

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\alpha_-} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\alpha_-} \\ \alpha_- & 1 - |\alpha_-|^2 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

где $1 - |\alpha_-|^2 > 0$ по условию (1.2). Из (1.11) легко видеть, что для матрицы $M(x)$ выполнено равенство

$$M + \overline{M^T} = 2\mathrm{diag}(1, 1 - |\alpha_-|^2).$$

Тогда из теоремы 8.1 [8] (см. также теорему 1 [2]) получим, что частные индексы матрицы $M(x)$ и, следовательно, матриц $G_2(x)$ и $G_1(x)$ равны нулю. □

Из леммы 1 и равенства (0.8) непосредственно следует, что все частные индексы матрицы $G(x)$ равны ν – индексу Коши функции $a(x)$. Тогда из теорем 1,2 вытекает

Теорема 3. *Пусть выполнены условие* (0.2) *и неравенство* (1.2)*. Тогда задача Маркушевича* (0.1)–(0.2) *устойчива.*

Если, кроме того, $\nu \le 0$, то задача Маркушевича не может иметь более одного решения.

Рассмотрим простой пример выполнения теоремы 3. Пусть

$$b \in W_+. \tag{1.12}$$

Тогда $\alpha \in W_+$, следовательно, неравенство (1.2) безусловно выполнено, т.к.

$$P_0^- \{\alpha(x) - \alpha(\infty)\} = 0,\ x \in R.$$

Значит, первая часть теоремы 3 справедлива (при $\nu \le 0$ выполняется и вторая часть теоремы). Тот же результат получим, если будем искать частные индексы матрицы G при условии (1.12) напрямую. В этом случае легко видеть, что решение однородной ($g = 0$) векторной задачи Римана (0.3),(0.4),(0.6) сводится к последовательному решению двух скалярных задач Римана в алгебре W_0, решение последних не представляет проблемы.

2. Об эквивалентности двух краевых задач. Здесь приведем несколько другую, чем в §3 [2] формулировку эквивалентности краевых задач Маркушевича и Римана.

Рассмотрим следующую краевую задачу на R, в которой требуется определить (аналитическую в верхней полуплоскости $Im\,z > 0$, где $z = x + iy$) вектор-функцию $\Psi^+ \in W_{0+}^{2\times 1}$ из краевого условия:

$$\Psi^+(x) = M_1(x)\overline{\Psi^+(x)} + g(x),\ x \in R, \tag{2.1}$$

где

$$M_1 = GI_1 \equiv \frac{1}{\overline{a}}\begin{pmatrix} b & |a|^2 - |b|^2 \\ 1 & -\overline{b} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Справедлива следующая лемма об эквивалентности.

Лемма 2. *Для существования решения задачи Маркушевича* (0.1)–(0.2) *необходимо и достаточно существование решения краевой задачи* (2.1)–(2.2). *Эквивалентность этих двух задач устанавливается равенствами*

$$\varphi^+(x) = \Psi_1^+(x),\ \varphi^-(x) = \overline{\Psi_2^+(x)}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Если решение задачи Маркушевича существует, то существует и решение задачи Римана (0.3)-(0.6) по построению в [2]. Причем, решение последней подчиняется равенству

$$\Phi_1^{\pm}(x) = \overline{\Phi_2^{\mp}(x)}, \tag{2.4}$$

что следует из (0.5). Положив $\Psi^+ := \Phi^+$, из (2.4) получим $\Phi^- = I_1\overline{\Psi^+}$. Заменив в краевом условии в (0.3) функции Φ^+ на Ψ^+, а Φ^- на $I_1\overline{\Psi^+}$ получим краевое условие (2.1). Следовательно, решение краевой задачи (2.1)-(2.2) существует и равенства в (2.3) выполнены.

Пусть теперь существует решение краевой задачи (2.1)-(2.2). Определим функции $\varphi^{\pm}(x)$ посредством равенств в (2.3) и подставим в краевое условие (2.1) выражения для $\Psi_j^+(x),\ j = 1, 2$ из (2.3), получим следующую систему уравнений для $\varphi^{\pm}$:

$$\varphi^+ = \frac{1}{\overline{a}}(b\overline{\varphi^+} + (|a|^2 - |b|^2)\varphi^-) + g_1, \tag{2.5}$$

$$\overline{\varphi^-} = \frac{1}{\overline{a}}(\overline{\varphi^+} - \overline{b}\varphi^-) + g_2. \tag{2.6}$$

Умножим теперь левую и правую части уравнения (2.6) на $-b$ и сложим вновь полученное уравнение с уравнением (2.5), в результате получим уравнение задачи Маркушевича (0.1). □

Установим некоторое свойство инвариантности уравнения (2.1). Покажем, что уравнение (2.1) инвариантно относительно последовательного применения операции умножения слева на матрицу $M_1^{-1}(x)$ и операции комплексного сопряжения. Легко видеть, что матрица M_1 – круговая, т.е. справедливо равенство

$$\overline{M_1^{-1}(x)} = M_1(x),\ x \in R. \tag{2.7}$$

Умножим теперь левую и правую части уравнения (2.1) слева на матрицу $M_1^{-1}(x)$ и к вновь полученному уравнению применим операцию комплексного сопряжения, с учетом (2.7) имеем

$$M_1(x)\overline{\Psi^+(x)} = \Psi^+(x) + M_1\overline{g(x)},\ x \in R.$$

Полученное уравнение совпадает с исходным (2.1), т.к.

$$M_1\overline{g(x)} = -g(x),\ x \in R.$$

Справедливость последнего равенства устанавливается непосредственно.

References

[1] A. I. Markushevich, *Ob odnoi granichnoi zadache teorii analiticheskikh funktsii*, Uchenye zapiski MGU, **100** (1946), 20–30. MR0036302

[2] Litvinchuk G. S., *Two theorems on the stability of the partial indices of Riemann's boundary value problem and their application*, Izv. vuzov. Matematika, **12** (1967), 47–57. (In Russian). MR0223585

[3] N.I.Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Wolters-Noordhoff Pabl., Groningen, 1972. MR0355494

[4] L. G. Mikhailov, *A general boundary-value problem for infinitesimal bending of fused surfaces*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **5** (1960), 99–109. MR0131850

[5] F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, Dover Publication Inc., New-York, 1990. MR1106850

[6] Idzhad Kh. Sabitov, *Markushevich's ill-posed boundary-value problem for multiply connected domains with circular boundaries*, Izvestiya: Mathematics,**76**:6(2012), 1218–1256. MR3074422

[7] V. M. Adukov, A. A. Patrushev, *On explicit and exact solutions of the Markushevich boundary problem for circle*, Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., **11**:2 (2011), 9–20.

[8] Gokhberg I. Ts., Krein M. G., *Integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments*, Uspekhi mat. nauk, **13**:2 (1958), 3–72 (Russian). MR0102721

Anatoliy Fedorovich Voronin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `voronin@math.nsc.ru`