

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 14, стр. 518–527 (2017)

УДК 517.9

DOI 10.17377/semi.2017.14.042

MSC 35Q20

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ
РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С
ВНУТРЕННИМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ЭЛЕМЕНТОМ

О.В. ГЕРМИДЕР, В.Н. ПОПОВ

АБСТРАКТ. The article proposes method of solving the problem of heat and mass transfer in a long rectangular channel with an inner cylindrical element. A rarefied gas flow through cross section is studied on the basis of kinetic equation in the free molecular. Diffuse reflection model for the boundary condition at the channel walls is used. The expression for the mass flux is obtained as a linear function of a pressure gradient supported in the channel.

Keywords: model of diffuse reflection, kinetic equation, free molecular regime.

1. ВВЕДЕНИЕ

Постоянно развивающиеся технологии MEMS и NEMS (микро- и наноэлектронные системы) требуют проведения новых исследований течений в микро- и наноканалах с различной конфигурацией сечения [1]. В связи с этим в [2] осуществлено математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса в канале, поперечное сечение которого представляет собой правильный многоугольник, вписанный в круг, в [3]-[7] — в канале прямоугольного сечения, в [8]-[10] — в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами, в [11]-[14] и [15]-[17] — в прямом эллиптическом и круговом цилиндрах, соответственно.

В представленной работе применяется подход, предложенный в [3], к решению задачи в свободномолекулярном режиме о течении Пуазейля в канале

GERMIDER, O.V., POPOV, V.N., MATHEMATICAL MODELING RAREFIED GAS FLOW IN A RECTANGULAR CHANNEL WITH AN INNER CYLINDRICAL ELEMENT.

© 2017 Гермидер О.В., Попов В.Н.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ по научному проекту № 16-29-15116 офи_м.

Поступила 14 марта 2017 г., опубликована 25 мая 2017 г.

прямоугольного сечения с внутренним круговым цилиндрическим элементом. В качестве граничного условия на обтекаемой газом поверхности используем модель диффузного отражения. Предполагаем, что в канале поддерживается постоянный, малый по абсолютной величине градиент давления. Получены выражения теплового и массового потоков как функции от градиента давления. Представленные результаты могут быть использованы для обоснования достоверности результатов численного моделирования и экспериментального исследования течения разреженного газа в канале.

Исследования течения разреженного газа в каналах с внутренним круглым цилиндрическим элементом актуально как с прикладной, так и с теоретической точек зрения. С одной стороны, такие конфигурации имеют место в приложениях, например в установках низкого давления. С другой стороны, такая задача для кинетического уравнения в каналах сложной формы является значимой с точки зрения вычислений, поскольку в этом случае методы конечных разностей и элементов могут быть неустойчивыми и обладают низкой степенью точности [18]. Заметим, что канал с подобным сечением рассматривался в [18] для описания течения вязкой несжимаемой жидкости с применением численного метода на основе R -функций.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим прямоугольный канал с внутренним круговым прямым цилиндрическим элементом радиусом R' (рис. 1). Введем обозначения для границ сечения канала: Ω — окружность радиусом R' , Ω_r — внешняя граница области D_2 , заключенной между прямоугольником и кругом D_1 ; $\Gamma = \Omega \cup \Omega_r$. Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент давления, направленный вдоль оси канала z' . Выбирая в качестве размерного масштаба ширину прямоугольного канала b' , переходим к безразмерным переменным; соответствующие безразмерные величины будем обозначать без штриха: $x = x'/b'$, $y = y'/b'$, $z = z'/b'$. Полагая, безразмерный градиент давления $G_p \ll 1$, в линейном приближении находим

$$(1) \quad p(z) = p_0(1 + G_p z).$$

В предположении, что температура газа в канале постоянна и равна T_0 , из равенства $p = nk_B T_0$, где n — концентрация молекул газа в канале, k_B — постоянная Больцмана, получаем

$$(2) \quad n(z) = n_0(1 + G_p z).$$

Здесь n_0 — концентрация молекул газа в начале координат.

Состояние разреженного газа в точке, радиус-вектор \mathbf{r} которой имеет координаты x , y и z , определяем функцией распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ молекул по скоростям \mathbf{v} . Компоненты вектора потока тепла $q'_z(\mathbf{r})$ и массовой скорости газа $u_z(\mathbf{r})$ в канале определяются функцией распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ согласно [19] как

$$(3) \quad q'_z(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} \int (v_z - u_z(\mathbf{r})) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v},$$

$$(4) \quad u_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(z)} \int v_z f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v},$$

где m — масса молекул газа. Введем безразмерные компоненты векторов потока тепла и массовой скорости газа, следуя [20]

$$(5) \quad q_z = \frac{\beta^{1/2}}{p_0} q'_z, \quad U_z = \beta^{1/2} u_z,$$

где $\beta = m/(2k_B T_0)$.

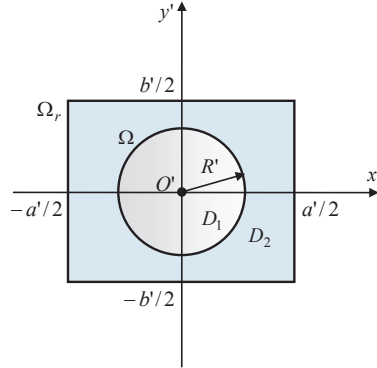


Рис. 1. Схема поперечного сечения канала

Приведенные потоки тепла и массы через поперечное сечение определим согласно [19] как

$$(6) \quad J_Q = \frac{8}{a} (I_{1,1} + I_{1,2} + I_{1,3}), \quad J_M = \frac{8}{a} (I_{2,1} + I_{2,2} + I_{2,3}),$$

$$I_{k,1} = \int_0^R dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} g_k(\mathbf{r}) dx, \quad I_{k,2} = \int_0^R dy \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{a/2} g_k(\mathbf{r}) dx,$$

$$I_{k,3} = \int_R^{1/2} dy \int_0^{a/2} g_k(\mathbf{r}) dx, \quad g_1 = q_z, \quad g_2 = U_z.$$

Для нахождения функции распределения молекул газа воспользуемся кинетическим уравнением, которое в декартовой прямоугольной системе координат в отсутствии межмолекулярных столкновений имеет вид [19]

$$(7) \quad C_x \frac{\partial f}{\partial x} + C_y \frac{\partial f}{\partial y} + C_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

где $\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$ — безразмерная скорость молекул газа.

В качестве граничного условия на обтекаемых газом стенках канала будем использовать модель диффузного отражения. В этом случае [19]:

$$(8) \quad f^+(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{C}) = f_\Gamma(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{C}), \quad \mathbf{Cn} > 0,$$

где $f^+(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{C})$ — функция распределения молекул газа, отраженных от стенок канала, $f_\Gamma(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{C})$ — локально-равновесная функция распределения с параметрами, заданными на стенках, \mathbf{n} — вектор нормали к обтекаемой газом поверхности канала направленный в сторону газа,

$$(9) \quad f_\Gamma(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{C}) = n_\Gamma(z) \left(\frac{\beta T_0}{\pi T_\Gamma(z)} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{T_0}{T_\Gamma(z)} C^2 \right).$$

Выбор значения температуры T_Γ в (9) осуществляем из условия, что газ находится в тепловом равновесии со стенками канала [19]. В этом случае $T_\Gamma = T_0$. Величину $n_\Gamma(z)$ определяем из условия непротекания, которое имеет место для рассматриваемой модели отражения молекул газа и приводит к отсутствию среднемассового потока частиц сквозь стенки канала [19]. Линеаризуя (9) относительно абсолютного максвеллиана $f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$, приходим к следующему выражению для локально равновесной функции распределения $f_\Gamma(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{C})$:

$$(10) \quad f_\Gamma(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{C}) = f_0(C) (1 + G_p z).$$

Функцию распределения линеаризуем относительно локально-равновесной функции распределения $f_\Gamma(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{C})$. В результате с учетом (10) приходим к следующему выражению для $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$:

$$(11) \quad f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C) (1 + G_p z + h(x, y, \mathbf{C})),$$

где $h(x, y, \mathbf{C})$ — линейная поправка к локально-равновесной функции распределения.

Подставив (11) в (7), для определения $h(x, y, \mathbf{C})$ получим уравнение

$$(12) \quad C_x \frac{\partial h}{\partial x} + C_y \frac{\partial h}{\partial y} + C_z G_p = 0.$$

Переходя к цилиндрическим координатам в пространстве скоростей: $C_x = C_\perp \cos \varphi$, $C_x = C_\perp \sin \varphi$, C_z , функцию $h(x, y, \mathbf{C})$ будем искать в виде:

$$(13) \quad h(x, y, \mathbf{C}) = C_z G_p Z(x, y, C_\perp, \varphi).$$

Подставляя выражение (13) в (12), получаем уравнение относительно неизвестной функции $Z(x, y, C_\perp, \varphi)$:

$$(14) \quad C_\perp \cos \varphi \frac{\partial Z}{\partial x} + C_\perp \sin \varphi \frac{\partial Z}{\partial y} + 1 = 0.$$

Граничные условия для $Z(x, y, C_\perp, \varphi)$ вытекают из (8). В этом случае для молекул из области D_1 получаем

$$(15) \quad Z(x_\Omega, y_\Omega, C_\perp, \varphi) = 0, \quad x_\Omega \cos \varphi + y_\Omega \sin \varphi < 0;$$

для молекул из области D_2

$$(16) \quad Z(\pm a/2, y, C_\perp, \varphi) = 0, \quad \pm \cos \varphi < 0,$$

$$(17) \quad Z(x, \pm 1/2, C_\perp, \varphi) = 0, \quad \pm \sin \varphi < 0,$$

$$(18) \quad Z(x_\Omega, y_\Omega, C_\perp, \varphi) = 0, \quad x_\Omega \cos \varphi + y_\Omega \sin \varphi > 0,$$

где $x_\Omega^2 + y_\Omega^2 = R^2$.

В силу симметрии сечения канала относительно координатных осей в конфигурационном пространстве рассматриваем точку $M(x, y)$, расположенную в

первом квадранте. Точки пересечения касательных к окружности, проведенных через $M(x, y)$, с границей Ω_r обозначим A и B , а угол между касательными — 2α . Возможные расположения касательных AM и BM представлены на рис. 2. Решая систему уравнений характеристик [21] для уравнения (12) с учетом граничных условий (15)–(18) и того факта, что $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$, находим функцию $Z(x, y, C_{\perp}, \varphi)$

$$(19) \quad Z(x, y, C_{\perp}, \varphi) = \frac{w(x, y, \varphi)}{C_{\perp}}.$$

Для молекул из области D_1 функция $w(x, y, \varphi)$ имеет вид

$$(20) \quad w_1(x, y, \varphi) = -x \cos \varphi - y \sin \varphi - \operatorname{sgn}(\cos \varphi) \sqrt{R^2 - (x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2}.$$

Для молекул из области D_2 при выполнении условия $\chi \leq \varphi \leq \chi + 2\alpha$, где углы α и χ определяются выражениями

$$(21) \quad \alpha = \arctan \left(\frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}} \right), \quad \chi = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) - \alpha + 2\pi,$$

траектории молекул пересекаются с границей Ω и они претерпевают отражение от этой границы. В этом случае функции $w(x, y, \varphi)$ имеет вид

$$(22) \quad w_2(x, y, \varphi) = -x \cos \varphi - y \sin \varphi + \operatorname{sgn}(\cos \varphi) \sqrt{R^2 - (x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2}.$$

При отражении молекул от верхней части границы Ω_r получаем $w = w_3$:

$$(23) \quad w_3(x, y, \varphi) = -\frac{2y-1}{2 \sin \varphi}, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \min(\varphi_1, \chi);$$

при отражении молекул от левой части этой границы $w = w_4$:

$$(24) \quad w_4(x, y, \varphi) = -\frac{2x+a}{2 \cos \varphi},$$

$$(25) \quad \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, & \text{если } \chi > \varphi_2 \text{ (рис. 2 (a))}, \\ \varphi_1 \leq \varphi \leq \chi, & \text{если } (\varphi_1 < \chi < \varphi_2) \wedge (\chi + 2\alpha > \varphi_2) \text{ (рис. 2 (b), (c))}, \\ (\varphi_1 \leq \varphi \leq \chi) \vee (\chi + 2\alpha \leq \varphi \leq \varphi_2), & \text{если } \chi + 2\alpha < \varphi_2 \text{ (рис. 2 (d))}; \end{cases}$$

при отражении молекул от нижней части $w = w_5$:

$$(26) \quad w_5(x, y, \varphi) = -\frac{2y+1}{2 \sin \varphi},$$

$$(27) \quad \begin{cases} \chi + 2\alpha \leq \varphi \leq \varphi_3, & \text{если } \varphi_2 < \chi + 2\alpha < \varphi_3 \text{ (рис. 2 (b), (e))}, \\ (\varphi_2 \leq \varphi \leq \chi) \vee (\chi + 2\alpha \leq \varphi \leq \varphi_3), & \text{если } \chi > \varphi_2 \text{ (рис. 2 (a))}; \end{cases}$$

при отражении молекул от правой части $w = w_6$:

$$(28) \quad w_6(x, y, \varphi) = -\frac{2x-a}{2 \cos \varphi},$$

$$(29) \quad \begin{cases} \varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4, & \text{если } \chi + 2\alpha < \varphi_3 \text{ (рис. 2 (a), (b), (d), (e))}, \\ \chi + 2\alpha \leq \varphi \leq \varphi_4, & \text{если } \chi + 2\alpha > \varphi_3 \text{ (рис. 2 (c), (f))}. \end{cases}$$

Здесь значения углов φ_k определяем, следуя [3], [7] ($k = \overline{0, 4}$):

$$(30) \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{2y-1}{2x-a} + \pi, \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{2y-1}{2x+a} + 2\pi, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{2y+1}{2x+a} + 2\pi,$$

$$(31) \quad \varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{2y+1}{2x-a} + 3\pi, \quad \varphi_4 = \operatorname{arctg} \frac{2y-1}{2x-a} + 3\pi.$$

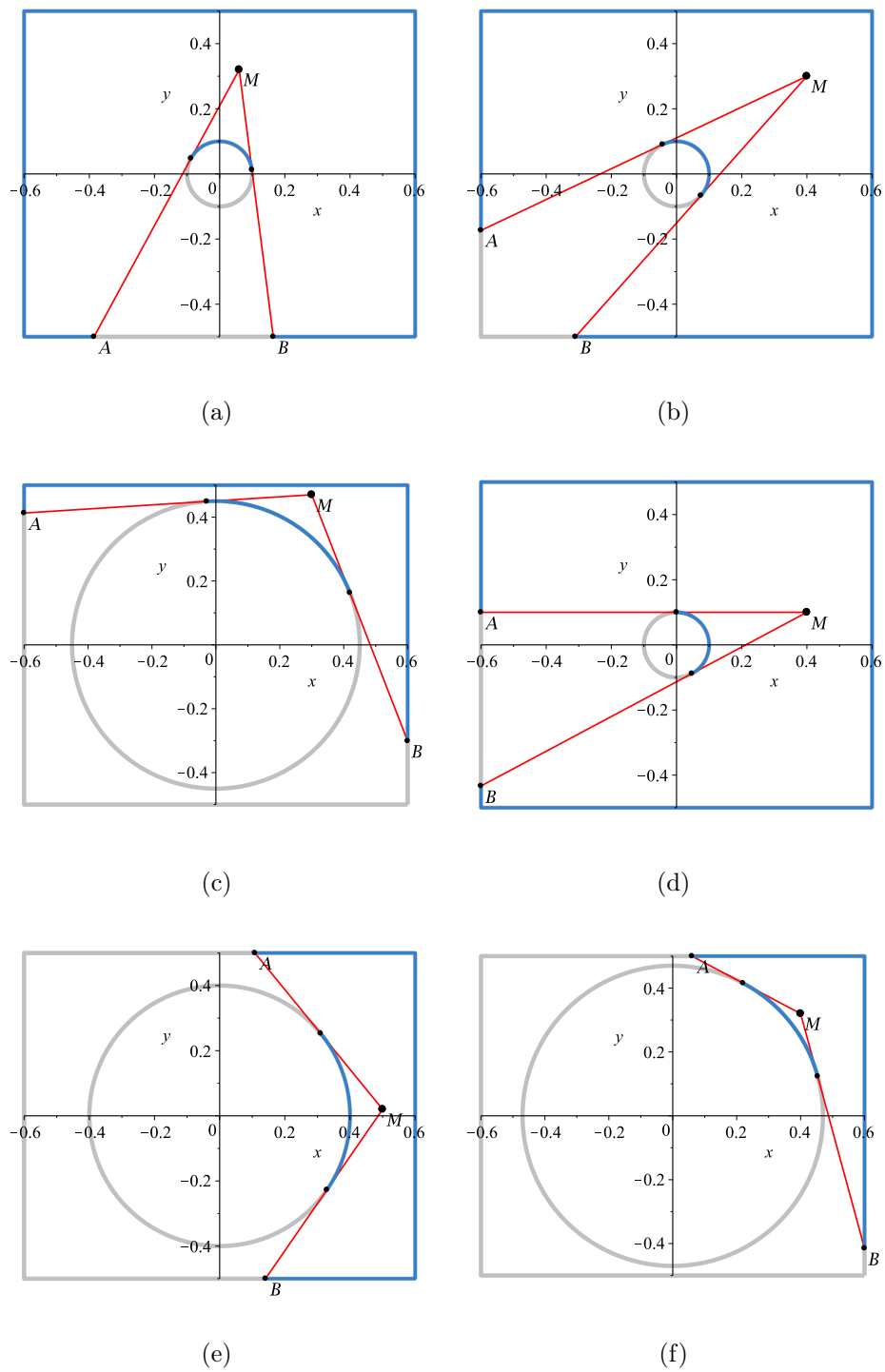


Рис. 2. Границы отражения в зависимости от положения точки M в D_2 и радиуса канала

Подставляя равенство (11) с учетом (5) и (13) в (4), приходим к следующему выражению для компоненты массовой скорости:

$$(32) \quad U_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(z)} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\perp} C_z f_0(C) (1 + G_p z + C_z G_p Z(x, y, C_{\perp}, \varphi)) dC_z dC_{\perp} d\varphi.$$

Интегралы от первых двух слагаемых в (32) с учетом вида абсолютного максвеллиана

$$f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C_z^2 - C_{\perp}^2),$$

являются нечетными по C_z , следовательно они равны нулю. Таким образом, только последнее слагаемое в выражении для функции распределения (11) дает вклад в интеграл (32). Тогда, ограничиваясь линейными членами относительно G_p в (32), получаем

$$(33) \quad U_z(x, y) = \frac{G_p}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_z^2 Z(x, y, C_{\perp}, \varphi) d^3 \mathbf{C}.$$

Аналогичные действия производим для восстановления компоненты вектора потока тепла

$$(34) \quad q_z(x, y) = \frac{G_p}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) \left(C^2 - \frac{5}{2}\right) C_z^2 Z(x, y, C_{\perp}, \varphi) d^3 \mathbf{C}.$$

Для молекул из области D_1 сделаем замену переменных $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$ в интеграле (34). Из определения (19), (20) функции $Z(x, y, C_{\perp}, \varphi)$ в этой области при $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$ находим компоненту вектора потока тепла $q_z(\rho, t)$

$$(35) \quad q_z(\rho, t) = -\frac{G_p}{8\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(\cos \varphi) \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2(\varphi - t)} d\varphi.$$

Интеграл $I_{1,1}$ в выражении потока тепла (6) имеет значение $2\sqrt{\pi} G_p R^3/3$.

Для молекул из области D_2 , подставляя (19), (21)–(28) в (34), приходим к выражению

$$(36) \quad q_z(x, y) = \frac{G_p}{8\sqrt{\pi}} \int_{\pi}^{3\pi} w(x, y, \varphi) d\varphi.$$

Обозначим интеграл в (36) как $W(x, y)$. Тогда для точек $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$ имеем

$$(37) \quad W = \begin{cases} W_1 + W_2 + W_3 + W_4, & (\chi \leq \varphi_1) \wedge (\chi + 2\alpha \leq \varphi_3), \\ W_1 + W_2 + W_5, & (\chi \leq \varphi_1) \wedge (\chi + 2\alpha \geq \varphi_3), \\ W_1 + W_4 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9, & \chi + 2\alpha \leq \varphi_2, \\ W_1 + W_3 + W_4 + W_6 + W_7, & (\varphi_1 \leq \chi \leq \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \leq \chi + 2\alpha \leq \varphi_3), \\ W_1 + W_5 + W_6 + W_7, & (\varphi_1 \leq \chi) \wedge (\varphi_3 \leq \chi + 2\alpha), \\ W_1 + W_3 + W_4 + W_6 + W_{10} + W_{11}, & \varphi_2 \leq \chi, \end{cases}$$

где функции W_k определяются интегралами, которые вычисляются аналитически при ($k = 2, 11$):

$$(38) \quad W_1 = -2R + \int_{\chi}^{\chi+2\alpha} \operatorname{sgn}(\cos \varphi) \sqrt{R^2 - (x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2} d\varphi,$$

$$(39) \quad W_2 = \int_{\varphi_0}^{\chi} w_3 d\varphi, \quad W_3 = \int_{\chi+2\alpha}^{\varphi_3} w_5 d\varphi, \quad W_4 = \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} w_6 d\varphi, \quad W_5 = \int_{\chi+2\alpha}^{\varphi_4} w_6 d\varphi,$$

$$(40) \quad W_6 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} w_3 d\varphi, \quad W_7 = \int_{\varphi_1}^{\chi} w_4 d\varphi, \quad W_8 = \int_{\chi+2\alpha}^{\varphi_2} w_4 d\varphi, \quad W_9 = \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} w_5 d\varphi,$$

$$(41) \quad W_{10} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} w_4 d\varphi, \quad W_{11} = \int_{\varphi_2}^{\chi} w_5 d\varphi.$$

Значения J_M/G_p вычислены согласно (6) с применением системы компьютерной алгебры Maple 17 на основе алгоритма, приведенного в [22], и представлены в таблице 1 при различных значениях радиуса кругового цилиндра и размеров прямоугольного канала.

ТАБЛИЦА 1. Значения $-J_M/G_p$ при различных значениях a и R

$a = a'/b'$	$R = R'/b'$								
	0					0.1	0.2	0.4	0.5
	(6)	[4]	[5]	[6]	[7]	(6)	(6)	(6)	(6)
1.00	0.8387	0.837	0.8387	0.839	0.8372	0.7003	0.5329	0.2515	0.2244
1.10	0.8792	—	—	—	—	0.7417	0.5753	0.2823	0.2319
2.00	1.1525	1.150	—	1.152	1.1496	1.0215	0.8667	0.5633	0.4606
5.00	1.6179	—	—	—	—	1.4954	1.3615	1.1080	1.0183
10.0	1.9908	1.978	1.991	—	1.9767	1.8726	1.7504	1.5334	1.4637
20.0	2.3727	2.344	2.373	—	—	2.2572	2.1427	1.9518	1.8979
100	3.2732	—	—	—	1.9767	3.1607	3.0545	2.8930	2.8582

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Соотношения (6) определяют потоки тепла и массы газа через поперечное сечение канала при произвольных значениях радиуса кругового цилиндра и размеров прямоугольного канала под действием постоянного градиента давления. Из анализа выражений (34) и (32) следует, что

$$(42) \quad U_z(x, y) = -2q_z(x, y), \quad J_M = -2J_Q,$$

что согласуется с соотношениями для потоков массы газа и тепла в свободномолекулярном режиме, приведенными в [20]. В случае если $R = 0$, то выражение

(6) для J_Q принимает вид:

$$(43) \quad J_Q = \frac{G_p}{2\sqrt{\pi}} \left(\ln(\sqrt{a^2+1} + a) + a \ln \left(\sqrt{\frac{1}{a^2} + 1} + \frac{1}{a} \right) - \frac{a}{3(1 + \sqrt{a^2+1})} - \frac{a}{3(a + \sqrt{a^2+1})} \right).$$

При этом для $a \gg 0$ выражение (43) имеет логарифмическую особенность

$$(44) \quad J_Q = G_p \ln(2a)/(2\sqrt{\pi}) + G_p/(4\sqrt{\pi}).$$

Выражения (43) и (44) совпадают с аналогичными результатами, полученными в [3], [5] для прямоугольного канала, причем выражение (44) согласуется с результатом, приведенным в [20] для каналов с бесконечными параллельными стенками в свободномолекулярном режиме. Из анализа представленных в таблице значений и соотношения (42) видно, что появление внутреннего кругового цилиндрического элемента в канале приводит к уменьшению значений потоков тепла и массы по абсолютной величине в канале.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в рамках кинетического подхода решена задача о переносе тепла и массы в разреженном газе в прямоугольном канале при наличии внутреннего кругового цилиндрического элемента под действием постоянного градиента давления. Получены выражения теплового и массового потоков как функции от градиента давления. Для различных значений радиуса кругового цилиндра и размеров прямоугольного канала вычислены значения потоков тепла и массы через поперечное сечение канала. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными для прямоугольного канала и каналов с бесконечными параллельными стенками. Показано, что наличие внутреннего кругового цилиндрического элемента в канале приводит к уменьшению значений потоков тепла и массы по абсолютной величине в канале.

REFERENCES

- [1] J. Kim, A. J. H. Frijns, S. V. Nedea, A. A. A. Steenhoven, *Geometry effects on rarefied nanochannel flows*, *Microfluid Nanofluid*, **15** (2013), 661–673.
- [2] V. A. Titarev, E. M. Shakhov, *Nonisothermal gas flow in a long channel analyzed on the basis of the kinetic S-Model*, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50:12** (2010), 2131–2144. MR2760083
- [3] O.V. Germider, V.N. Popov *Mathematical modeling of heat transfer process in a rectangular channel in the problem of Poiseuille flow*, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **13** (2016), 1401–1409. MR3592224
- [4] I. Graur, M.T. Ho, *Rarefied gas flow through a long rectangular channel of variable cross section*, *Vacuum*, **101** (2014), 328–332.
- [5] F.M. Sharipov, *Rarefied gas flow through a long rectangular channel*, *J. Vac. Sci. Technol. A*, **17:5** (1999), 3062–3066.
- [6] S. Pantazis, S. Varoutis, V. Hauer, C. Day, D. Valougeorgis, *Gas-surface scattering effect on vacuum gas flows through rectangular channels*, *Vacuum*, **85** (2011), 1161–1164.
- [7] V. A. Titarev, E. M. Shakhov, *Kinetic analysis of the isothermal flow in a long rectangular microchannel*, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. **50:7** (2010), 1221–1237. MR2760452

- [8] S. Boutebba, W. Kaabar, *Slip flow and heat transfer through a rarefied nitrogen gas between two coaxial cylinders*, J. Chem. Pharm. Res., **8**:8 (2016), 495–501.
- [9] O.V. Germider, V.N. Popov, *Mathematical modelling of the mass transfer process between two coaxial cylinders in the problem of thermal creep*, /IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, **158** (2016), 1–7.
- [10] P. Taheri, H. Struchtrup, *Poiseuille flow of moderately rarefied gases in annular channels*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **55** (2012), 1291–1303. Zbl 1262.80057
- [11] I. Graur, F. Sharipov, *Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction*, European Journal of Mechanics B Fluids, **27** (2008), 335–345. Zbl 1154.76376
- [12] I. Graur, F. Sharipov, *Non-isothermal flow of rarefied gas through a long pipe with elliptic cross section*, Microfluid Nanofluid. **6** (2009), 267–275.
- [13] O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushkanov, *Heat transfer process in an elliptic channel*, Matem. Mod., **29**:1 (2017), 84–94.
- [14] V.A. Rykov, V. A. Titarev, E. M. Shakhov, *Rarefied poiseuille flow in elliptical and rectangular tubes*, Fluid Dyn. , **46**:3 (2011), 456–466. MR3377012
- [15] O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushkanov, *Computation of the heat flux in a cylindrical duct within the framework of the kinetic approach*, J. Eng. Phys. Thermophy, **89**:5 (2016), 1338–1343.
- [16] C.E. Siewert, D. Valougeorgis, *An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf., **72** (2002), 531–550.
- [17] C.H. Kamphorst, P. Rodrigues, L.B. Barichello, *A Closed-Form Solution of a Kinetic Integral Equation for Rarefied Gas Flow in a Cylindrical Duct*, Applied Mathematics, **5** (2014), 1516–1527.
- [18] A.V. Proskurin, A.M. Sagalakov, *Modeling Duct Flow by the R-Function Method*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **10**:3 (2016), 429–434. MR3588954
- [19] M. N. Kogan, *Rarefied gas dynamics. Kinetic theory*. Moscow, Nauka, 1967. Zbl 0173.28301
- [20] F.M. Sharipov, V.D. Seleznev, *Motion of rarefied gases in channels and microchannels*, Yekaterinburg, UrO RAN, 2008.
- [21] P. Courant, *Partial Differential Equations*, Moscow, Mir, 1964. MR0180738
- [22] J. Bernstein, T.O. Espelid, A. Genz, *Algorithm 698: DCUHRE: an adaptive multidimensional integration routine for a vector of integrals*, ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), **17** (1991), 452–456. MR1140035

OKSANA VLADIMIROVNA GERMIDER
 NORTHERN ARCTIC FEDERAL UNIVERSITY NAMED AFTER M. V. LOMONOSOV,
 SEVERNAYA DVINA EMB., 4,
 163002, ARKHANGELSK, RUSSIA
E-mail address: o.germider@narfu.ru

VASILY NIKOLAEVICH POPOV
 NORTHERN ARCTIC FEDERAL UNIVERSITY NAMED AFTER M. V. LOMONOSOV,
 SEVERNAYA DVINA EMB., 4,
 163002, ARKHANGELSK, RUSSIA
E-mail address: v.popov@narfu.ru