S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 552–567 (2017) УДК 512.55

DOI 10.17377/semi.2017.14.048 MSC 16P10 16W20

О ГРУППЕ ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕЦ С 4-НИЛЬПОТЕНТНЫМ РАДИКАЛОМ ДЖЕКОБСОНА

Е.В. ЖУРАВЛЕВ

Abstract. We describe the structure of the unit group of a commutative finite local rings R of characteristic p with Jacobson radical J such that $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = (0)$ and $F = R/J \cong GF(p^r)$, the finite field of p^r elements.

Keywords: local rings, finite rings, unit group of a ring.

1. Введение

Все кольца, рассматриваемые в данной работе, являются конечными, ассоциативными и содержат единицу. Обозначим через $J = J(R)$ и R^* соответственно радикал Джекобсона и группу обратимых элементов кольца R, $F = GF(p^r)$ – конечное поле и $\mathbb{Z}_n$ – кольцо классов вычетов по модулю n.

Кольцо с единицей R называется локальным, если $R/J = F$ – поле. Все делители нуля локального кольца образуют радикал J, и всякий элемент локального кольца является либо обратимым, либо нильпотентным. Одним из примеров локальных колец являются так называемые кольца Галуа $GR(p^{nr}, p^n)$, представимые в виде $\mathbb{Z}_{p^n}[x]/(f)$, где p – простое число, f – унитарный многочлен степени r, образ которого при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}_{p^n}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$ является неприводимым над $\mathbb{Z}_p$ многочленом. В частности, $GR(p^n, p^n) = \mathbb{Z}_{p^n}$ и $GR(p^r, p) = GF(p^r)$.

Следующие предложения содержат хорошо известные результаты из теории конечных колец (см. [1, 2, 3, 4]).

Zhuravlev, E.V., On unit group of a finite local rings with 4-nilpotent radical of Jacobson.

Поступила 8 апреля 2017 г., опубликована 13 июня 2017 г.

Предложение 1. *Пусть R – локальное кольцо. Тогда существует простое число p и натуральные числа n, r, такие, что*

(1) $|R| = p^{nr}$;
(2) $J^n = 0$;
(3) $|J| = p^{(n-1)r}$;
(4) $\mathrm{char} R = p^k$, *где* $1 \le k \le n$;
(5) *Если* $n = k$, *то* R *является кольцом Галуа* $GR(p^{kr}, p^k)$. *В частности,* $J = pR$ *и* $R = \mathbb{Z}_{p^k}[b]$, *где* b – *элемент* R *мультипликативного порядка* $p^r - 1$;
(6) *Если* $\mathrm{char}(R) = p^k$, *то* R *содержит максимальное подкольцо Галуа* $R_0 = GR(p^{kr}, p^k) = \mathbb{Z}_{p^k}[b]$ *и если* R_0' – *другое максимальное подкольцо Галуа кольца* R, *то существует обратимый элемент* $x \in R$ *такой, что* $R_0' = xR_0x^{-1}$;
(7) *Существуют элементы* $m_1, \ldots, m_h \in J$ *и* $\sigma_1, \ldots, \sigma_h \in Aut(R_0)$ *такие, что* R *раскладывается в прямую сумму левых* R_0*-модулей*

$$R = R_0 \oplus R_0 m_1 \oplus \ldots \oplus R_0 m_h,$$

где $m_i r_0 = r_0^{\sigma_i} m_i$, *для всех* $i = \overline{1,h}$ *и для любого элемента* $r_0 \in R_0$. *Отсюда, в частности, следует равенство*

$$J = pR_0 \oplus R_0 m_1 \oplus \ldots \oplus R_0 m_h.$$

Множество $\{m_1, m_2, \ldots, m_h\}$ называется отмеченным базисом радикала J. Такие базисы впервые были изучены и названы Р. Рагхавендраном (см. [1]) в случае $R_0 = GF(p^r)$.

Предложение 2. *Пусть R – локальное кольцо. Тогда*

(1) *Группа* R^* *кольца* R *содержит циклическую подгруппу* $\langle b \rangle$ *порядка* $p^r - 1$, *и* R^* *является полупрямым произведением групп* $1 + J$ *и* $\langle b \rangle$;
(2) *Группа* R^* *является разрешимой;*
(3) *Если* G – *подгруппа* R^* *порядка* $p^r - 1$, *то группа* G *сопряжена с* $\langle b \rangle$ *в* R^*;
(4) *Если* R^* *содержит нормальную подгруппу порядка* $p^r - 1$, *то множество* $K_0 = \langle b \rangle \cup \{0\}$ *содержится в центре кольца* R;
(5) $(1 + J^i)/(1 + J^{i+1}) \cong J^i/J^{i+1}$ *(как мультипликативная и аддитивная группы).*

Все локальные коммутативные кольца с циклической группой обратимых элементов были определены Р. Гилмером в [5]. Р. Рагхавендран в [1] описал структуру мультипликативной группы колец Галуа $R = GR(p^{nr}, p^n)$:

$$R^* \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_{p^{n-1}}\right)^r, & \text{если } p \ne 2, \text{ или } p = 2 \text{ и } n \le 2, \\ \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n-2}} \times \left(\mathbb{Z}_{2^{n-1}}\right)^{r-1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь и далее символом $(\mathbb{Z}_n)^m$ обозначим прямое произведение $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \times \ldots \times \mathbb{Z}_n$ из m циклических групп порядка n $(m, n \in \mathbb{N})$.

Г. Гански и Б. Макдональд в [6] исследовали строение группы R^* для локальных коммутативных колец R с условием $J^2 = 0$, а именно, они доказали, что

$$R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times (\mathbb{Z}_p)^{nr},$$

где $n = \dim_F J/J^2$ и $F = R/J = GF(p^r)$.

К. Чайкунжи в работах [3, 4, 7, 8, 9] привел описание группы R^* для коммутативных локальных колец с радикалом J индекса нильпотентности три. Например, если $\mathrm{char} R = p$, $s = \dim_F J/J^2 = 2$, $t = \dim_F J^2 = 1$, то

$$R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)^r \times \left(\mathbb{Z}_p\right)^r \quad \text{или} \quad R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_p\right)^{3r}.$$

Также им были разобраны ситуации $s = 3$, $t = 1$; $s = 2$, $t = 2$; $s \geq 1$, $t = \frac{s(s+1)}{2}$ для колец характеристик p, p^2 и p^3.

Группы обратимых элементов коммутативных локальных колец с радикалом индекса нильпотентности четыре были частично исследованы в [10, 11]. О. Одьюор в [10] описал случай, когда $\dim_F J/J^2 = 1$, $\dim_F J^3 \neq 0$, $J^4 = 0$, для всех возможных возможных значений характеристики кольца. В [11] автором изучена группа R^* колец с условием $\dim_F J/J^2 = 3$, $\dim_F J^2/J^3 = 1$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = (0)$, $\mathrm{char}(R) = p$. В настоящей работе продолжаются исследования по строению группы R^* коммутативных локальных колец характеристики p в случае, когда радикал J имеет индекс нильпотентности четыре.

2. Строение группы обратимых элементов

Пусть R – коммутативное локальное кольцо характеристики p и $J^4 = 0$, $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$. Тогда $R_0 = GF(p^r)$,

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw$$

и

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$ – базис идеала J над полем F (см. предложение 1), причем $u_1, u_2 \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2 \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$. Так как $u_i u_j \in J^2$ и $u_i v_j \in J^3$, то

$$u_i u_j = a_{ij}^{(1)} v_1 + a_{ij}^{(2)} v_2 + b_{ij} w \quad \text{и} \quad u_i v_j = c_{ij} w, \quad v_j u_i = d_{ij} w$$

для некоторых $a_{ij}^{(1)}$, $a_{ij}^{(2)}$, b_{ij}, c_{ij}, $d_{ij} \in F$, $i = \overline{1,2}$.

Рассмотрим матрицы умножения:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как R – коммутативное кольцо, то $C = D$, а матрицы A_1, A_2, B являются симметрическими.

В работах [12, 13] автором с точностью до изоморфизма классифицированы все конечные локальные кольца, рассматриваемые в данной ситуации. Далее, введем вспомогательные определения и укажем список этих колец.

Пусть

$$M_1 = \left\{ z \in F^* \ \mid \ \forall x \in F \ z(1 + 3\delta_1 x^2) - x\delta_1(3 + \delta_1 x^2) \neq 0 \right\},$$

где δ_1 – некоторый фиксированный элемент $F^* \setminus (F^*)^2$. Рассмотрим множество функций

$$\mathcal{K}_1 = \left\{ \varphi_{a,c}^{\pm} : M_1 \to F \right\}, \quad \varphi_{a,c}^{\pm}(z) = \frac{\pm az(a^2 + 3\delta_1 c^2) - c\delta_1(3a^2 + \delta_1 c^2)}{a(a^2 + 3\delta_1 c^2) \mp cz(3a^2 + \delta_1 c^2)},$$

где $a = 0$, $c = 1$ или $a = 1$, $c \in F$.

Относительно бинарной операции $(\phi_1 \circ \phi_2)(z) = \phi_1(\phi_2(z))$ $(\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{K}_1)$ данное множество образует группу, которая действует на множестве M_1 (см. [12]). Множество M_1 разбивается на непересекающиеся орбиты, обозначим через $\mathcal{K}_1 \setminus M_1$ множество их представителей.

Пусть δ_2 такой элемент F, что $\forall x \in F$ $\delta_2 \neq x + x^2$. Пусть $\mu = a^2c + ac^2 + c^3(1+\delta_2)$, $\eta = a^3 + ac^2\delta_2 + c^3\delta_2$,

$$M_2 = \{z \in F \mid \forall s \in \{0,1\}\ \forall a, c \in F,\ a \neq 0 \text{ или } c \neq 0,\ (\eta(1+s) + \mu\delta_2)z + \eta \neq 0\}.$$

Рассмотрим множество функций

$$\mathcal{K}_2 = \{\varphi_{s,a,c} : M_2 \to F\}, \quad \varphi_{s,a,c}(z) = \frac{(\eta + \mu s)z + \mu}{(\eta(1+s) + \mu\delta_2)z + \eta},$$

где $s \in \{0,1\}$, $a, c \in F$, $a \neq 0$ или $c \neq 0$. Относительно бинарной операции $(\phi_1 \circ \phi_2)(z) = \phi_1(\phi_2(z))$ $(\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{K}_2)$ это множество образует группу, которая действует на множестве M_2 (см. [13]). Пусть $\mathcal{K}_2 \setminus M_2$ – множество представителей орбит.

При $p \neq 2$ все попарно неизоморфные коммутативные кольца, рассматриваемые в данной ситуации, определяются следующими четверками матриц (см. теорема 5, [12, с. 57]):

[тип I] $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$,

где $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (\delta_1, 0, 0)\}$, причем набор $(0,1,0)$ определен только для случая $p = 3$;

[тип II] $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$,

где $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(1,1,0), (1,\zeta,0), (\delta_1, \xi, 0)\}$, $\zeta \neq \pm 1$ и $\dfrac{1-\zeta}{1+\zeta} \notin (F^*)^3$, $\xi \in \mathcal{K}_1 \setminus M_1$;

[тип III] $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

При $p = 2$ все попарно неизоморфные коммутативные кольца определяются следующими четверками матриц (см. теорема 1, [13, с. 636]):

[тип I] $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$,

где $(\alpha, \beta) \in \{(0,1), (1,0)\}$,

[тип II] $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$,

где $(\alpha, \beta) \in \{(0,1), (1,0)\}$,

[тип III] $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \beta + \alpha\gamma & \beta \end{pmatrix}$,

где $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(\delta_2, 0, 1),\ (\delta_2, 1, z),\ (0,1,0),\ (0,1,1),\ (0,1,z_0)\}$, $z \in \mathcal{K}_2 \setminus M_2$ и $z_0 + 1 \notin (F^*)^3$. Заметим, что элемент z_0 существует (и матрицы определены) только при $F = GF(2^r)$, где r – четное, так как при нечетном r из любого элемента поля $GF(2^r)$ извлекается кубический корень.

Теорема 1. *Пусть R – коммутативное локальное кольцо характеристики p,*

$$\dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2/J^3 = 2,\ \dim_F J^3 = 1,\ J^4 = 0.$$

Тогда

(1) *если $p = 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times \mathbb{Z}_9^r \times (\mathbb{Z}_3^r)^3$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times (\mathbb{Z}_3^r)^5$;*
(2) *если $p > 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_p^r\right)^5$.*
(3) *если $p = 2$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \mathbb{Z}_4^r \times (\mathbb{Z}_2^r)^3$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times (\mathbb{Z}_4^r)^2 \times \mathbb{Z}_2^r$.*

Доказательство. Обозначим через $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_r$ базис поля $F = GF(p^r)$ над своим простым подполем $\mathbb{Z}_p$. Так как для коммутативных колец группа R^* является прямым произведением циклической группы $\langle b\rangle$ порядка $p^r - 1$ и группы $1 + J$ порядка p^{5r} (см. предложение 2), то для доказательства теоремы достаточно определить только строение группы $1 + J$. Далее, в отдельности изучим каждую ситуацию с типом кольца и возможным значением p.

Случай $p = 3$.

Пусть R – кольцо типа I. Тогда справедливы следующие умножения базисных элементов: $u_1^2 = v_1$, $u_1u_2 = v_2$, $u_2^2 = \alpha v_1 + \gamma w$, $u_1^3 = u_1v_1 = w$, $u_2^3 = \alpha\beta w = 0$, $u_1v_2 = u_2v_1 = \beta w$, $u_2v_2 = \alpha w$. Рассмотрим циклические подгруппы

$$\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle = \left\{1+\varepsilon_i u_1, 1+2\varepsilon_i u_1+\varepsilon_i^2 v_1, 1+\varepsilon_i^3 w, 1+\varepsilon_i u_1+\varepsilon_i^3 w,\right.$$
$$\left. 1+2\varepsilon_i u_1+\varepsilon_i^2 v_1+\varepsilon_i^3 w, 1+2\varepsilon_i^3 w, 1+\varepsilon_i u_1+2\varepsilon_i^2 w, 1+2\varepsilon_i u_1+\varepsilon_i^2 v_1+2\varepsilon_i^3 w, 1\right\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle = \left\{1+\varepsilon_i u_2, 1+2\varepsilon_i u_2+\varepsilon_i^2\left(\alpha v_1+\gamma w\right), 1\right\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle = \left\{1+\varepsilon_i v_1, 1+2\varepsilon_i v_1, 1\right\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_i v_2\rangle = \left\{1+\varepsilon_i v_2, 1+2\varepsilon_i v_2, 1\right\},\quad i=\overline{1,r}.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle| \cdot \prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle| \cdot \prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle| \cdot \prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i v_2\rangle| = 9^r\cdot 3^r\cdot 3^r\cdot 3^r = 3^{5r}.$$

Пусть $k_i \le 9$, $l_i \le 3$, $m_i \le 3$, $n_i \le 3$ – некоторые натуральные числа, для которых выполнено

$$\prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i u_1)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i u_2)^{l_i} \cdot \prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i v_1)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i v_2)^{n_i} = 1. \qquad (1)$$

Докажем, что равенство (1) возможно только когда все множители его левой части равны 1, то есть при $k_i = 9$ и $l_i = m_i = n_i = 3$.

Предположим, что $k_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ для всех $i = \overline{1,r}$. Тогда

$$\prod_{i=1}^r \left(1+\varepsilon_i^3 w\right)^{k_i'} \cdot \prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i u_2)^{l_i} \cdot \prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i v_1)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i v_2)^{n_i} = 1,$$

где $k_i' = \frac{k_i}{3} \in \{1,2,3\}$. Отсюда

$$\prod_{i=1}^r (1+k_i'\varepsilon_i^3 w) \cdot \prod_{i=1}^r \left(1+l_i\varepsilon_i u_2+\binom{l_i}{2}\varepsilon_i^2(\alpha v_1+\gamma w)\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^r (1+m_i\varepsilon_i v_1)\cdot\prod_{i=1}^r (1+n_i\varepsilon_i v_2) = 1,$$

$$\left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^3\right)w\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)u_2+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)(\alpha v_1+\gamma w)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)v_1\right]\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i\right)v_2\right]=1,$$

где $\binom{x}{y}=\dfrac{x!}{y!(x-y)!}$, при $0\le y\le x$, и $\binom{x}{y}=0$, при $0\le x<y$. Следовательно,

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)u_2+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i+\alpha\cdot\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)v_1+\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i\right)v_2+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^3+\gamma\cdot\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}+\beta\cdot\sum_{1\le i,j\le r}l_im_j\varepsilon_i\varepsilon_j+\alpha\cdot\sum_{1\le i,j\le r}l_in_j\varepsilon_i\varepsilon_j\right)w=1.$$

Так как $\{u_1,u_2,v_1,v_2,w\}$, $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\ldots,\varepsilon_r\}$ – базисы, то $\sum\limits_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i=0$ и $l_i=n_i=3$ для всех $i=\overline{1,r}$. Следовательно, числа $\prod\limits_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}$ кратны 3, и равенство принимает вид

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)v_1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^3\right)w=1.$$

Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i=0$ и $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^3$. Следовательно, $m_i=3$, и так как $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^3=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i\right)^3=0$, то $k_i'=3$, а значит, $k_i=9$ для всех $i=\overline{1,r}$.

Пусть существуют числа k_i такие, что $k_i\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 3)$. Тогда, после возведения обеих частей равенства (1) в куб, имеем

$$\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i^3w)^{k_i}=\prod_{i=1}^{r}(1+k_i\varepsilon_i^3w)=1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^3\right)w=1.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^3=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i\right)^3=0$, а значит, $k_i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$ для всех $i=\overline{1,r}$. Противоречие.

Итак, произведение рассматриваемых $4r$ циклических подгрупп является прямым и

$$1+J=\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_iu_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_iu_2\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_iv_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_iv_2\rangle\cong\mathbb{Z}_9^r\times(\mathbb{Z}_3^r)^3.$$

Пусть R – кольцо типа II. В случае $\mathrm{char}R=3$ элементы ζ, ξ не определены ($M_1=\varnothing$, см. [12]), и необходимо рассмотреть только ситуацию

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

в которой базисные элементы перемножаются по правилам: $u_1^2 = v_1$, $u_1u_2 = v_2$, $u_2^2 = v_1$, $u_1v_1 = u_1v_2 = u_2v_1 = u_2v_2 = w$, $u_1^3 = u_1v_1 = w$, $u_2^3 = u_2v_1 = w$. Рассмотрим циклические подгруппы

$$\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle = \left\{1+\varepsilon_i u_1, 1+2\varepsilon_i u_1+\varepsilon_i^2 v_1, 1+\varepsilon_i^3 w, 1+\varepsilon_i u_1+\varepsilon_i^3 w,\right.$$
$$\left.1+2\varepsilon_i u_1+\varepsilon_i^2 v_1+\varepsilon_i^3 w, 1+2\varepsilon_i^3 w, 1+\varepsilon_i u_1+2\varepsilon_i^2 w, 1+2\varepsilon_i u_1+\varepsilon_i^2 v_1+2\varepsilon_i^3 w, 1\right\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_i u_1+2\varepsilon_i u_2\rangle = \left\{1+\varepsilon_i u_1+2\varepsilon_i u_2, 1+2\varepsilon_i u_1+\varepsilon_i u_2+2\varepsilon_i^2 v_1+\varepsilon_i^2 v_2, 1\right\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle = \{1+\varepsilon_i v_1, 1+2\varepsilon_i v_1, 1\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_i v_2\rangle = \{1+\varepsilon_i v_2, 1+2\varepsilon_i v_2, 1\}, \quad i=\overline{1,r}.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle|\cdot\prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i u_1+2\varepsilon_i u_2\rangle|\cdot\prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle|\cdot\prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i v_2\rangle| = 9^r\cdot 3^r\cdot 3^r\cdot 3^r = 3^{5r}.$$

Пусть $k_i \le 9$, $l_i \le 3$, $m_i \le 3$, $n_i \le 3$ – некоторые натуральные числа, для которых выполнено

$$\prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i u_1)^{k_i}\cdot\prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i u_1+2\varepsilon_i u_2)^{l_i}\cdot\prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i v_1)^{m_i}\cdot\prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i v_2)^{n_i} = 1. \quad (2)$$

Докажем, что равенство (2) возможно, только когда все множители его левой части равны 1, то есть при $k_i = 9$ и $l_i = m_i = n_i = 3$.

Предположим, что $k_i \equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$ для всех $i=\overline{1,r}$. Тогда

$$\prod_{i=1}^r \left(1+\varepsilon_i^3 w\right)^{k_i'}\cdot\prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i u_1+2\varepsilon_i u_2)^{l_i}\cdot\prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i v_1)^{m_i}\cdot\prod_{i=1}^r (1+\varepsilon_i v_2)^{n_i} = 1,$$

где $k_i' = \frac{k_i}{3} \in \{1,2,3\}$. Отсюда

$$\prod_{i=1}^r \left(1+k_i'\varepsilon_i^3 w\right)\cdot\prod_{i=1}^r \left(1+l_i\varepsilon_i u_1+2l_i\varepsilon_i u_2+2\binom{l_i}{2}\varepsilon_i^2 v_1+\binom{l_i}{2}\varepsilon_i^2 v_2)\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^r (1+m_i\varepsilon_i v_1)\cdot\prod_{i=1}^r (1+n_i\varepsilon_i v_2) = 1,$$

$$\left[1+\left(\sum_{i=1}^r k_i'\varepsilon_i^3\right)w\right]\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^r l_i\varepsilon_i\right)u_1+2\left(\sum_{i=1}^r l_i\varepsilon_i\right)u_2+\right.$$
$$\left.+2\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^r\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)v_1+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^r\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)v_2\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^r m_i\varepsilon_i\right)v_1\right]\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^r n_i\varepsilon_i\right)v_2\right] = 1,$$

$$1+\left(\sum_{i=1}^r l_i\varepsilon_i\right)u_1+2\left(\sum_{i=1}^r l_i\varepsilon_i\right)u_2+\left(\sum_{i=1}^r m_i\varepsilon_i+2\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^r\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)\right)v_1+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^r n_i\varepsilon_i+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^r\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)\right)v_2+\left(\sum_{i=1}^r k_i'\varepsilon_i^3\right)w = 1.$$

Так как $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_r\}$ – базисы, то $\sum\limits_{i=1}^{r} l_i\varepsilon_i = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i'\varepsilon_i^3 = 0$. Следовательно, $l_i = 3$ и так как $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i'\varepsilon_i^3 = \left(\sum\limits_{i=1}^{r} k_i'\varepsilon_i\right)^3 = 0$, то $k_i' = 3$, а значит, $k_i = 9$ для всех $i = \overline{1,r}$. Заметим, что числа $\prod\limits_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}$ кратны 3, и равенство принимает вид

$$1 + \left(\sum_{i=1}^{r} m_i\varepsilon_i\right) v_1 + \left(\sum_{i=1}^{r} n_i\varepsilon_i\right) v_2 = 1.$$

Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{r} m_i\varepsilon_i = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i\varepsilon_i = 0$ и, следовательно, $m_i = 3$, $n_i = 3$.

Пусть существуют числа k_i такие, что $k_i \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 3)$. Тогда, после возведения обеих частей равенства (2) в куб, имеем

$$\prod_{i=1}^{r}(1 + \varepsilon_i^3 w)^{k_i} = \prod_{i=1}^{r}(1 + k_i\varepsilon_i^3 w) = 1 + \left(\sum_{i=1}^{r} k_i\varepsilon_i^3\right) w = 1.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i\varepsilon_i^3 = \left(\sum\limits_{i=1}^{r} k_i\varepsilon_i\right)^3 = 0$, а значит, $k_i \equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$ для всех $i = \overline{1,r}$. Противоречие.

Итак, произведение рассматриваемых $4r$ циклических подгрупп является прямым и

$$1+J = \prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle \times \prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_1 + 2\varepsilon_i u_2\rangle \times \prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle \times \prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i v_2\rangle \cong \mathbb{Z}_9^r \times (\mathbb{Z}_3^r)^3 .$$

Рассмотрим кольца типа III. В этом случае справедливы следующие умножения для базисных элементов: $u_1^2 = v_1$, $u_1u_2 = u_2u_1 = v_2$, $u_2^2 = 0$, $u_1v_2 = u_2v_1 = w$, $u_1v_1 = u_2v_2 = 0$, $u_1^3 = u_1v_1 = 0$, $u_2^3 = 0$. Рассмотрим циклические подгруппы

$$\langle 1 + \varepsilon_i u_1\rangle = \left\{1 + \varepsilon_i u_1, 1 + 2\varepsilon_i u_1 + \varepsilon_i^2 v_1, 1\right\},$$

$$\langle 1 + \varepsilon_i u_2\rangle = \{1 + \varepsilon_i u_2, 1 + 2\varepsilon_i u_2, 1\},$$

$$\langle 1 + \varepsilon_i v_1\rangle = \{1 + \varepsilon_i v_1, 1 + 2\varepsilon_i v_1, 1\},$$

$$\langle 1 + \varepsilon_i v_2\rangle = \{1 + \varepsilon_i v_2, 1 + 2\varepsilon_i v_2, 1\},$$

$$\langle 1 + \varepsilon_i w\rangle = \{1 + \varepsilon_i w, 1 + 2\varepsilon_i w, 1\}, \quad i = \overline{1,r}.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle| \cdot \prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle| \cdot \prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle| \cdot \prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i v_2\rangle| \cdot \prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i w\rangle| = 3^{5r}.$$

Пусть $k_i \le 3$, $l_i \le 3$, $m_i \le 3$, $n_i \le 3$, $q_i \le 3$ – некоторые натуральные числа, для которых выполнено

$$\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_1)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_2)^{l_i} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i v_1)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i v_2)^{n_i} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i w)^{q_i} = 1. \quad (3)$$

Докажем, что равенство (3) возможно, только когда все множители его левой части равны 1, то есть при $k_i = l_i = m_i = n_i = q_i = 3$. Получаем

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1 + k_i\varepsilon_i u_1 + \binom{k_i}{2}\varepsilon_i^2 v_1\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}(1 + l_i\varepsilon_i u_2)\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{r}(1 + m_i\varepsilon_i v_1)\cdot\prod_{i=1}^{r}(1 + n_i\varepsilon_i v_2)\cdot\prod_{i=1}^{r}(1 + q_i\varepsilon_i w) = 1,$$

$$\left[1 + \left(\sum_{i=1}^{r} k_i\varepsilon_i\right)u_1 + \left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)v_1\right]\cdot\left[1 + \left(\sum_{i=1}^{r} l_i\varepsilon_i\right)u_2\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1 + \left(\sum_{i=1}^{r} m_i\varepsilon_i\right)v_1\right]\cdot\left[1 + \left(\sum_{i=1}^{r} n_i\varepsilon_i\right)v_2\right]\cdot\left[1 + \left(\sum_{i=1}^{r} q_i\varepsilon_i\right)w\right] = 1,$$

$$1 + \left(\sum_{i=1}^{r} k_i\varepsilon_i\right)u_1 + \left(\sum_{i=1}^{r} l_i\varepsilon_i\right)u_2 +$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{r} m_i\varepsilon_i + \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)v_1 + \left(\sum_{i=1}^{r} n_i\varepsilon_i + \sum_{1\le i,j\le r}^{r} k_i l_j\varepsilon_i\varepsilon_j\right)v_2 +$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{r} q_i\varepsilon_i + \left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{r} l_i\varepsilon_i\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{1\le i,j\le r}^{r} k_i n_j\varepsilon_i\varepsilon_j + \sum_{1\le i,j\le r}^{r} l_i m_j\varepsilon_i\varepsilon_j\right)w = 1.$$

Так как $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_r\}$ – базисы, то $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i\varepsilon_i = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r} l_i\varepsilon_i = 0$ и $k_i = l_i = 3$ для всех $i = \overline{1, r}$. Следовательно, числа $\prod\limits_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}$ кратны 3, и равенство принимает вид

$$1 + \left(\sum_{i=1}^{r} m_i\varepsilon_i\right)v_1 + \left(\sum_{i=1}^{r} n_i\varepsilon_i\right)v_2 + \left(\sum_{i=1}^{r} q_i\varepsilon_i\right)w = 1.$$

Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{r} m_i\varepsilon_i = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i\varepsilon_i = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i\varepsilon_i = 0$, а следовательно, $m_i = n_i = q_i = 3$ для всех $i = \overline{1, r}$.

Итак, произведение рассматриваемых $4r$ циклических подгрупп является прямым и

$$1+J = \prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i v_2\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i w\rangle \cong \left(\mathbb{Z}_3^r\right)^5.$$

Случай $p > 3$.

В данном случае все кольца объединим в один тип:

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix}\nu & \beta\\ \beta & \alpha\nu\end{pmatrix},$$

где $(\alpha,\beta,\gamma,\nu)\in\{(0,0,0,1),(0,0,1,1),(1,0,0,1),(\delta_1,0,0,1),(1,1,0,1),(1,\zeta,0,1),$ $(\delta_1,\xi,0,1),(0,1,0,0)\}$, $\zeta\neq\pm 1$ и $\dfrac{1-\zeta}{1+\zeta}\notin(F^*)^3$, $\xi\in\mathcal{K}_1\backslash M_1$;

Рассмотрим циклические подгруппы

$$\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle=\left\{1+k\varepsilon_i u_1+C_k^2\varepsilon_i^2 v_1+C_k^3\varepsilon_i^3\nu w\mid k=\overline{1,p}\right\},$$

$$\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle=\left\{1+k\varepsilon_i u_2+C_k^2\varepsilon_i^2(\alpha v_1+\gamma w)+C_k^3\varepsilon_i^3\alpha\beta w\mid k=\overline{1,p}\right\},$$

$$\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle=\left\{1+k\varepsilon_i v_1\mid k=\overline{1,p}\right\},$$

$$\langle 1+\varepsilon_i v_2\rangle=\left\{1+k\varepsilon_i v_2\mid k=\overline{1,p}\right\},$$

$$\langle 1+\varepsilon_i w\rangle=\left\{1+k\varepsilon_i w\mid k=\overline{1,p}\right\},\quad i=\overline{1,r}.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^r|\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle|\cdot\prod_{i=1}^r|\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle|\cdot\prod_{i=1}^r|\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle|\cdot\prod_{i=1}^r|\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle|\cdot\prod_{i=1}^r|\langle 1+\varepsilon_i w\rangle|=p^{5r}.$$

Пусть k_i, l_i, m_i, n_i, q_i – некоторые натуральные числа, не превосходящие p, для которых выполнено равенство

$$\prod_{i=1}^r(1+\varepsilon_i u_1)^{k_i}\cdot\prod_{i=1}^r(1+\varepsilon_i u_2)^{l_i}\cdot\prod_{i=1}^r(1+\varepsilon_i v_1)^{m_i}\cdot\prod_{i=1}^r(1+\varepsilon_i v_2)^{n_i}\cdot\prod_{i=1}^r(1+\varepsilon_i w)^{q_i}=1.\quad(4)$$

Тогда

$$\prod_{i=1}^r\left(1+k_i\varepsilon_i u_1+\binom{k_i}{2}\varepsilon_i^2 v_1+\binom{k_i}{3}\varepsilon_i^3\nu w\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^r\left(1+l_i\varepsilon_i u_2+\binom{l_i}{2}\varepsilon_i^2(\alpha v_1+\gamma w)+\binom{l_i}{3}\varepsilon_i^3\alpha\beta w\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^r(1+m_i\varepsilon_i v_1)\cdot\prod_{i=1}^r(1+n_i\varepsilon_i v_2)\cdot\prod_{i=1}^r(1+q_i\varepsilon_i w)=1,$$

$$\left[1+\left(\sum_{i=1}^r k_i\varepsilon_i\right)u_1+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^r\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)v_1+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=3}\prod_{i=1}^r\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)\nu w\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^r l_i\varepsilon_i\right)u_2+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^r\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)(\alpha v_1+\gamma w)+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=3}\prod_{i=1}^r\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)\alpha\beta w\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^r m_i\varepsilon_i\right)v_1\right]\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^r n_i\varepsilon_i\right)v_2\right]\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^r q_i\varepsilon_i\right)w\right]=1,$$

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i\right)u_1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)u_2+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i+\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}+\alpha\cdot\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)v_1+$$
$$+\left(\sum_{1\le i,j\le r}k_il_j\varepsilon_i\varepsilon_j+\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i\right)v_2+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{r}q_i\varepsilon_i+\alpha\beta\cdot\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=3}\prod_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}+\gamma\cdot\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}+\right.$$
$$+\nu\cdot\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=3}\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}+\nu\cdot\sum_{1\le i,j\le r}k_im_j\varepsilon_i\varepsilon_j+\beta\cdot\sum_{1\le i,j\le r}k_in_j\varepsilon_i\varepsilon_j+$$
$$+\beta\cdot\sum_{1\le i,j\le r}l_im_j\varepsilon_i\varepsilon_j+\alpha\nu\cdot\sum_{1\le i,j\le r}l_in_j\varepsilon_i\varepsilon_j+$$
$$+\alpha\nu\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i\right)\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)+$$
$$\left.+\beta\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)\right)w=1.$$

Так как $\{u_1,u_2,v_1,v_2,w\}$, $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\ldots,\varepsilon_r\}$ – базисы, то $k_i=l_i=p$ для всех $i=\overline{1,r}$. Следовательно, числа $\prod\limits_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}$, $\prod\limits_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}$ кратны p, и равенство упрощается к виду

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)v_1+\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i\right)v_2+\left(\sum_{i=1}^{r}q_i\varepsilon_i\right)w=1,$$

из которого мы получаем $n_i=m_i=q_i=p$.

Таким образом, произведение рассматриваемых $5r$ циклических подгрупп является прямым и

$$1+J=\prod_{i=1}^{r}\langle1+\varepsilon_iu_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle1+\varepsilon_iu_2\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle1+\varepsilon_iv_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle1+\varepsilon_iv_2\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle1+\varepsilon_iw\rangle\cong\left(\mathbb{Z}_p^r\right)^5.$$

Случай $p=2$.

Пусть R – кольцо типа I. В этом случае: $u_1^2=v_2$, $u_1u_2=v_1$, $u_2^2=0$, $u_1v_1=u_2v_2=\alpha w$, $u_1v_2=\beta w$, $u_2v_1=0$. Рассмотрим циклические подгруппы

$$\langle1+\varepsilon_iu_1\rangle=\left\{1+\varepsilon_iu_1,1+\varepsilon_i^2v_2,1+\varepsilon_iu_1+\varepsilon_i^2v_2+\varepsilon_i^3\beta w,1\right\},$$
$$\langle1+\varepsilon_iu_2\rangle=\{1+\varepsilon_iu_2,1\},$$
$$\langle1+\varepsilon_iv_1\rangle=\{1+\varepsilon_iv_1,1\},$$
$$\langle1+\varepsilon_iw\rangle=\{1+\varepsilon_iw,1\},\quad i=\overline{1,r}.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{r}|\langle1+\varepsilon_iu_1\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle1+\varepsilon_iu_2\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle1+\varepsilon_iv_1\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle1+\varepsilon_iw\rangle|=4^r\cdot2^r\cdot2^r\cdot2^r=2^{5r}.$$

Пусть $k_i \leq 4$, $l_i \leq 2$, $m_i \leq 2$, $n_i \leq 2$ – некоторые натуральные числа, для которых выполнено равенство

$$\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_1)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_2)^{l_i} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i v_1)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i w)^{n_i} = 1. \tag{5}$$

Предположим, что k_i – четные числа и $k_i' = \frac{k_i}{2}$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2 v_2\right)^{k_i'} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_2)^{l_i} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i v_1)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i w)^{n_i} = 1.$$

Отсюда

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+k_i'\varepsilon_i^2 v_2\right) \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+l_i\varepsilon_i u_2) \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+m_i\varepsilon_i v_1) \cdot \prod_{i=1}^{r}(1+n_i\varepsilon_i w) = 1,$$

$$\left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2\right)v_2\right] \cdot \left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)u_2\right] \cdot \\ \cdot \left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)v_1\right] \cdot \left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i\right)w\right] = 1,$$

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)u_2+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)v_1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2\right)v_2+ \\ +\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i+\alpha\cdot\sum_{1\leq i,j\leq r}k_i'l_j\varepsilon_i^2\varepsilon_j\right)w = 1.$$

Так как $\{u_1, u_2, u_3, v, w\}$, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_r\}$ – базисы, то $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i'\varepsilon_i^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{r} k_i'\varepsilon_i\right)^2 = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r} m_i\varepsilon_i = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r} l_i\varepsilon_i = 0$. Следовательно, $k_i' = l_i = m_i = 2$, а значит, $k_i = 4$ для всех $i = \overline{1,r}$. Таким образом, равенство (5) принимает вид

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i\right)w = 1$$

из которого следует $n_i = 2$ для всех $i = \overline{1,r}$.

Предположим, что k_i – нечетное число для некоторого $i \in \{1,\ldots,r\}$. Тогда, после возведения обеих частей равенства (5) в квадрат, получаем

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2 v_2\right)^{k_i} = \prod_{i=1}^{r}\left(1+k_i\varepsilon_i^2 v_2\right) = 1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^2\right)v_2 = 1.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i\varepsilon_i^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{r} k_i\varepsilon_i\right)^2 = 0$, а значит, k_i – четные числа для всех $i = \overline{1,r}$. Противоречие.

Итак, произведение рассматриваемых $4r$ циклических подгрупп является прямым и

$$1+J=\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i w\rangle\cong\mathbb{Z}_4^r\times\left(\mathbb{Z}_2^r\right)^3.$$

Пусть R – кольцо типа II. Тогда справедливы следующие умножения: $u_1^2=v_2$, $u_1u_2=v_1$, $u_2^2=w$, $u_1v_1=u_2v_2=\alpha w$, $u_1v_2=\beta w$, $u_1^3=\beta w$, $u_2^3=0$. Рассмотрим циклические подгруппы

$$\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle=\left\{1+\varepsilon_i u_1, 1+\varepsilon_i^2 v_2, 1+\varepsilon_i u_1+\varepsilon_i^2 v_2+\varepsilon_i^3\beta w, 1\right\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle=\left\{1+\varepsilon_i u_2, 1+\varepsilon_i^2 w, 1+\varepsilon_i u_2+\varepsilon_i^2 w, 1\right\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle=\{1+\varepsilon_i v_1, 1\},\quad i=\overline{1,r}.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle|=4^r\cdot 4^r\cdot 2^r=2^{5r}.$$

Пусть $k_i\le 4$, $l_i\le 4$, $m_i\le 2$ – некоторые натуральные числа, для которых выполнено равенство

$$\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_1)^{k_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_2)^{l_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i v_1)^{m_i}=1. \tag{6}$$

Предположим, что k_i и l_i – четные числа и $k_i'=\frac{k_i}{2}$, $l_i'=\frac{l_i}{2}$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2 v_2\right)^{k_i'}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i^2 w)^{l_i'}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i v_1)^{m_i}=1,$$

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+k_i'\varepsilon_i^2 v_2\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1+l_i'\varepsilon_i^2 w\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1+m_i\varepsilon_i v_1\right)=1,$$

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)v_1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2\right)v_2+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i^2\right)w=1.$$

Так как $\{u_1,u_2,u_3,v,w\}$, $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\ldots,\varepsilon_r\}$ – базисы, то $\sum\limits_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i\right)^2=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i\right)^2=0$. Следовательно, $m_i=2$, $k_i'=l_i'=2$ и $k_i=l_i=4$ для всех $i=\overline{1,r}$.

Предположим, что k_i или l_i – нечетное число для некоторого $i\in\{1,\ldots,r\}$. Тогда, после возведения обеих частей равенства (6) в квадрат, получаем

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2 v_2\right)^{k_i}\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2 w\right)^{l_i}=\prod_{i=1}^{r}\left(1+k_i\varepsilon_i^2 v_2\right)\prod_{i=1}^{r}\left(1+l_i\varepsilon_i^2 w\right)=$$
$$=\left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^2\right)v_2\right]\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i^2\right)w\right]=1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^2\right)v_2+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i^2\right)w=1.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i\right)^2=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)^2=0$, а значит, k_i и l_i – четные числа для всех $i=\overline{1,r}$. Противоречие.

Итак, произведение рассматриваемых $4r$ циклических подгрупп является прямым и

$$1+J=\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i v_1\rangle\cong\left(\mathbb{Z}_4^r\right)^2\times\mathbb{Z}_2^r.$$

Пусть R – кольцо типа III. Тогда $u_1^2=v_2$, $u_1u_2=v_1$, $u_2^2=v_1+\alpha v_2$, $u_1v_1=\beta w$, $u_1v_2=\gamma w$, $u_2v_1=(\beta+\alpha\gamma)w$, $u_2v_2=\beta w$, $u_1^3=u_1v_2=\gamma w$, $u_2^3=(v_1+\alpha v_2)u_2=(\beta+\alpha\gamma+\alpha\beta)w$. Рассмотрим циклические подгруппы

$$\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle=\left\{1+\varepsilon_i u_1, 1+\varepsilon_i^2 v_2, 1+\varepsilon_i u_1+\varepsilon_i^2 v_2+\varepsilon_i^3\gamma w, 1\right\},$$

$$\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle=\left\{1+\varepsilon_i u_2, 1+\varepsilon_i^2(v_1+\alpha v_2),\right.$$
$$\left.1+\varepsilon_i u_2+\varepsilon_i^2(v_1+\alpha v_2)+\varepsilon_i^3(\beta+\alpha\gamma+\alpha\beta)w, 1\right\},$$

$$\langle 1+\varepsilon_i w\rangle=\left\{1+\varepsilon_i w, 1\right\},\quad i=\overline{1,r}.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i w\rangle|=4^r\cdot 4^r\cdot 2^r=2^{5r}.$$

Пусть $k_i\le 4$, $l_i\le 4$, $m_i\le 2$ – некоторые натуральные числа, для которых выполнено равенство

$$\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_1)^{k_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_2)^{l_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i w)^{m_i}=1.\tag{7}$$

Предположим, что k_i и l_i – четные числа и $k_i'=\frac{k_i}{2}$, $l_i'=\frac{l_i}{2}$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2 v_2\right)^{k_i'}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i^2(v_1+\alpha v_2))^{l_i'}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i w)^{m_i}=1.$$

Отсюда

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+k_i'\varepsilon_i^2 v_2\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1+l_i'\varepsilon_i^2(v_1+\alpha v_2)\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+m_i\varepsilon_i w)=1,$$

$$\left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2\right)v_2\right]\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i^2\right)(v_1+\alpha v_2)\right]\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)w\right]=1,$$

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i^2\right)v_1+\left(\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2\right)+\alpha\left(\sum_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i^2\right)\right)v_2+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)w=1.$$

Так как $\{u_1,u_2,u_3,v,w\}$, $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\ldots,\varepsilon_r\}$ – базисы, то $\sum\limits_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i\right)^2=0$. Следовательно, $m_i=2$, $l_i'=2$, а значит, $l_i=4$ для всех $i=\overline{1,r}$. Получаем равенство

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2\right)v_2=1,$$

из которого следует, что $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i'\varepsilon_i^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{r} k_i'\varepsilon_i\right)^2 = 0$, то есть $k_i' = 2$, $k_i = 4$.

Предположим, что k_i или l_i – нечетное число для некоторого $i \in \{1, \ldots, r\}$. Тогда, после возведения обеих частей равенства (7) в квадрат, имеем

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2 v_2\right)^{k_i}\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2(v_1+\alpha v_2)\right)^{l_i} = \\
&\qquad = \prod_{i=1}^{r}\left(1+k_i\varepsilon_i^2 v_2\right)\prod_{i=1}^{r}\left(1+l_i\varepsilon_i^2(v_1+\alpha v_2)\right) = \\
&\qquad = \left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^2\right)v_2\right]\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i^2\right)(v_1+\alpha v_2)\right] = \\
&\qquad = 1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i^2\right)v_1+\left(\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^2\right)+\alpha\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i^2\right)\right)v_2 = 1.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i\varepsilon_i^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{r} k_i\varepsilon_i\right)^2 = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r} l_i\varepsilon_i^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{r} l_i\varepsilon_i\right)^2 = 0$, а значит, k_i и l_i – четные числа для всех $i = \overline{1,r}$. Противоречие.

Итак, произведение рассматриваемых $4r$ циклических подгрупп является прямым и

$$1+J=\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i w\rangle\cong\left(\mathbb{Z}_4^r\right)^2\times\mathbb{Z}_2^r.$$

□

References

[1] R. Raghavendran, *Finite associative rings*, Compositio Math., **21** (1969), 195–229. MR0246905

[2] B.R. McDonald, *Finite rings with identity*, Decker, 1974. MR0354768

[3] C.J. Chikunji, *Unit groups of cube radical zero commutative completely primary finite rings*, Int. J. Math. Sci., **4** (2005), 572–579. MR2172397

[4] C.J. Chikunji, *Unit groups of a certain class of completely primary finite rings*, Math. J. Okayama Univ., **47** (2005), 39–53. MR2198859

[5] R.W. Gilmer, *Finite rings having a cyclic multiplicative group of units*, Amer. J. Math., **85** (1963), 447–452. MR0154884

[6] G. Ganske, B.R. McDonald, *Finite local rings*, Rocky Mountain J. Math., **3**:4 (1973), 521–540. MR0364218

[7] C.J. Chikunji, *On unit groups of completely primary finite rings*, Math. J. Okayama Univ., **50** (2008), 149–160. MR2376553

[8] C.J. Chikunji, *Unit groups of finite rings with products of zero divisors in their coefficient subrings*, Publication de l'institut mathe'matique, **95 (109)** (2014), 215–220. MR3221228

[9] C.J. Chikunji, *Groups of units of commutative completely primary finite rings*, IMHOTEP — Math. Proc., **1** (2014), 40–48. MR3486838

[10] O.M. Oduor, O.M. Onyango, *Unit groups of some classes of power four radical zero commutative completely primary finite rings*, International Journal of algebra, **8** (2014), 357–363.

[11] E.V. Zhuravlev, *On unit group of a finite local rings of characteristic p*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 362–371. MR3488429

[12] E.V. Zhuravlev, *Local rings of order p^6 with 4-nilpotent radical of Jacobson*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **3** (2006), 15–29. MR2172790

[13] E.V. Zhuravlev, *On the classification of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 625–638. MR3493740

Evgeniy Vladimirovich Zhuravlev
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: evzhuravlev@mail.ru