S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 528–532 (2017) УДК 512.56
DOI 10.17377/semi.2017.14.043 MSC 06B25

О БЕСКОНЕЧНОСТИ СВОБОДНОЙ 3-ПОРОЖДЕННОЙ РЕШЕТКИ С ОДНИМ ЛЕВОМОДУЛЯРНЫМ ПОРОЖДАЮЩИМ

М.П .ШУШПАНОВ

Abstract. We consider the free lattice generated by three elements one of which is left modular. We prove that the lattice is infinite.

Keywords: free lattice, left modular element, right modular element.

Свободные решётки, порождающие элементы которых подчинены тем или иным условиям, – классические объекты в общей теории решеток (см., например, [1]). Наиболее популярными условиями являются свойства, близкие к модулярности. В определении этих свойств мы пользуемся современной терминологией из [2].

Определение 1. *Элемент a решётки L называется левомодулярным, если*

$$\forall x, y \in L : x \leq y \to x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge y.$$

Определение 2. *Элемент a решётки L называется правомодулярным, если*

$$\forall x, y \in L : x \leq a \to x \vee (y \wedge a) = (x \vee y) \wedge a.$$

Двойственно определяется *коправомодулярный* элемент.

Заметим, что эти определения получены по аналогии с определениями нейтрального, стандартного и дистрибутивного элементов решётки, только вместо тождества дистрибутивности используется квазитождество модулярности.

Shushpanov, M.P., On infinity of the free 3-generated lattice with one left modular generator.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках проекта повышения конкурентоспособности (Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

Поступила 6 февраля 2017 г., опубликована 30 мая 2017 г.

Левомодулярные, правомодулярные и коправомодулярные элементы (под разными названиями) изучались в [3, 4, 5, 6, 7]. Справедливы следующие леммы, дающие эквивалентные определения этим элементам и показывающие, в частности, возможность их определения на базе подходящих тождеств.

Лемма 1 ([3]). *а) Элемент a решётки L левомодулярен тогда и только тогда, когда*

$$\forall x, y \in L : (a \vee (x \wedge y)) \wedge (x \vee y) = (a \wedge (x \vee y)) \vee (x \wedge y).$$

б) Элемент a решётки L левомодулярен тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y : (x \leq y) \& (a \wedge x = a \wedge y) \& (a \vee x = a \vee y) \to x = y.$$

Лемма 2 ([4]). *Элемент a решётки L правомодулярен тогда и только тогда, когда*

$$\forall x, y \in L : a \wedge (x \vee (y \wedge a)) = ((a \wedge x) \vee y) \wedge a.$$

В [5] элемент решётки назван *вполне модулярным*, если он левомодулярен, правомодулярен и коправомодулярен одновременно. В [6] найдены все тройки порождающих элементов, обладающих определёнными выше свойствами или их комбинациями, для которых свободная решетка, порождённая любой такой тройкой, изоморфна свободной модулярной решётке ранга 3. А именно, доказано, что 3-порождённая решетка модулярна в следующих трёх случаях (а также во всех более сильных):

1. Если один из порождающих вполне модулярен, а другой левомодулярен.

2. Если один из порождающих вполне модулярен, а среди двух других есть хотя бы один правомодулярный и хотя бы один коправомодулярный (возможно, один и тот же).

3. Если все три порождающих элемента левомодулярны.

В каждом случае требовалось наличие хотя бы одного левомодулярного элемента среди порождающих. В [7] показано, что свободная решётка, порождённая элементами a, x и y, где a левомодулярен и выполняется соотношение $x \vee (y \wedge a) = y \vee (x \wedge a)$, является конечной и содержит ровно 17 элементов (при этом не является модулярной). Возникает вопрос о конечности свободной 3-порождённой решётки с одним левомодулярным порождающим без дополнительных определяющих соотношений. Ответ на него вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Свободная 3-порождённая решетка, у которой один из порождающих левомодулярен и правомодулярен, а два другие одновременно правомодулярны и коправомодулярны, бесконечна.*

Свободной решеткой с порождающими элементами, обладающими заданными свойствами, естественно называть решетку F, порожденную множеством X, некоторые элементы которого обладают какими-либо заданными свойствами (не обязательно одними и теми же для разных элементов), и удовлетворяющую следующему условию: если φ – некоторое отображение множества X в решетку L, причём для каждого элемента $x \in X$ образ $\varphi(x)$ обладает теми же свойствами, что и элемент x, то φ продолжается до гомоморфизма решётки F в решетку L.

Для рассматриваемых нами свойств существование соответствующей свободной решётки вытекает из следующего простого наблюдения. Лемма 1, Лемма 2, а также двойственное утверждение к Лемме 2 сопоставляют свойствам левомодулярности, правомодулярности и коправомодулярности подходящие тождества. Решетка F может быть определена как решетка с множеством образующих X и совокупностью (вообще говоря, бесконечной) определяющих соотношений, полученных для каждого элемента из X, обладающего заданным свойством, путём подстановки в соответствующее тождество вместо переменных, связанных квантором всеобщности, значений произвольных решеточных многочленов от элементов из множества X (фактически представляющих все элементы решётки F).

Рассмотрим последовательность конечных решеток L_n. На рисунке 1 изображены решётки L_1 и L_2, а на рисунке 2 представлена решетка L_n.

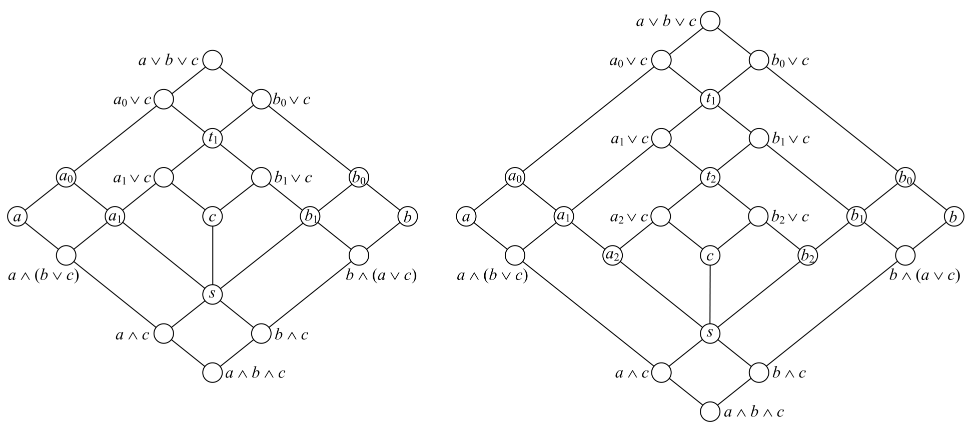

Рис. 1

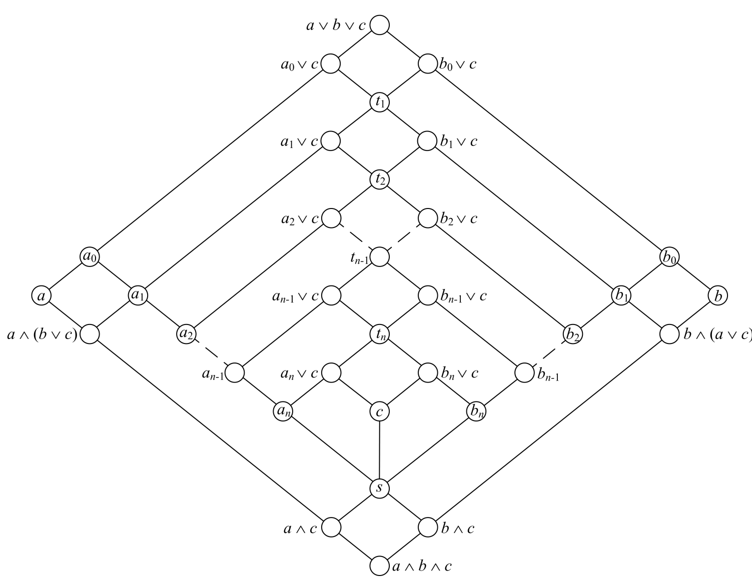

Рис. 2

Отметим свойства порождающих элементов этих решеток.

Лемма 3. *Элемент a правомодулярен в L_n.*

Доказательство. По определению достаточно проверить импликацию

$$\forall x, y \in L : x < a \to x \vee (y \wedge a) = (x \vee y) \wedge a.$$

Импликация автоматически выполнена, если x и y сравнимы.

Если $x = a \wedge c$, то в проверке нуждается только случай $y \in [b \wedge c; b]$. Тогда, с одной стороны, $x \leq x \vee (y \wedge a) \leq x \vee (b \wedge a) = x$. С другой стороны, $x = x \wedge a \leq (x \vee y) \wedge a \leq (x \vee b) \wedge a = b_0 \wedge a = x$.

Если $x = a \wedge (b \vee c)$, то в проверке нуждается только случай $y \in [b \wedge c; b_1 \vee c] \cup [b; b_0]$. Тогда $y \wedge a \leq (b_1 \vee c) \wedge a = a \wedge c$ или $y \wedge a \leq b_0 \wedge a = a \wedge c$; $x \vee y \leq x \vee (b_0 \vee c) \leq b_0 \vee c$. С одной стороны, $x \leq x \vee (y \wedge a) \leq x \vee (a \wedge c) = x$. С другой стороны, $x = x \wedge a \leq (x \vee y) \wedge a \leq (b_0 \vee c) \wedge a = a \wedge (b \vee c) = x$. □

Лемма 4. *Элемент a коправомодулярен в L_n.*

Доказательство. По определению достаточно проверить импликацию

$$\forall x, y \in L : a < x \to x \wedge (y \vee a) = (x \wedge y) \vee a.$$

Импликация автоматически выполнена, если x и y сравнимы.

Если $x = a_0 \vee c$, то в проверке нуждается только случай $y \in [b; b_0 \vee c]$. Тогда, с одной стороны, $x = x \wedge (b \vee a) \leq x \wedge (y \vee a) \leq x$. С другой стороны, $x = (b \wedge (a \vee c)) \vee a = (x \wedge b) \vee a \leq (x \wedge y) \vee a \leq x \vee a = x$.

Если $x = a_0$, то в проверке нуждается только случай $y \in [c, b_0 \vee c] \cup [b_n; b_0] \cup [b \wedge (a \vee c); b]$. Тогда $y \vee a \geq c \vee a = a_0 \vee c$, или $y \vee a \geq b_n \vee a = a_0 \vee c$, или $y \vee a \geq (b \wedge (a \vee c)) \vee a = a_0 \vee c; x \wedge y \geq x \wedge (b \wedge c) = b \wedge c$. С одной стороны, $x = x \wedge (a_0 \vee c) \leq x \wedge (y \vee a) \leq x$. С другой стороны, $x = (b \wedge c) \vee a \leq (x \wedge y) \vee a \leq x \vee a = x$. □

Лемма 5. *Элемент c левомодулярен в L_n.*

Доказательство. По Лемме 1 элемент c решётки L левомодулярен тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y : (x \leq y) \& (c \wedge x = c \wedge y) \& (c \vee x = c \vee y) \to x = y.$$

Импликация автоматически выполнена, если x или y сравнимы с c.

Если $x = a_i$ для некоторого i, то $(x \leq y) \& (c \wedge x = c \wedge y)$ даёт $y = a_j$ для некоторого $j \leq i$. Теперь $c \vee x = c \vee y$ в том и только том случае, когда $a_i = a_j$, т.е. $x = y$.

Если $x = a$, то $(x \leq y) \& (c \wedge x = c \wedge y)$ даёт $y = a = x$.

Если $x = a \wedge (b \vee c)$, то $(x \leq y) \& (c \wedge x = c \wedge y)$ даёт $y \in [a \wedge (b \vee c); a]$. Теперь $c \vee x = c \vee y$ в том и только том случае, когда $x = y$.

В силу равноправия элементов a и b в решётке L_n приведённых проверок достаточно. □

Лемма 6. *Элемент c правомодулярен в L_n.*

Доказательство. По определению достаточно проверить импликацию

$$\forall x, y \in L : x < c \to x \vee (y \wedge c) = (x \vee y) \wedge c.$$

Импликация автоматически выполнена, если x и y сравнимы.

Если $x = s$, то в силу равноправия элементов a и b в решётке L_n в проверке нуждается только случай $y \in [a \wedge (b \vee c); a]$. Тогда $y \wedge c = a \wedge c$ и $x \vee (y \wedge c) = x$. Вместе с этим, $x = x \wedge c \leq (x \vee y) \wedge c \leq (x \vee a) \wedge c = a_0 \wedge c = x$.

Если $x = b \wedge c$, то в проверке снова нуждается только случай $y \in [a \wedge (b \vee c); a]$. Тогда $y \wedge c = a \wedge c$ и $x \vee (y \wedge c) = s$. Вместе с этим, $s = (x \vee (a \wedge c)) \wedge c \leq (x \vee y) \wedge c \leq (x \vee a) \wedge c = a_0 \wedge c = s$.

В силу равноправия элементов a и b в решётке L_n приведённых проверок достаточно. $\square$

Доказательство Теоремы 1. Обозначим через F свободную 3-порождённую решетку, у которой один из порождающих левомодулярен и правомодулярен, а два другие одновременно правомодулярны и коправомодулярны.

Заметим теперь, что для элементов решётки L_n справедливы соотношения

$a_0 = a \vee (b \wedge c)$;

$b_0 = b \vee (a \wedge c)$;

$a_i = (b_{i-1} \vee c) \wedge a_0$, где $1 \leq i \leq n$;

$b_i = (a_{i-1} \vee c) \wedge b_0$, где $1 \leq i \leq n$;

$s = a_0 \wedge b_0$;

$t_i = (a_{i-1} \vee c) \wedge (b_{i-1} \vee c)$, где $1 \leq i \leq n$.

Это означает, что решетка L_n порождена элементами a, b, c. Ввиду лемм $3 - 6$ и равноправия элементов a и b в решётке L_n получаем, что L_n является 3-порожденной решёткой, у которой порождающий c левомодулярен и правомодулярен, а порождающие a и b одновременно правомодулярны и коправомодулярны. Следовательно, она является гомоморфным образом решетки F. Однако решетка L_n содержит $5(n + 2) + 4$ элементов, поэтому решетка F не может быть конечной, что и доказывает Теорему 1. $\square$

Автор выражает благодарность А. Г. Гейну за постановку задачи и полезные обсуждения.

References

[1] G.Grätzer, *Lattice Theory: Foundation*, Springer Science & Business Media, 2011. MR2768581

[2] M.Stern, *Semimodular Lattices. Theory and Applications*, Cambridge University Press, 1999. Zbl 0957.06008

[3] O.Ore, *On the theorem of Jordan-Holder*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 266–275. MR1501901

[4] S.P.Bhatta, *A characterization of neutral elements by the exclusion of sublattices*, Discrete Math., **309**:6 (2009), 1691–1702. MR2510576

[5] A.G.Gein, M.P.Shushpanov, *Finitely generated lattices with completely modular elements among generators*, Algebra and Logic, **52**:6 (2014), 435–441. MR3242615

[6] A.G.Gein, M.P.Shushpanov, *Sufficient conditions for the modularity of the lattice generated by elements with properties of modular type*, Sibirian Mathematical Journal, **56**:4 (2015), 631–636. MR3492872

[7] S.P.Bhatta, *On the Problem of Characterizing Standard Elements by the Exclusion of Sublattices*, Order, **28** (2011), 565—576. MR2851366

Mikhail Pavlovich Shushpanov
Ural Federal University,
19, Mira str
620002, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: `Mikhail.Shushpanov@gmail.com`