S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 533–551 (2017) УДК 517.575

DOI 10.17377/semi.2017.14.046 MSC 35B30

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА НА СФЕРЕ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.В. КАРАЧИК

Abstract. Identities for the integrals over the unit sphere of the products of linear combinations of normal derivatives of polyharmonic function in the unit ball and homogeneous harmonic polynomials are obtained. Basing on these identities the necessary conditions for the values on the unit sphere of polynomials on normal derivatives of polyharmonic functions are derived. Illustrative examples are given.

Keywords: polyharmonic functions, higher order normal derivatives, integral identities on the sphere.

1. Введение

Хорошо известно (см. например, [1, пример 1]), что для гармонической в единичном шаре $S \subset \mathbb{R}^n$ функции $u \in C^m(\bar{S})$ справедливо равенство

$$\int_{\partial S} \frac{\partial^m u}{\partial \nu^m}\, ds_x = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Кроме того, при исследовании значений нормальных производных высокого порядка от полигармонических функций на единичной сфере в виде $\varphi(s) = Q(\frac{\partial}{\partial \nu})u|_{\partial S}$, где $Q(t)$ – полином [2, 3, 4] возникают интегральные условия на функцию $\varphi(s)$, похожие на условие (1). В работах [5, 6] исследовано свойство

Karachik, V.V., Integral identities on a sphere for normal derivatives of polyharmonic functions.

The work was supported by Act 211 Government of the Russian Federation, contract № 02.A03.21.0011.

Поступила 16 декабря 2016 г., опубликована 2 июня 2017 г.

среднего для полигармонических функций и получены некоторые результаты, на основании которых выполнено настоящее исследование. Отметим работу [7], где исследовано граничное поведение компонент полигармонических функций. В [8] свойство среднего для полигармонических функций использованы для вычисления интегралов по сфере. В настоящей работе выясняется какие еще равенства вида (1) могут иметь место для нормальных производных от k-гармонических в S функций $u(x)$, т.е. таких функций, для которых $\Delta^k u = 0$ в S.

Работа устроена следующим образом. В разделе 2 приводятся вспомогательные сведения и результаты. В разделе 3 на основании вспомогательных утверждений из лемм 1-4, в теоремах 1 и 2, получены тождества для интегралов по единичной сфере ∂S от функций вида $P_m(\frac{\partial}{\partial\nu})u$, где $\frac{\partial}{\partial\nu}$ – внешняя нормальная производная, $P_m(t)$ – некоторый полином, а u – полигармоническая функция в единичном шаре S. В теореме 3 полученные тождества упрощаются. В следствии 2 найдены условия, которым должны удовлетворять интегралы от функций вида $\varphi(s) = Q(\frac{\partial}{\partial\nu})u|_{\partial S}$, где $Q(t)$ – полином. В теореме 4 раздела 4 получены другие тождества для интегралов по единичной сфере от функций вида $H_l(x)P_m(\frac{\partial}{\partial\nu})u$, где $H_l(x)$ – однородный гармонический полином степени l. В теореме 5, основанной на леммах 5-7 эти тождества упрощаются. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы в примерах 1-5.

2. Вспомогательные результаты

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим дифференциальный оператор Λ вида

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

В работе [9] установлено следующее равенство

$$P_m\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)u = P_{[m]}(\Lambda)u, \tag{2}$$

справедливое на единичной сфере $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, где ν – внешняя нормаль к ∂S. Кроме этого, известно (см. например [3]), что если u – гармоническая функция в области D, то функция $P(\Lambda)u$ тоже гармоническая в D.

Пусть $P_m(t) = \sum_{k=0}^{m} p_k t^k$ – некоторый полином степени m с действительными коэффициентами $p_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, m$. Линейное пространство таких полиномов обозначим $\mathcal{P}$. Рассмотрим факториальную степень переменной t порядка k в виде $t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1)$, причем $t^{[0]} \equiv 1$. Введем факториальный полином, соответствующий полиному $P_m(t)$ равенством

$$P_{[m]}(t) = \sum_{k=0}^{m} p_k t^{[k]}.$$

Рассмотрим линейное отображение $\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, задаваемое в виде $\Phi[P_m(t)] = P_{[m]}(t)$.

Лемма 1. *Отображение $\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ — изоморфизм.*

Доказательство. Очевидно, что Φ — линейное отображение: $\Phi[\lambda t^m + \mu t^k] = \lambda t^{[m]} + \mu t^{[k]} = \lambda\Phi[t^m] + \mu\Phi[t^k]$. Докажем биективность Φ.

Сюръективность. Пусть отображение Φ не сюръективно, а $P_m(t) \in \mathcal{P}$ – полином наименьшей степени не имеющий прообраза. Рассмотрим полином вида $Q_{m-1}(t) = P_m(t) - p_m t^{[m]}$. Очевидно, что он имеет степень $m-1$, а значит, по предположению, имеет прообраз $R_{m-1}(t) \in \Phi^{-1}[Q_{m-1}(t)]$, т.е. $\Phi[R_{m-1}(t)] = R_{[m-1]}(t) = Q_{m-1}(t)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
P_m(t) = p_m t^{[m]} + Q_{m-1}(t) = p_m t^{[m]} + R_{[m-1]}(t) \\
= p_m t^{[m]} + \sum_{k=0}^{m-1} r_k t^{[k]} = \Phi\Big[p_m t^m + \sum_{k=0}^{m-1} r_k t^k\Big],
\end{aligned}
$$

а значит полином $P_m(t)$ имеет прообраз $p_m t^m + \sum_{k=0}^{m-1} r_k t^k$. Противоречие.

Инъективность. Пусть $\Phi[P_m(t)] = \Phi[Q_n(t)]$, т.е. $P_{[m]}(t) = Q_{[n]}(t)$ и l – наибольший индекс, при котором $p_l \neq q_l$, где p_k и q_k – коэффициенты полиномов $P_m(t)$ и $Q_n(t)$, соответственно. Тогда верно равенство

$$
(p_l - q_l)t^{[l]} = -\sum_{k=0}^{l-1}(p_k - q_k)t^{[k]},
$$

но это невозможно, поскольку слева стоит полином l-й степени со старшим коэффициентом $p_l - q_l \neq 0$, а справа – полином $(l-1)$-й степени. □

3. Интегральные тождества на единичной сфере

Теорема 1. *Для того, чтобы для любой k-гармонической в S функции $u \in C^m(\bar{S})$ выполнялось равенство*

$$
\int_{\partial S} P_m\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big) u \, ds_x = 0 \tag{3}
$$

необходимо и достаточно, чтобы полином $\Phi[P_m](\lambda) = P_{[m]}(\lambda)$ имел корни вида $\lambda = 2i$ при $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$
\int_{\partial S} P_m\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big) u \, ds_x = 0
$$

для любой k-гармонической в S функции $u \in C^m(\bar{S})$. В силу равенства (2) будем иметь $\int_{\partial S} P_{[m]}(\Lambda) u \, ds_x = 0$. Выберем в качестве $u(x)$ следующую k-гармоническую функцию $u(x) = |x|^{2i} v(x)$, где $v(x)$ – гармоническая в S функция $v \in C^m(\bar{S})$ и $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Тогда

$$
\int_{\partial S} P_{[m]}(\Lambda) \Big(|x|^{2i} v(x)\Big) \, ds_x = 0. \tag{4}
$$

Нетрудно видеть, что в S верно равенство

$$
(\Lambda - \lambda_1)\Big(|x|^{2i} v(x)\Big) = |x|^{2i}\big((2i - \lambda_1)v(x) + \Lambda v(x)\big), \tag{5}
$$

где λ_1 – некоторое комплексное число. Тогда, поскольку функция Λv – гармоническая в S, то аналогично (5) будем иметь

$$
\begin{aligned}
(\Lambda - \lambda_2)(\Lambda - \lambda_1)\Big(|x|^{2i} v(x)\Big) \\
= |x|^{2i}\big((2i - \lambda_2)(2i - \lambda_1)v(x) + \big(2i - \lambda_2 + 2i - \lambda_1\big)\Lambda v(x) + \Lambda^2 v(x)\big),
\end{aligned}
$$

где $\lambda_2 \in \mathbb{C}$. Отсюда, действуя аналогичным образом, нетрудно получить

$$(\Lambda-\lambda_1)\dots(\Lambda-\lambda_m)\Big(|x|^{2i}v(x)\Big)$$
$$= |x|^{2i}\Big((\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_m)v(x)+Q_m^{(i)}(\Lambda)v(x)\Big),$$

где $Q_m^{(i)}(\lambda)$ – некоторый многочлен m-й степени от λ с коэффициентами, зависящими от $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ и i и такой, что $Q_m^{(i)}(0){=}0$. Пусть теперь $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ – корни многочлена $P_{[m]}(\lambda)$. Тогда будем иметь

$$P_{[m]}(\Lambda)\Big(|x|^{2i}v(x)\Big) = |x|^{2i}\Big(P_{[m]}(2i)v(x)+Q_m^{(i)}(\Lambda)v(x)\Big),\quad x\in S, \tag{6}$$

где $Q_m^{(i)}(\Lambda)v(x)$ – гармоническая в S функция. Пусть S_r – сфера радиуса r с центром в начале координат. Для любого $r\in(0,1)$ имеем $Q_m^{(i)}(\Lambda)v\in C(\bar S_r)$. Тогда из (6) после интегрирования по ∂S_r и применения теоремы о среднем получим

$$\int_{\partial S_r} P_{[m]}(\Lambda)\Big(|x|^{2i}v(x)\Big)\,ds_x = P_{[m]}(2i)r^{2i}\int_{\partial S_r} v(x)\,ds_x \tag{7}$$
$$+\, r^{2i}\int_{\partial S_r} Q_m^{(i)}(\Lambda)v(x)\,ds_x = \omega_n P_{[m]}(2i)v(0)r^{2i+n-1} + r^{2i}\int_{\partial S_r} Q_m^{(i)}(\Lambda)v(x)\,ds_x,$$

где ω_n – площадь единичной сферы ∂S. Вычислим интеграл в полученном равенстве справа. В силу леммы 1 многочлен $Q_m^{(i)}(\lambda)$ можно записать в виде

$$Q_m^{(i)}(\lambda)=\sum_{k=0}^m q_k\lambda^{[k]},$$

где $q_0 = Q_m^{(i)}(0) = 0$. Функция $w(x) = (\Lambda-1)\dots(\Lambda-k+1)v(x)$ является гармонической в S, а поэтому при $k\ge 1$ будем иметь

$$\int_{\partial S_r}\Lambda^{[k]}v(x)\,ds_x = \int_{\partial S_r}\Lambda w(x)\,ds_x = r\int_{\partial S_r}\frac{\partial w}{\partial\nu}(x)\,ds_x = 0$$

и значит

$$\int_{\partial S_r} Q_m^{(i)}(\Lambda)v(x)\,ds_x = Q_m^{(i)}(0)\int_{\partial S_r} v(x)\,ds_x = 0. \tag{8}$$

Поэтому из (7) находим

$$\int_{\partial S_r} P_{[m]}(\Lambda)\Big(|x|^{2i}v(x)\Big)\,ds_x = \omega_n P_{[m]}(2i)v(0)r^{2i+n-1}.$$

Переходя в полученном равенстве к пределу при $r\to 1-0$, учитывая при этом, что $v\in C^m(\bar S)$ и (4) получим

$$0=\int_{\partial S} P_{[m]}(\Lambda)\Big(|x|^{2i}v(x)\Big)\,ds_x = \omega_n P_{[m]}(2i)v(0).$$

Если теперь гармоническую функцию $v(x)$ выбрать такой, что $v(0)\ne 0$, то получим $P_{[m]}(2i)=0$ для всех $i=0,1,\dots,k-1$.

Достаточность. Пусть $P_{[m]}(2i) = 0$ при $i = 0,1,\dots,k-1$. Тогда из (6) следует, что

$$P_{[m]}(\Lambda)\Big(|x|^{2i}v(x)\Big) = |x|^{2i}Q_m^{(i)}(\Lambda)v(x),\quad x\in S$$

при $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Значит, после интегрирования по ∂S_r, получим

$$\int_{\partial S_r} P_{[m]}(\Lambda)\Big(|x|^{2i} v(x)\Big)\, ds_x = r^{2i} \int_{\partial S_r} Q_m^{(i)}(\Lambda) v(x)\, ds_x. \tag{9}$$

Рассмотрим k-гармоническую в S функцию вида

$$u(x) = \sum_{i=0}^{k-1} |x|^{2i} v_i(x) \in C^m(\bar{S}).$$

Для нее в силу (9) и (8) верны равенства

$$\int_{\partial S_r} P_{[m]}(\Lambda) u(x)\, ds_x = \sum_{i=0}^{k-1} r^{2i} \int_{\partial S_r} Q_m^{(i)}(\Lambda) v_i(x)\, ds_x$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} r^{2i} Q_m^{(i)}(0) \int_{\partial S_r} v_i(x)\, ds_x = 0.$$

Переходя к пределу при $r \to 1-0$ и используя условие $u \in C^m(\bar{S})$, а также равенство (2) получим (3). □

Замечание 1. *Теорема 1 обобщает теорему 3 из работы* [1].

Рассмотрим полиномы

$$H_k(t) = t(t-2)\ldots(t-2k+2) \tag{10}$$

при $k \in \mathbb{N}$. Найдем их прообразы при изоморфизме Φ. Обозначим

$$P_k(t) = \Phi^{-1}[H_k(t)], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда $H_k(t) = P_{[k]}(t)$.

Лемма 2. *Пусть $P_k(t) = \sum_{i=1}^k a_i^{(k)} t^i$, тогда для коэффициентов $a_i^{(k)}$ верно следующее рекуррентное равенство*

$$a_i^{(k)} = a_{i-1}^{(k-1)} + (i-2k+2) a_i^{(k-1)}, \quad 1 \le i \le k, \quad k \ge 2, \tag{11}$$

где $a_1^{(1)} = 1$ – начальное условие и $a_i^{(k)} = 0$ при $i > k$ и $0 \ge i$ – граничные условия.

Доказательство. Поскольку $H_k(t) = (t-2k+2)H_{k-1}(t)$, то можно записать $P_{[k]}(t) = (t-2k+2)P_{[k-1]}(t)$. Значит

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^{(k)} t^{[i]} = (t-2k+2) \sum_{i=1}^{k-1} a_i^{(k-1)} t^{[i]}$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} a_i^{(k-1)} t^{[i+1]} + \sum_{i=1}^{k-1} (i-2k+2) a_i^{(k-1)} t^{[i]} = \sum_{i=2}^{k} a_{i-1}^{(k-1)} t^{[i]}$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-1} (i-2k+2) a_i^{(k-1)} t^{[i]} = \sum_{i=1}^{k} \Big(a_{i-1}^{(k-1)} + (i-2k+2) a_i^{(k-1)}\Big) t^{[i]}$$

и следовательно, в силу леммы 1, соотношение (11) верно. Здесь сначала было использовано условие $a_{i-1}^{(k-1)} = 0$ при $i \le 1$, а затем $a_i^{(k-1)} = 0$ при $i > k-1$. □

Замечание 2. *Уравнение, похожее на* (11)

$$a^s_{k+1} = (k-2s+1)a^s_k + \frac{1}{2}a^{s-1}_k$$

применялось в [10] *при построении специальных полиномов. Уравнения вида* (11) *задают арифметические треугольники наподобие треугольков Паскаля, Эйлера или Стирлинга. Эти треугольники изучаются также по модулю простых чисел (см., например,* [11]*).*

Из чисел $a^{(k)}_i$, $1 \le i \le k$, $k \in \mathbb{N}$ составим арифметический треугольник

$$A = \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & 1 & & & \\ & & 3 & & -3 & & 1 & & \\ & -15 & & 15 & & -6 & & 1 & \\ 105 & & -105 & & 45 & & -10 & & 1 \\ & & & & \dots & & & & \\ & \cdots & & a^{(k)}_i = a^{(k-1)}_{i-1} + (i-2k+2)a^{(k-1)}_i & & & \cdots & & \end{array}. \tag{12}$$

Лемма 3. *Решение рекуррентного уравнения* (11) *единственно и имеет вид*

$$a^{(k)}_i = (-1)^{i+k}\binom{2k-i-1}{i-1}(2k-2i-1)!!, \tag{13}$$

где $1 \le i \le k$, $k \in \mathbb{N}$. *Здесь будем считать, что* $(-1)!! = 1$.

Доказательство. В работах [12, 13] при исследовании арифметического треугольника, возникающего из условий разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения было решено уравнение, похожее на (11)

$$b^i_{k+1} = (2k-i)b^i_k - b^{i-1}_k, \quad 1 \le i \le k+1, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где $b^1_1 = 1$ и $b^i_k = 0$ при $i > k$ и $0 \ge i$. Его единственное решение (см. [13]) имеет вид

$$b^i_k = (-1)^{i+1}\binom{2k-i-1}{i-1}(2k-2i-1)!!. \tag{15}$$

Если подставить $b^i_k = (-1)^{k+1}a^{(k)}_i$ в уравнение (14), то получим

$$(-1)^{k+2}a^{(k+1)}_i = (-1)^{k+1}(2k-i)a^{(k)}_i - (-1)^{k+1}a^{(k)}_{i-1},$$

или сокращая на $(-1)^{k+2}$ и заменяя $k+1$ на k приходим к (11)

$$a^{(k)}_i = -(2k-2-i)a^{(k-1)}_i + a^{(k-1)}_{i-1} = a^{(k-1)}_{i-1} + (i-2k+2)a^{(k-1)}_i.$$

Поскольку решение задачи (14) единственно, то умножая равенство (15) на $(-1)^{k+1}$ получаем решение (13). □

Замечание 3. *Из равенства* (11)*, учитывая условие* $a^{(1)}_1 = 1$*, при* $i = 1$ *следует, что* $a^{(k)}_1 = (3-2k)a^{(k-1)}_1 = \ldots = (-1)^{k-1}(2k-3)!!$*, а при* $i = k$ *получаем* $a^{(k)}_k = a^{(k-1)}_{k-1} = \ldots = a^{(1)}_1 = 1$. *Это значит, что левая сторона треугольника* A *из* (12) *имеет вид* $a^{(k)}_1 = (-1)^{k-1}(2k-3)!!$*, а правая сторона имеет вид* $a^{(k)}_k = 1$, $k \in \mathbb{N}$.

На основании лемм 1 и 2 получаем равенство

$$P_k(t) = \Phi^{-1}[H_k(t)] = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k}\binom{2k-i-1}{i-1}(2k-2i-1)!!\, t^i, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Если воспользоваться коэффициентами треугольника A из (12), то можно записать несколько полиномов $P_k(t)$ в явном виде

$$\begin{gathered} P_1(t) = t, \quad P_2(t) = -t + t^2, \quad P_3(t) = 3t - 3t^2 + t^3, \\ P_4(t) = -15t + 15t^2 - 6t^3 + t^4,\ P_5(t) = 105t - 105t^2 + 45t^3 - 10t^4 + t^5, \dots \end{gathered} \tag{17}$$

Пример 1. Если k-гармоническая в S функция $u \in C^k(\bar S)$ удовлетворяет на ∂S равенствам $\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}|_{\partial S} = \varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, k$, т.е. $u(x)$ – решение однородной задачи Неймана [14], то для функций $\varphi_j(x)$ необходимо выполнение условия [12, 15]

$$\int_{\partial S} \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+k}\binom{2k-j-1}{j-1}(2k-2j-1)!!\,\varphi_j(x)\, ds_x = 0.$$

Действительно, так как по теореме 1 для функции $u(x)$ верно равенство $\int_{\partial S} P_k(\frac{\partial}{\partial \nu})u\, ds_x = 0$, где коэффициенты полинома $P_k(t)$ – числа $a_j^{(k)}$ находятся из равенства (13), то подставляя значения нормальных производных от $u(x)$ из граничных условий под интеграл получаем требуемое равенство. Поскольку $b_k^j = (-1)^{k+1}a_j^{(k)}$, то согласно результатам работы [13] полученное условие является и достаточным для существования решения задачи Неймана.

Заметим, что условие дополнительности (см. [16]) для такой постановки задачи Неймана выполнены. Если $B_j(x, D) = \frac{\partial^j}{\partial \nu^j}$ – операторы из граничных условий задачи, а $B_j'(x, D)$ – их старшие члены, то полиномы $B_j'(x, \tau + t\nu)$, где τ и ν – касательный и нормальный вектора в точке $x \in \partial S$, должны быть линейно независимы по модулю полинома $(t-i)^k$. Для задачи Неймана $B_j'(x, \tau + t\nu) = (\tau + t\nu, \nu)^j = ((\tau, \nu) + t(\nu, \nu))^j = t^j$, $j = 1, \dots, k$ и значит

$$t^k = t^k - (t-i)^k = -(-i)^k - \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}(-i)^{k-j}t^j.$$

Поэтому полиномы t^j, $j = 1, \dots, k$ линейно независимы по модулю $(t-i)^k$. В работе [17] исследована другая постановка задачи Неймана. На данные для задачи Дирихле [18] дополнительных условий не возникает.

Определение 1. *Линейную оболочку бесконечной системы полиномов вида* $\{P_k(t), P_{k+1}(t), P_{k+2}(t), \dots\}$ *обозначим через* $\mathcal{L}_k$, *т.е.*

$$\mathcal{L}_k = \mathrm{lin}\{P_k(t), P_{k+1}(t), P_{k+2}(t), \dots\}.$$

Ясно, что $\mathcal{L}_k$ – линейное пространство.

Теорема 2. *Пусть* $P(t)$ *– ненулевой полином* $P(t) \in \mathcal{L}_m$ *и* $\deg P(t) = k$. *Тогда для всякой* m*-гармонической в* S *функции* $u \in C^k(\bar S)$ *верно равенство вида* (3)

$$\int_{\partial S} P\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)u\, ds_x = 0. \tag{18}$$

Если $k < m$, *то равенство* (18) *невозможно для любой* m*-гармонической в* S *функции* $u \in C^k(\bar S)$.

Доказательство. Поскольку $P(t) \in \mathcal{L}_m$, то $\Phi[P](t) \in \mathrm{lin}\{H_m(t), H_{m+1}(t), \dots\}$, где полиномы $H_k(t)$ находятся из (10). Поэтому полином $\Phi[P](t)$ имеет нули $t = 2i$, $i = 0, \dots, m-1$. Следовательно, на основании теоремы 1, для функции $u \in C^k(\bar{S})$ верно равенство (18).

Если $k < m$, то полином $\Phi[P](t)$, имеющий степень k, не может иметь m нулей $t = 2i$, $i = 0, \dots, m-1$, а значит по теореме 1 равенство (18) невозможно для любой m-гармонической в S функции. □

Найдем более удобный базис в $\mathcal{L}_k$. Например, из (17) легко обнаружить, что имеют место равенства $P_2(t) + P_1(t) = t^2$ и $P_3(t) + 3P_2(t) = t^2 P_1(t)$.

Лемма 4. *Для полиномов $P_n(t)$ из (16) справедливо следующее рекуррентное равенство*

$$P_n(t) + (2n-3)P_{n-1}(t) = t^2 P_{n-2}(t), \quad n \geq 2, \tag{19}$$

где следует считать, что $P_0(t) = 1$.

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства (19). Поскольку, согласно замечанию 3 $a_n^{(n)} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, то учитывая (13) будем иметь равенства

$$\begin{aligned}
P_n(t) + (2n-3)P_{n-1}(t) &= \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} t^i + (2n-3) \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(n-1)} t^i \\
&= a_n^{(n)} t^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} \Big((2n-2i-1) \binom{2n-i-1}{i-1} \\
&\quad - (2n-3) \binom{2n-i-3}{i-1} \Big) (2n-2i-3)!!\, t^i \\
&= t^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} \Big(\frac{(2n-2i-1)(2n-i-1)!}{(i-1)!(2n-2i)!} \\
&\quad - \frac{(2n-3)(2n-i-3)!}{(i-1)!(2n-2i-2)!} \Big) (2n-2i-3)!!\, t^i \\
&= t^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} \Big[(2n-i-1)(2n-i-2) \\
&\qquad - (2n-3)(2n-2i) \Big] \frac{(2n-i-3)!(2n-2i-1)!!}{(i-1)!(2n-2i)!}\, t^i.
\end{aligned}$$

Вычислим выражение в квадратных скобках. Имеем

$$\begin{aligned}
&(2n-i-1)(2n-i-2) - (2n-3)(2n-2i) = 4n^2 - 2n(2i+3) \\
&\qquad + (i+1)(i+2) - 4n^2 + 2n(2i+3) - 6i = i^2 - 3i + 2 = (i-1)(i-2).
\end{aligned}$$

Учитывая это равенство, а также то, что $(-1)!! = 1$ получим

$$P_n(t) + (2n-3)P_{n-1}(t) = t^n + \\ + \sum_{i=3}^{n-1} (-1)^{i+n} \frac{(2n-i-3)!}{(i-3)!(2n-2i)!}(2n-2i-1)!!\, t^i = \\ = \sum_{i=3}^{n} (-1)^{i+n} \binom{2n-i-3}{i-3}(2n-2i-1)!!\, t^i.$$

Заменяя в последней сумме i на $i+2$ найдем

$$P_n(t) + (2n-3)P_{n-1}(t) \\ = t^2 \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{i+n} \binom{2(n-2)-i-1}{i-1}(2(n-2)-2i-1)!!\, t^i = t^2 P_{n-2}(t).$$

Что и требовалось доказать. □

Формула (19) позволяет строить полиномы $P_n(t)$. Например,

$$P_4(t) = -5P_3(t) + t^2 P_2(t) = -5(3t - 3t^2 + t^3) + \\ + t^2(-t + t^2) = t^4 - 6t^3 + 15t^2 - 15t.$$

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{L}_k = \operatorname{lin}\{P_k(t), t^2 P_{k-1}(t), t^4 P_{k-2}(t), \ldots, t^{2k-2} P_1(t), t^{2k}, t^{2k+1}, \ldots\}. \tag{20}$$

Доказательство. Для сокращения записей аргументы у полиномов опустим. В силу леммы 4 верны равенства

$$\operatorname{lin}\{P_k, P_{k+1}\} = \operatorname{lin}\{P_k, t^2 P_{k-1}\}, \quad \operatorname{lin}\{P_{k+1}, P_{k+2}\} = \operatorname{lin}\{P_{k+1}, t^2 P_k\},$$

и значит будем иметь

$$\operatorname{lin}\{P_k, P_{k+1}, P_{k+2}\} = \operatorname{lin}\{P_k, P_{k+1}, t^2 P_k\} = \operatorname{lin}\{P_k, t^2 P_{k-1}, t^2 P_k\}.$$

Отсюда аналогичными рассуждениями при $k \geq n$ найдем

$$\operatorname{lin}\{P_k, P_{k+1}, \ldots, P_{k+n}\} = \operatorname{lin}\{P_k, t^2 P_{k-1}, \ldots, t^2 P_{k+n-1}\}.$$

Следовательно, поскольку всякий полином из $\mathcal{L}_k$ есть конечная линейная комбинация его базисных полиномов, то будем иметь

$$\mathcal{L}_k = \operatorname{lin}\{P_k, t^2 P_{k-1}, t^2 P_k, t^2 P_{k+1}, \ldots\}.$$

Аналогичными рассуждениями получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k &= \operatorname{lin}\{P_k, t^2 P_{k-1}, t^4 P_{k-2}, t^4 P_{k-1}, t^4 P_k, \ldots\} \\ &= \operatorname{lin}\{P_k, t^2 P_{k-1}, t^4 P_{k-2}, t^6 P_{k-3}, t^6 P_{k-2}, \ldots\} = \ldots \\ &\ldots = \operatorname{lin}\{P_k, t^2 P_{k-1}, \ldots, t^{2k-2} P_1, t^{2k-2} P_2, t^{2k-2} P_3, \ldots\} \\ &= \operatorname{lin}\{P_k, t^2 P_{k-1}, \ldots, t^{2k-2} P_1, t^{2k} P_0, t^{2k} P_1, t^{2k} P_2, \ldots\} \\ &= \operatorname{lin}\{P_k, t^2 P_{k-1}, \ldots, t^{2k-2} P_1, t^{2k} P_0, t^{2k} P_1, t^{2k+2} P_0, t^{2k+2} P_1, t^{2k+2} P_2, \ldots\} \\ &\ldots = \operatorname{lin}\{P_k, t^2 P_{k-1}, \ldots, t^{2k-2} P_1, t^{2k} P_0, t^{2k} P_1, t^{2k+2} P_0, t^{2k+2} P_1, \ldots\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Учитывая, что $P_1(t) = t$ и $P_0(t) = 1$ будем иметь требуемое равенство (20). Нетрудно видеть, что все полиномы, входящие в равенство (20) справа линейно независимы. □

Следствие 1. *Для всякой m-гармонической в S функции $u \in C^k(\bar S)$ при $k \geq m$ верны равенства*

$$\int_{\partial S} P_{m-i}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\frac{\partial^{2i}u}{\partial\nu^{2i}}\,ds_x = 0, \quad \int_{\partial S}\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\,ds_x = 0, \tag{22}$$

где $0 \leq i \leq m-1$ и $2m \leq j \leq k$ при $2m \leq k$.

Доказательство. В силу теоремы 3 имеем $t^{2i}P_{m-i}(t) \in \mathcal{L}_m$, если $0 \leq i \leq m-1$ и $t^j \in \mathcal{L}_m$, если $2m \leq j \leq k$. Поэтому по теореме 2 равенства (22) справедливы. Случай $k < m$, опять же по теореме 2, невозможен. □

Пример 2. Пусть бигармоническая в S функция $u \in C^3(\bar S)$ удовлетворяет на единичной сфере равенствам $\frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}|_{\partial S} = \varphi_1(s)$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial\nu^3}|_{\partial S} = \varphi_2(s)$. Тогда по следствию 1 при $m = 2$ и $k = 3$ имеем

$$\int_{\partial S} P_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)u\,ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} P_1\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}\,ds_x = 0,$$

а значит, так как по (17) $P_2(t) = t^2 - t$, $P_1(t) = t$, то функция $\varphi_2(s)$ должна удовлетворять условию

$$\int_{\partial S}\varphi_2(s)\,ds_x = 0. \tag{23}$$

Это необходимое условие существования решения было получено ранее в работе [19].

Следствие 2. *Пусть m-гармоническая в S функция $u \in C^k(\bar S)$ удовлетворяет на ∂S равенствам*

$$Q_i\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)u|_{\partial S} = \varphi_i(s), \quad i = 1,\dots,q, \tag{24}$$

где $Q_i(t)$ — некоторые полиномы и $k = \max_i\{\deg Q_i(t)\}$. Тогда, если

$$\mathcal{L}_Q \equiv \mathcal{L}_m \cap \operatorname{lin}\{Q_1(t),\dots,Q_q(t)\} \neq \{0\},$$

то функции $\varphi_1(s),\dots,\varphi_q(s)$ должны удовлетворять равенствам

$$\int_{\partial S}\sum_{i=1}^{q}\alpha_i^{(j)}\varphi_i(s)\,ds_x = 0, \quad j = 1,\dots,r, \tag{25}$$

где $r = \dim\mathcal{L}_Q$, а числа $\alpha_i^{(j)}$ таковы, что полиномы $\sum_{i=1}^q \alpha_i^{(j)}Q_i(t)$ при $j = 1,\dots,r$ образуют базис в $\mathcal{L}_Q$.

Доказательство. Рассмотрим базисные полиномы в $\mathcal{L}_Q$

$$S_j(t) = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i^{(j)}Q_i(t), \quad j = 1,\dots,r.$$

Поскольку $S_j(t) \in \mathcal{L}_m$, то по теореме 2 запишем

$$0 = \int_{\partial S} S_j\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)u\,ds_x = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i^{(j)}\int_{\partial S} Q_i\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)u\,ds_x = \int_{\partial S}\sum_{i=1}^{q}\alpha_i^{(j)}\varphi_i(s)\,ds_x.$$

Что и требовалось доказать. □

Пример 3. Вернемся к случаю из примера 2. В нем, следуя обозначениям следствия 2, $m = 2$, $q = 2$, $Q_1(t) = t^2$ и $Q_2(t) = t^3$. Согласно теореме 3 имеем $\mathcal{L}_2 = \mathrm{lin}\{P_2(t), t^3, t^4, \dots\}$ и кроме того

$$\mathrm{lin}\{t^2, t^3\} = \mathrm{lin}\{P_1(t) + P_2(t), t^3\} = \{\alpha_1 P_1(t) + \alpha_1 P_2(t) + \alpha_2 t^3 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Поскольку полином $P_1(t)$ не входит в $\mathcal{L}_2$, то $\alpha_1 = 0$ и значит

$$\mathcal{L}_Q \equiv \mathcal{L}_2 \cap \mathrm{lin}\{t^2, t^3\} = \{\alpha_2 t^3 : \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Отсюда $r = 1$. Базис в $\mathcal{L}_Q$ можно взять в виде $\{t^3\}$, а поэтому $\alpha_1^{(1)} = 0$ и $\alpha_2^{(1)} = 1$ и следовательно, этом случае, условие (25) примет вид (23).

4. Другие интегральные тождества на единичной сфере

В некоторых работах, например [3, 9, 19], условия разрешимости задач для полигармонического уравнения в единичном шаре содержат интегральные равенства вида (25) с некоторым полиномиальным множителем под интегралом. Следующая теорема обобщает теорему 1 в этом направлении.

Теорема 4. *Пусть $P_m(\lambda)$ – некоторый полином степени m и $H_l(x)$ – некоторый однородный гармонический полином степени l. Для того, чтобы для любой k-гармонической в S функции $u \in C^m(\bar{S})$ выполнялось равенство*

$$\int_{\partial S} H_l(x) P_m\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big) u \, ds_x = 0 \tag{26}$$

необходимо и достаточно, чтобы полином $P_{[m]}(\lambda)$ имел корни $\lambda = l + 2i$, $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\int_{\partial S} H_l(x) P_m\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big) u \, ds_x = 0$ для любой k-гармонической в S функции $u \in C^m(\bar{S})$ и некоторого однородного гармонического полинома $H_l(x)$ степени l. Тогда в силу равенства (2) будем иметь $\int_{\partial S} H_l(x) P_{[m]}(\Lambda) u \, ds_x = 0$. Выберем в качестве $u(x)$ k-гармоническую функцию вида $u(x) = |x|^{2i} v(x)$, где $i = 0, 1, \dots, k-1$, а $v(x)$ – гармоническая в S функция $v \in C^m(\bar{S})$. Тогда, по формуле Грина

$$\int_{\partial S} H_l(x) \Lambda v(x) \, ds_x = l \int_{\partial S} H_l(x) v(x) \, ds_x,$$

или

$$\int_{\partial S} H_l(x) (\Lambda - l) v(x) \, ds_x = 0 \tag{27}$$

и значит

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} H_l(x) \Lambda\Big(|x|^{2i} v(x)\Big) \, ds_x &= (2i + l) \int_{\partial S} H_l(x) v(x) \, ds_x \\ &+ \int_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - l) v(x) \, ds_x = (2i + l) \int_{\partial S} H_l(x) v(x) \, ds_x.\end{aligned}$$

Аналогично, используя формулу Грина, запишем

$$\int_{\partial S} H_l(x)\Lambda^k\Big(|x|^{2i}v(x)\Big)\,ds_x = \int_{\partial S} H_l(x)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(2i)^j\Lambda^{k-j}v(x)\,ds_x$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(2i)^j l^{k-j}\int_{\partial S} H_l(x)v(x)\,ds_x = \int_{\partial S}(2i+l)^k H_l(x)v(x)\,ds_x$$

и значит

$$0 = \int_{\partial S} H_l(x)P_{[m]}(\Lambda)\Big(|x|^{2i}v(x)\Big)\,ds_x = P_{[m]}(2i+l)\int_{\partial S} H_l(x)v(x)\,ds_x. \tag{28}$$

Если теперь выбрать $v(x) = H_l(x)$, то поскольку $\int_{\partial S} H_l^2(x)\,ds_x \neq 0$, будем иметь $P_{[m]}(2i+l) = 0$ при любом $i = 0,1,\dots,k-1$.

Достаточность. Пусть $P_{[m]}(l+2i) = 0$ при $i = 0,1,\dots,k-1$. Тогда верно равенство $P_{[m]}(\lambda) = (\lambda - l - 2i)R^{(i)}(\lambda)$, где $R^{(i)}(\lambda)$ – некоторый полином. Воспользуемся равенством (6) при $P_{[m]}(\lambda) = R^{(i)}(\lambda)$

$$R^{(i)}(\Lambda)\Big(|x|^{2i}v(x)\Big) = |x|^{2i}\Big(R^{(i)}(2i) + Q_m^{(i)}(\Lambda)\Big)v(x) \equiv |x|^{2i}v_i(x),$$

где функция $v_i(x)$ – гармоническая в S. Следовательно будем иметь

$$P_{[m]}(\Lambda)\Big(|x|^{2i}v(x)\Big) = (\Lambda - l - 2i)R^{(i)}(\Lambda)\Big(|x|^{2i}v(x)\Big) = (\Lambda - l - 2i)\Big(|x|^{2i}v_i(x)\Big).$$

Отсюда, с помощью (27) запишем

$$\int_{\partial S} H_l(x)P_{[m]}(\Lambda)\Big(|x|^{2i}v(x)\Big)\,ds_x = \int_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - l - 2i)\Big(|x|^{2i}v_i(x)\Big)\,ds_x$$

$$= \int_{\partial S} H_l(x)\big((2i - l - 2i)v_i(x) + \Lambda v_i(x)\big)\,ds_x = 0$$

и значит, учитывая (2) и представление Альманси полигармонической в S функции заключаем, что равенство (26) верно. $\square$

Пусть $l \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N}\cup\{0\}$. Рассмотрим полиномы

$$H_k^{(l)}(t) = (t-l)(t-2-l)\dots(t-2k+2-l) \tag{29}$$

при $k \in \mathbb{N}$. Найдем их прообразы при изоморфизме Φ. Обозначим

$$P_k^{(l)}(t) = \Phi^{-1}[H_k^{(l)}(t)],\quad k \in \mathbb{N},$$

и значит $H_k^{(l)}(t) = P_{[k]}^{(l)}(t)$. Ясно, что $P_k^{(0)}(t) \equiv P_k(t)$ – полином из (16).

Лемма 5. *Пусть $P_k^{(l)}(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k,l)}t^i$, тогда для коэффициентов $a_i^{(k,l)}$ верно следующее рекуррентное равенство*

$$a_i^{(k,l)} = a_{i-1}^{(k-1,l)} + (i - 2k + 2 - l)a_i^{(k-1,l)},\quad 0 \le i \le k,\quad k \ge 2, \tag{30}$$

где $a_0^{(1,l)} = -l$, $a_1^{(1,l)} = 1$ — начальные условия, и $a_i^{(k,l)} = 0$ при $i > k$ и $0 > i$ — граничные условия.

Доказательство. Поскольку $H_k^{(l)}(t) = (t-2k+2-l)H_{k-1}^{(l)}(t)$, то

$$P_{[k]}^{(l)}(t) = (t-2k+2-l)P_{[k-1]}^{(l)}(t)$$

и значит

$$\sum_{i=0}^{k} a_i^{(k,l)} t^{[i]} = (t-2k+2-l)\sum_{i=0}^{k-1} a_i^{(k-1,l)} t^{[i]} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i^{(k-1,l)} t^{[i+1]}$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-1}(i-2k+2-l)a_i^{(k-1,l)} t^{[i]} = \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}^{(k-1,l)} t^{[i]}$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-1}(i-2k+2-l)a_i^{(k-1,l)} t^{[i]} = \sum_{i=0}^{k}\Big(a_{i-1}^{(k-1,l)} + (i-2k+2-l)a_i^{(k-1,l)}\Big)t^{[i]}.$$

Поэтому, в силу леммы 1, соотношение (30) верно. Здесь сначала было использовано условие $a_{i-1}^{(k-1,l)} = 0$ при $i \le 0$, а затем $a_i^{(k-1,l)} = 0$ при $i > k-1$. $\square$

Замечание 4. *Из* (30) *нетрудно получить первый коэффициент полинома* $P_k^{(l)}(t)$

$$a_0^{(k,l)} = -(2k-2+l)a_0^{(k-1,l)}$$
$$= (2k-2+l)(2k-4+l)a_0^{(k-2,l)} = \ldots = (-1)^k (l,2)_k,$$

где $(a,b)_k = a(a+b)\ldots(a+kb-b)$ *– обобщенный символ Похгаммера* [8]. *Кроме того, нетрудно видеть, что* $a_k^{(k,l)} = a_{k-1}^{(k-1,l)} = \ldots = 1$ *и значит старший коэффициент полинома* $P_k^{(l)}(t)$ *равен 1.*

Например, нетрудно написать первые три полинома $P_k^{(l)}(t)$, $l \in \mathbb{N}_0$. Они имеют вид

$$P_1^{(l)}(t) = -l + t, \quad P_2^{(l)}(t) = l(l+2) - (2l+1)t + t^2,$$
$$P_3^{(l)}(t) = -l(l+2)(l+4) + 3(l^2+3l+1)t - 3(l+1)t^2 + t^3. \tag{31}$$

Определение 2. *Обозначим через* $\mathcal{L}_k^{(l)}$ *линейную оболочку системы полиномов* $\{P_k^{(l)}(t), P_{k+1}^{(l)}(t), \ldots\}$, *т.е.* $\mathcal{L}_k^{(l)} = \operatorname{lin}\{P_k^{(l)}(t), P_{k+1}^{(l)}(t), \ldots\}$.

Поскольку верно тождество $P_k^{(0)}(t) \equiv P_k(t)$, то имеем $\mathcal{L}_k^{(0)} \equiv \mathcal{L}_k$.

Рассмотрим сначала частный случай уравнения (30) при $l = 1$

$$a_i^{(k,1)} = a_{i-1}^{(k-1,1)} + (i-2k+1)a_i^{(k-1,1)}, \quad 0 \le i \le k, \quad k \ge 2, \tag{32}$$

где начальное условие имеет вид $a_0^{(1,1)} = -1$, $a_1^{(1,1)} = 1$, а граничные условия заданы в форме $a_i^{(k,1)} = 0$ при $i > k$ и $0 > i$.

Лемма 6. *Решение рекуррентного уравнения* (32) *единственно и имеет вид*

$$a_i^{(k,1)} = (-1)^{i+k}\binom{2k-i}{i}(2k-2i-1)!!, \tag{33}$$

где $0 \le i \le k$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Если в уравнении (32) сделать замену индексов по формулам $k = k-1$ и $i = i-1$, то получим уравнение вида (11)

$$a_{i-1}^{(k-1,1)} = a_{i-2}^{(k-2,1)} + (i-2k+2)a_{i-1}^{(k-2,1)}$$

с начальными условиями при $k = 2$: $a_0^{(1,1)} = -1$, $a_1^{(1,1)} = 1$. Поскольку $a_1^{(2)} = -1$, $a_2^{(2)} = 1$, то по лемме 3 решение этого уравнения единственно и имеет вид

$$a_{i-1}^{(k-1,1)} = a_i^{(k)} = (-1)^{i+k}\binom{2k-i-1}{i-1}(2k-2i-1)!!.$$

Граничные условия уравнения тоже сохраняются: $a_{-1}^{(k-1,1)} = a_0^{(k)} = 0$. Заменяя в найденном решении обратно $k = k+1$ и $i = i+1$ получим решение (33). $\square$

Из равенства (33) при $i = 0$ следует, что $a_0^{(k,1)} = (-1)^k(2k-1)!!$, а при $i = k$ получаем $a_k^{(k,1)} = 1$. Это значит, что левая сторона треугольника $A^{(1)}$, составленного из чисел (33) имеет вид $a_1^{(k)} = (-1)^k(2k-1)!!$, а правая сторона состоит из единиц $a_k^{(k)} = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Из формулы $a_{i-1}^{(k-1,1)} = a_i^{(k)}$ следует, что треугольник $A^{(1)}$ получается из треугольника A удалением первой строки последнего. Следовательно

$$P_{k+1}(t) = tP_k^{(1)}(t), \quad k \in \mathbb{N} \tag{34}$$

и по (17) несколько полиномов $P_k^{(1)}(t)$ можно записать в виде

$$\begin{gathered} P_1^{(1)}(t) = -1 + t, \quad P_2^{(1)}(t) = 3 - 3t + t^2, \\ P_3^{(1)}(t) = -15 + 15t - 6t^2 + t^3,\ P_4^{(1)}(t) = 105 - 105t + 45t^2 - 10t^3 + t^4, \dots \end{gathered} \tag{35}$$

Поскольку треугольник $A^{(1)}$ есть сдвиг треугольника A на одну позицию вверх с сохранением нумерации строк (первая строка при этом пропадает), то заменяя в формуле (19) $n = n+1$ получим рекуррентное равенство

$$P_n^{(1)}(t) + (2n-1)P_{n-1}^{(1)}(t) = t^2 P_{n-2}^{(1)}(t), \quad n \geq 2, \tag{36}$$

где следует считать, что $P_0^{(1)}(t) = 1$. Поскольку доказательство теоремы 3 основывается на аналогичном равенстве (19) и $P_0^{(1)}(t) = 1$, $P_1^{(1)}(t) = t - 1$, то в соответствии с (21) получим равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k^{(1)} &= \operatorname{lin}\{P_k^{(1)}(t), t^2 P_{k-1}^{(1)}(t), t^4 P_{k-2}^{(1)}(t), \dots, \\ &\qquad \dots, t^{2k-2}P_1^{(1)}(t), P_0^{(1)}(t)t^{2k}, P_1^{(1)}(t)t^{2k}, P_0^{(1)}(t)t^{2k+2}, \dots\} \\ &= \operatorname{lin}\{P_k^{(1)}(t), t^2 P_{k-1}^{(1)}(t), t^4 P_{k-2}^{(1)}(t), \dots, t^{2k-2}P_1^{(1)}(t), t^{2k}, t^{2k+1}, t^{2k+2}, \dots\} \\ &= \operatorname{lin}\{P_k^{(1)}(t), tP_k(t), t^3 P_{k-1}(t), \dots, t^{2k-3}P_2(t), t^{2k-1}P_1(t), t^{2k+1}, \dots\}. \end{aligned} \tag{37}$$

Следствие 3. *Пусть m-гармоническая в S функция $u \in C^k(\bar{S})$ удовлетворяет на ∂S равенствам (24). Тогда, если*

$$\mathcal{L}_Q^{(l)} \equiv \mathcal{L}_m^{(l)} \cap \operatorname{lin}\{Q_1(t), \dots, Q_q(t)\} \neq \{0\},$$

то функции $\varphi_1(s), \dots, \varphi_q(s)$ *должны удовлетворять равенствам*

$$\int_{\partial S} H_l(x) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^{(j)} \varphi_i(x)\, ds_x = 0, \quad j = 1, \dots, r, \tag{38}$$

где $r = \dim \mathcal{L}_Q^{(l)}$, *а числа* $\alpha_i^{(j)}$ *таковы, что полиномы* $S_j(t) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^{(j)} Q_i(t)$ *при* $j = 1, \dots, r$ *образуют базис в* $\mathcal{L}_Q^{(l)}$.

Доказательство. Повторим рассуждения доказательства следствия 2, но вместо теоремы 2 воспользуемся теоремой 4. Тогда получим (38)

$$0 = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^{(j)} \int_{\partial S} H_l(x) Q_i\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big) u\, ds_x = \int_{\partial S} H_l(x) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^{(j)} \varphi_i(s)\, ds_x,$$

где $j = 1, \dots, r$. □

Пример 4. Опять вернемся к случаю из примера 2. В нем, следуя обозначениям следствия 3, имеем $m = 2$, $q = 2$, $Q_1(t) = t^2$ и $Q_2(t) = t^3$. Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{L}_Q^{(l)} = \{\alpha_2 P_2^{(l)}(t) + \alpha_3 P_3^{(l)}(t) : (\alpha_2, \alpha_3) \in I_Q \subset \mathbb{R}^2\},$$

где множество I_Q таково, что полином $\alpha_2 P_2^{(l)}(t) + \alpha_3 P_3^{(l)}(t)$ не содержит одночленов нулевой и первой степеней так как их нет в $\mathrm{lin}\{Q_1(t), Q_2(t)\}$. Используя полиномы (31) найдем

$$\alpha_2 P_2^{(l)}(t) + \alpha_3 P_3^{(l)}(t) = l(l+2)(\alpha_2 - (l+4)\alpha_3) + \\ + (-(2l+1)\alpha_2 + 3\alpha_3(l^2 + 3l + 1))t + (\alpha_2 - 3(l+1)\alpha_3)t^2 + \alpha_3 t^3.$$

Поэтому вектор $(\alpha_2, \alpha_3) \in I_Q$ должен быть таким, что

$$l(l+2)(\alpha_2 - (l+4)\alpha_3) = 0, \quad -(2l+1)\alpha_2 + 3\alpha_3(l^2 + 3l + 1) = 0. \tag{39}$$

1. Пусть $l = 0$, тогда из второго уравнения находим $\alpha_2 = 3\alpha_3$ и значит

$$\mathcal{L}_Q^{(0)} = \{\alpha_2 P_2^{(0)}(t) + \alpha_3 P_3^{(0)}(t) : \alpha_2 = 3\alpha_3\} = \{\alpha_3 t^3 : \alpha_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}_Q,$$

что совпадает с результатом, полученным в примере 3.

2. Пусть $l \in \mathbb{N}$, тогда поскольку определитель однородной системы (39) в этом случае имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -l-4 \\ -2l-1 & 3l^2 + 9l + 3 \end{vmatrix} = 3l^2 + 9l + 3 - (2l+1)(l+4) = l^2 - 1,$$

то при $l \in \mathbb{N}$ и $l \neq 1$ имеем $\mathcal{L}_Q^{(l)} = \{0\}$. Если $l = 1$, то из первого уравнения (39) находим $\alpha_2 = 5\alpha_3$ и значит

$$\mathcal{L}_Q^{(1)} = \{\alpha_2 P_2^{(1)}(t) + \alpha_3 P_3^{(1)}(t) : \alpha_2 = 5\alpha_3\} = \{\alpha_3(-t^2 + t^3) : \alpha_3 \in \mathbb{R}\},$$

так как согласно (35)

$$5\alpha_3 P_2^{(1)}(t) + \alpha_3 P_3^{(1)}(t) \\ = \alpha_3(15 - 15t + 5t^2 - 15 + 15t - 6t^2 + t^3) = \alpha_3(-t^2 + t^3).$$

Отсюда $r=1$. Базис в $\mathcal{L}_Q$ можно взять в виде $\{t^3-t^2\}$, а поэтому, так как $S_1(t)=t^3-t^2=Q_2(t)-Q_1(t)$, то $\alpha_1^{(1)}=-1$, $\alpha_2^{(1)}=1$ и в силу следствия 3 получаем одно условие ($r=1$) вида (38)

$$\int_{\partial S} H_1(x)(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\,ds_x=0,$$

где $H_1(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ — произвольный однородный гармонический полином 1-й степени. Это необходимое условие существования решения задачи Неймана также было получено в [19]. Других тождеств вида (26) для бигармонических функций из примера 2 нет.

Лемма 7. *Для полиномов* $P_n^{(l)}(t)=\sum_{i=0}^{n}a_i^{(n,l)}t^i$ *верно равенство*

$$P_n^{(l)}(t)+2nP_{n-1}^{(l)}(t)=P_n^{(l-2)}(t),\quad n\ge 2, \tag{40}$$

где следует считать, что $P_0^{(l)}(t)=1$, $P_1^{(l)}(t)=t-l$.

Доказательство. Поскольку $H_n^{(l)}(t)=(t-l)(t-l-2)\dots(t-2n-l+2)$, то

$$(t-l+2)H_n^{(l)}(t)=(t-l+2)(t-l)(t-2-l)\dots$$
$$\dots(t-2n-l+2)=(t-2n-l+2)H_n^{(l-2)}(t),$$

или

$$t(H_n^{(l)}(t)-H_n^{(l-2)}(t))=(l-2)H_n^{(l)}(t)-(2n+l-2)H_n^{(l-2)}(t)$$

и значит поскольку $H_n^{(l)}(t)=\Phi[P_n^{(l)}]=P_{[n]}^{(l)}(t)$, то имеем равенство

$$t\sum_{i=0}^{n}(a_i^{(n,l)}-a_i^{(n,l-2)})t^{[i]}=(l-2)P_{[n]}^{(l)}(t)-(2n+l-2)P_{[n]}^{(l-2)}(t). \tag{41}$$

Используя тождество $tt^{[i]}=(t-i+i)t^{[i]}=t^{[i+1]}+it^{[i]}$ и замечание 4 преобразуем левую часть этого равенства

$$t\sum_{i=0}^{n}(a_i^{(n,l)}-a_i^{(n,l-2)})t^{[i]}=\sum_{i=0}^{n-1}(a_i^{(n,l)}-a_i^{(n,l-2)})t^{[i+1]}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}i(a_i^{(n,l)}-a_i^{(n,l-2)})t^{[i]}=\sum_{i=1}^{n}(a_{i-1}^{(n,l)}+ia_i^{(n,l)}-(a_{i-1}^{(n,l-2)}+ia_i^{(n,l-2)}))t^{[i]}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(a_{i-1}^{(n,l)}+ia_i^{(n,l)}-(a_{i-1}^{(n,l-2)}+ia_i^{(n,l-2)}))t^{[i]}.$$

В силу (30) из леммы 5 имеем

$$a_{i-1}^{(n-1,l)}+ia_i^{(n-1,l)}=a_i^{(n,l)}+(2n-2+l)a_i^{(n-1,l)}$$

и значит найдем

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i^{(n+1,l)} + (2n+l)a_i^{(n,l)} - a_i^{(n+1,l-2)} - (2n+l-2)a_i^{(n,l-2)})t^{[i]}$$
$$= \sum_{i=0}^{n+1}(a_i^{(n+1,l)} - a_i^{(n+1,l-2)})t^{[i]} + \sum_{i=0}^{n}((2n+l)a_i^{(n,l)} - (2n+l-2)a_i^{(n,l-2)})t^{[i]}$$
$$= P_{[n+1]}^{(l)}(t) - P_{[n+1]}^{(l-2)}(t) + (2n+l)P_{[n]}^{(l)}(t) - (2n+l-2)P_{[n]}^{(l-2)}(t).$$

Подставляя полученное выражение в левую часть (41) и сокращая будем иметь

$$P_{[n+1]}^{(l)}(t) - P_{[n+1]}^{(l-2)}(t) + 2nP_{[n]}^{(l)}(t) = -2P_{[n]}^{(l)}(t),$$

или

$$P_{[n+1]}^{(l)}(t) + (2n+2)P_{[n]}^{(l)}(t) = P_{[n+1]}^{(l-2)}(t).$$

Если теперь заменить $n+1$ на n, то получим уравнение (40).

Докажем начальные условия. Поскольку $H_n^{(l)}(t) = \Phi[P_n^{(l)}]$, то $1 = \Phi[P_0^{(l)}] = \Phi[a_0^{(0,l)}] = a_0^{(0,l)}\Phi[1] = a_0^{(0,l)}$ и значит $a_0^{(0,l)} = 1$, т.е. $P_0^{(l)}(t) = 1$. Аналогично

$$t - l = \Phi[P_1^{(l)}] = \Phi[a_0^{(1,l)} + ta_1^{(1,l)}] = a_0^{(1,l)}\Phi[1] + a_1^{(1,l)}\Phi[t] = a_0^{(1,l)} + a_1^{(1,l)}t$$

и значит $a_0^{(1,l)} = -l$, $a_1^{(1,l)} = 1$, т.е. $P_1^{(l)}(t) = t - l$. □

Рассмотрим еще один частный случай полиномов $P_n^{(l)}(t)$, когда $l = 2$. Из леммы 7 следует, что $P_n^{(2)}(t) = P_n^{(0)}(t) - 2nP_{n-1}^{(2)}(t)$, а значит используя теорему 3 получаем представление $\mathcal{L}_k^{(2)}$ в виде

$$\begin{aligned}(42)\quad \mathcal{L}_k^{(2)} &= \mathrm{lin}\{P_k^{(2)}(t), P_{k+1}^{(0)}(t), P_{k+2}^{(0)}(t), \dots\} = \\ &= \mathrm{lin}\{P_k^{(2)}(t), P_{k+1}(t), t^2P_k(t), t^4P_{k-1}(t), \dots, t^{2k}P_1(t), t^{2k+2}, t^{2k+3}, \dots\}.\end{aligned}$$

Полученное представление аналогично представлению (37).

Теорема 5. *Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $P_k(t) = P_k^{(0)}(t)$, тогда имеют место равенства*

$$\mathcal{L}_k^{(2l)} = \mathrm{lin}\{P_k^{(2l)}(t), P_{k+1}^{(2l-2)}(t), \dots, P_{k+l}(t), t^2P_{k+l-1}(t), \dots,$$
$$\dots, t^{2k+2l-2}P_1(t), t^{2k+2l}, t^{2k+2l+1}, \dots\},$$
$$\mathcal{L}_k^{(2l-1)} = \mathrm{lin}\{P_k^{(2l-1)}(t), P_{k+1}^{(2l-3)}(t), \dots, P_{k+l-1}^{(1)}(t), tP_{k+l-1}(t), \dots,$$
$$\dots, t^{2k+2l-3}P_1(t), t^{2k+2l-1}, \dots\}.$$

Доказательство. Первая формула теоремы получается аналогично (42) с использованием формулы (40) $P_n^{(l)}(t) = P_n^{(l-2)}(t) - 2nP_{n-1}^{(l)}(t)$, а затем формулы (20)

$$\mathcal{L}_k^{(2l)} = \mathrm{lin}\{P_k^{(2l)}(t), P_{k+1}^{(2l-2)}(t), P_{k+2}^{(2l-2)}(t), \dots\} = \dots$$
$$\dots = \mathrm{lin}\{P_k^{(2l)}(t), P_{k+1}^{(2l-2)}(t), P_{k+2}^{(2l-4)}(t), \dots, P_{k+l}(t), P_{k+l+1}(t), \dots\}$$
$$= \mathrm{lin}\{P_k^{(2l)}(t), P_{k+1}^{(2l-2)}(t), \dots, P_{k+l}(t), t^2P_{k+l-1}(t), \dots,$$
$$\dots, t^{2k+2l-2}P_1(t), t^{2k+2l}, t^{2k+2l+1}, \dots\}.$$

Вторая формула теоремы получается аналогично (37) также с использованием формулы (40) и с учетом равенства (34), а затем и формулы (20) из теоремы 3

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k^{(2l-1)} &= \lim\{P_k^{(2l-1)}(t), P_{k+1}^{(2l-3)}(t), P_{k+2}^{(2l-3)}(t), \dots\} = \dots \\ &= \lim\{P_k^{(2l-1)}(t), P_{k+1}^{(2l-3)}(t), P_{k+2}^{(2l-5)}(t), \dots, P_{k+l-1}^{(1)}(t), P_{k+l}^{(1)}(t), \dots\} \\ &= \lim\{P_k^{(2l-1)}(t), P_{k+1}^{(2l-3)}(t), \dots, P_{k+l-1}^{(1)}(t), tP_{k+l-1}(t), \dots, \\ &\qquad \dots, t^{2k+2l-3}P_1(t), t^{2k+2l-1}, \dots\}.\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Пример 5. Пусть бигармоническая в S функция $u \in C^3(\bar{S})$ удовлетворяет на единичной сфере равенствам $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi_1(s)$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial \nu^3}|_{\partial S} = \varphi_2(s)$. Используя обозначениям следствия 3 найдем $m = 2$, $q = 2$, $Q_1(t) = t$ и $Q_2(t) = t^3$. В этом случае

$$\mathcal{L}_Q^{(l)} = \{\alpha_2 P_2^{(l)}(t) + \alpha_3 P_3^{(l)}(t) : (\alpha_2, \alpha_3) \in J_Q \subset \mathbb{R}^2\},$$

где множество J_Q таково, что полином $\alpha_2 P_2^{(l)}(t) + \alpha_3 P_3^{(l)}(t)$ не содержит одночленов нулевой и второй степеней так как их нет в $\lim\{Q_1(t), Q_2(t)\}$. В соответствии с (31) запишем

$$\begin{aligned}\alpha_2 P_2^{(l)}(t) + \alpha_3 P_3^{(l)}(t) &= l(l+2)(\alpha_2 - (l+4)\alpha_3) + \\ &+ (-(2l+1)\alpha_2 + 3\alpha_3(l^2+3l+1))t + (\alpha_2 - 3(l+1)\alpha_3)t^2 + \alpha_3 t^3.\end{aligned}$$

Поэтому вектор $(\alpha_2, \alpha_3) \in J_Q$ должен быть таким, что

$$l(l+2)(\alpha_2 - (l+4)\alpha_3) = 0, \quad \alpha_2 - 3(l+1)\alpha_3 = 0. \tag{43}$$

Пусть $l = 0$, тогда из второго уравнения находим $\alpha_2 = 3\alpha_3$ и значит

$$\mathcal{L}_Q^{(0)} = \{\alpha_2 P_2^{(0)}(t) + \alpha_3 P_3^{(0)}(t) : \alpha_2 = 3\alpha_3\} = \{\alpha_3 t^3 : \alpha_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}_Q,$$

откуда по следствию 3 получаем условие $\int_{\partial S} \varphi_2(s)\, ds_x = 0$.

Если $l \in \mathbb{N}$, тогда определитель однородной системы (43) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -l-4 \\ 1 & -3l-3 \end{vmatrix} = l + 4 - 3l - 3 = -2l + 1,$$

а значит при $l \in \mathbb{N}$ однородная система имеет только нулевое решение, т.е. $\mathcal{L}_Q^{(l)} = \{0\}$. Поэтому других тождеств вида (26) для бигармонических функций из этого примера, кроме указанного выше нет. Заметим, что это необходимое условие существования решения задачи типа Неймана было получено в [20]. Оно является также и достаточным условием существования такой бигармонической функции.

References

[1] V.V. Karachik, *On the mean value property for polyharmonic functions in the ball*, Siberian Advances in Mathematics, **24**:3 (2014), 169–182.

[2] I.I. Bavrin, *Operatory dlya garmonicheskih funkcij i ih prilozheniya*, Differencial'nye uravneniya, **21**:1 (1985), 9–15. MR0777774

[3] V.V. Karachik, *A problem for the polyharmonic equation in the sphere*, Siberian Mathematical Journal, **32**:5 (1991), 767–774. MR1155803

[4] B.D. Koshanov, A.P. Soldatov, *Boundary value problem with normal derivatives for a higher-order elliptic equation on the plane*, Differential Equations, **52**:12 (2016), 1594–1609. MR3604680

[5] R. Dalmasso, *On the mean-value property of polyharmonic functions*, Studia Sci. Math. Hungar., **47**:1 (2010), 113–117. MR2654232

[6] V.V. Karachik, *On the mean-value property for polyharmonic functions*, Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, **6**:3 (2013), 59–66. Zbl 1291.31002

[7] K.O. Besov, *On the boundary behavior of components of polyharmonic functions*, Math. Notes, **64**:4 (1998), 450—460. MR1687236

[8] V.V. Karachik, *On some special polynomials and functions*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 205–226. MR3040001

[9] V.V. Karachik, *Construction of polynomial solutions to some boundary value problems for Poisson's equation*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **51**:9 (2011), 1567–1587. MR2907145

[10] V.V. Karachik, *On some special polynomials*, Proceedings of the American Mathematical Society, **132**:4 (2004), 1049–1058. MR2045420

[11] V.V. Karachik, *P-Latin matrices and Pascal's triangle modulo a prime*, Fibonacci Quarterly, **34**:4 (1996), 362–372. MR1394767

[12] V.V. Karachik, *Solvability conditions for the Neumann problem for the homogeneous polyharmonic equation*, Differential Equations, **50**:11 (2014), 1449–1456. MR3369154

[13] V.V. Karachik, *On the arithmetic triangle arising from the solvability conditions for the Neumann problem*, Mathematical Notes, **96**:1-2 (2014), 217–227. MR3344291

[14] A.V. Bizadze, *O nekotoryh svojstvah poligarmonicheskih funkcij*, Differencial'nye uravneniya, **24**:5 (1988), 825–831. MR0951248

[15] V.V. Karachik, *On solvability conditions for the Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit ball*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **8**:1 (2014), 63–75. MR3234793

[16] F. Gazzola, G. Sweers, H.-Ch. Grunau, *Polyharmonic boundary value problems*, Lecture Notes Math., 1991, Springer, 2010.

[17] G.C. Verchota, *The biharmonic Neumann problem in Lipschitz domains*, Acta Math., **194** (2005), 217–279. MR2231342

[18] V.V. Karachik, *Construction of polynomial solutions to the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **54**:7 (2014), 1122–1143. MR3233567

[19] B. Turmetov, R. Ashurov, *On Solvability of the Neumann Boundary Value Problem for Non-homogeneous Biharmonic Equation*, British Journal of Mathematics & Computer Science, **4**:4 (2014), 557–571.

[20] V.V. Karachik, *A Neumann-type problem for the biharmonic equation*, Siberian Advances in Mathematics, **27**:2 (2017), 103—118.

Valery Valentinovich Karachik
South Ural State University,
pr. Lenina, 76,
454080, Chelyabinsk, Russia
E-mail address: karachik@susu.ru