S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 568–585 (2017) УДК 517.95

DOI 10.17377/semi.2017.14.049 MSC 35A05

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПОЛИТРОПНОГО ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Д.А. ПРОКУДИН

Abstract. The initial-boundary value problem is considered for a model system of one-dimensional equations describing unsteady polytropic motion of a mixture of viscous compressible fluids. The existence and uniqueness theorem is proved for a strong solution of the problem without restrictions on the structure of the viscosity matrices, except standard requirements of symmetry and positive definiteness.

Keywords: existence and uniqueness theorem, unsteady initial boundary value problem, viscous compressible fluid, mixture with multiple velocities.

1. Введение

В работе рассматривается модель многокомпонентных многоскоростных смесей вязких сжимаемых жидкостей. Для нее теоремы о глобальном существовании слабых решений многомерных задач были получены совсем недавно (см., например, [1]–[8]), благодаря чему состояние этой теории стало сопоставимо с таковым для однокомпонентных моделей. При этом открылись проблемы, характерные именно для смесей, и отличающие их принципиально от однокомпонентных моделей. В определенной степени эти трудности описаны в [9], [10]. Для многих из них пока неясны пути преодоления.

Prokudin, D.A., Unique solvability of initial-boundary value problem for a model system of equations for the polytropic motion of a mixture of viscous compressible fluids.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15–11–20019).

Поступила 30 мая 2017 г., опубликована 5 июля 2017 г.

Как и в многомерном случае, классические результаты для однокомпонентного вязкого газа не переносятся на многокомпонентный одномерный случай каким–то автоматическим образом, в частности, в силу принципиально иной структуры вязких членов — наличия недиагональной матрицы вязкостей. Это отличие по своей сложности не зависит от размерности движения. Корректность для моделей смесей с диагональной матрицей вязкостей в одномерном случае получена в [11], [12].

В предлагаемой работе изучается модельная система одномерных уравнений многоскоростного континуума, в которой удалось полностью снять какие–либо ограничения на матрицу вязкостей, кроме стандартных требований симметричности и положительной определенности, и тем самым преодолеть математические трудности, специфические для смесей.

2. Постановка задачи и основной результат

Рассматривается задача об одномерном политропном течении смеси $N \geqslant 2$ компонент. В замыкании $\overline{Q}_T$ (здесь и далее $Q_t = (0,1) \times (0,t)$), где $T > 0$ — произвольное действительное число, требуется найти плотность смеси $\rho > 0$ и скорости u_i для каждой компоненты смеси с номером $i = 1, \dots, N$, удовлетворяющие следующей системе уравнений, начальных и краевых условий:

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \quad v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i, \tag{1}$$

$$\rho\left(\partial_t u_i + v\partial_x u_i\right) + K\partial_x \rho^\gamma = \sum_{j=1}^{N} \mu_{ij}\partial_{xx}u_j + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(u_j - u_i), \quad i = 1, \dots, N, \tag{2}$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{3}$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Здесь v — средняя скорость смеси; величины $K > 0$, $\gamma > 1$, $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ и $a_{ij} = a_{ji} > 0$, $i, j = 1, \dots, N$ являются известными постоянными, причем коэффициенты вязкостей $\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$ образуют матрицу $\mathbf{M} > 0$; функции начальных данных ρ_0, u_{0i}, $i = 1, \dots, N$ заданы.

Уравнение (1) представляет собой закон сохранения массы, а уравнения (2) отвечают закону сохранения импульса. Матрица $\{a_{ij}\}$, отвечающая за обмен импульсом, не обязательно положительно определена, в отличие от матрицы вязкостей $\mathbf{M}$.

Целью статьи является доказательство существования и единственности сильного решения задачи (1)–(4).

Определение 1. *Сильным решением задачи* (1)–(4) *называется совокупность $N+1$ функций $(\rho, u_1, \dots, u_N)$ таких, что уравнения* (1), (2) *выполнены почти всюду в Q_T, начальные условия* (3) *— для п. в. $x \in (0,1)$, а краевые условия* (4) *— для п. в. $t \in (0,T)$, и справедливы неравенство и включения* $(i = 1, \dots, N)$

$$\begin{gathered} \rho > 0, \quad \rho \in L_\infty\big(0,T; W_2^1(0,1)\big), \quad \partial_t\rho \in L_\infty\big(0,T; L_2(0,1)\big), \\ u_i \in L_\infty\big(0,T; W_2^1(0,1)\big) \bigcap L_2\big(0,T; W_2^2(0,1)\big), \quad \partial_t u_i \in L_2(Q_T). \end{gathered} \tag{5}$$

Основной результат статьи формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть начальные данные в* (3) *удовлетворяют условиям*

$$\rho_0 \in W_2^1(0,1), \quad \rho_0 > 0, \quad u_{0i} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{6}$$

симметричная матрица вязкостей $\boldsymbol{M}$ *положительно определена, показатель политропы* $\gamma > 1$*, остальные числовые параметры* K*,* $a_{ij} = a_{ji}$*,* $i, j = 1, \ldots, N$ *положительны.*

Тогда существует достаточно малое число $t_0 \in (0,T)$ *такое, что для всех* $t \in (0, t_0)$ *существует единственное сильное решение задачи* (1)–(4) *в смысле определения 1, где вместо* T *стоит* t_0*.*

Доказательство теоремы 2 будет проведено в разделах 3–6 настоящей работы.

3. Конструкция приближенных решений

В данном разделе докажем локальную по времени разрешимость начально-краевой задачи, полученной из задачи (1)–(4) применением метода Галёркина (по пространственной переменной x) в уравнениях импульсов (2).

Лемма 3. *В предположениях теоремы 2 для любого* $m \in \mathbb{N}$ *найдется интервал времени* $(0, t_m) \subset (0,T)$ *(см.* (21)*), на котором существует решение*[1] *задачи (здесь* $k = 1, \ldots, m$*,* $i = 1, \ldots, N$*)*

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \quad v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} u_i, \tag{7}$$

$$\int_0^1 \Big(\rho \left(\partial_t u_i + v \partial_x u_i \right) + K \partial_x \rho^\gamma - \sum_{j=1}^{N} \mu_{ij} \partial_{xx} u_j - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(u_j - u_i) \Big) \omega_k(x)\, dx = 0, \tag{8}$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \tag{9}$$

$$u_i = \sum_{k=1}^{m} \psi_{ik}(t) \omega_k(x), \quad u_i|_{t=0} = \sum_{k=1}^{m} \psi_{0ik} \omega_k(x), \tag{10}$$

где $\omega_k(x) = \sin(\pi k x)$*,* $\psi_{ik}(0) = \psi_{0ik} = 2 \int_0^1 u_{0i}(x) \omega_k(x)\, dx$*, при этом*

$$\begin{gathered} \rho \in L_\infty\big(0, t_m; W_2^1(0,1)\big) \bigcap W_\infty^1\big(0, t_m; L_2(0,1)\big), \quad \rho > 0, \\ u_i \in C^{1,\infty}([0, t_m] \times [0,1]). \end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство. Зафиксируем пока произвольно $t_m \in (0,T]$. В пространстве $(C[0,t_m])^{mN}$ рассмотрим множество

$$B = \left\{ \boldsymbol{\psi} \in (C[0,t_m])^{mN} \,|\; \boldsymbol{\psi}(0) = \boldsymbol{\psi}_0, \;\; \|\boldsymbol{\psi}\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leqslant b \right\},$$

[1] До начала пятого раздела в обозначении решений будем опускать индекс m.

где при всех $i = 1, \ldots, N$

$$\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_N), \quad \boldsymbol{\psi}_i = (\psi_{i1}, \ldots, \psi_{im}), \quad \boldsymbol{\psi}_0 = (\boldsymbol{\psi}_{01}, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{0N}),$$

$$\boldsymbol{\psi}_{0i} = (\psi_{0i1}, \ldots, \psi_{0im}), \quad b^2 = e^{\frac{\sup\limits_{[0,1]} \rho_0}{\inf\limits_{[0,1]} \rho_0}} \|\boldsymbol{\psi}_0\|^2_{\mathbb{R}^{mN}} + 1.$$

Построим оператор $\Lambda : B \to (C[0, t_m])^{mN}$, $\operatorname{Im} \Lambda \subset (C^1[0, t_m])^{mN}$, $\Lambda(\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\Psi}$, где $\boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{\Psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Psi}_N)$, $\boldsymbol{\Psi}_i = (\Psi_{i1}, \ldots, \Psi_{im})$, $i = 1, \ldots, N$, по следующему алгоритму. На первом шаге найдем функцию

$$\rho \in L_\infty\big(0, t_m; W_2^1(0,1)\big) \bigcap W_\infty^1\big(0, t_m; L_2(0,1)\big), \quad \rho > 0,$$

как решение задачи Коши (7), (9), где u_i, $i = 1, \ldots, N$, задаются по формулам (10). При этом справедливы неравенства

$$\rho(x,t) \geqslant \Big(\inf_{[0,1]} \rho_0\Big) \exp\left\{-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_0^t \sup_{[0,1]} |\partial_x u_i|\, d\tau\right\},$$

(12)

$$\rho(x,t) \leqslant \Big(\sup_{[0,1]} \rho_0\Big) \exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_0^t \sup_{[0,1]} |\partial_x u_i|\, d\tau\right\},$$

которые, в силу включения $\boldsymbol{\psi} \in B$, дают оценки

$$\Big(\inf_{[0,1]} \rho_0\Big) \exp\left\{-\pi m^2 bt\right\} \leqslant \rho(x,t) \leqslant \Big(\sup_{[0,1]} \rho_0\Big) \exp\left\{\pi m^2 bt\right\}. \tag{13}$$

На втором шаге определим функцию $\boldsymbol{\Psi}$ из следующей задачи Коши для системы mN линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\int_0^1 \Big(\rho \partial_t U_i + \rho\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N u_j\Big)\partial_x U_i + K\partial_x \rho^\gamma - \sum_{j=1}^N \mu_{ij}\partial_{xx} U_j -$$

(14)

$$- \sum_{j=1}^N a_{ij}(U_j - U_i)\Big)\omega_k\, dx = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\boldsymbol{\Psi}(0) = \boldsymbol{\psi}_0, \tag{15}$$

где $U_i = \sum\limits_{s=1}^m \Psi_{is}(t)\omega_s(x)$, $i = 1, \ldots, N$. Неравенство $\det A \neq 0$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2(t) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_N(t) \end{pmatrix},$$

$A_i(t) = \left\{ \int\limits_0^1 \rho \omega_k \omega_s \, dx \right\}_{k,s=1}^{m}$, $\quad i = 1, \ldots, N$, выполненное в силу положительности ρ, позволяет разрешить систему (14) относительно производных, что обосновывает существование функции $\mathbf{\Psi} \in (C^1[0, t_m])^{mN}$. Таким образом, для произвольного $t_m \in (0, T]$ определен оператор

$$\Lambda : B \to (C^1[0, t_m])^{mN} \subset (C[0, t_m])^{mN}, \quad \Lambda(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{\Psi},$$

неподвижная точка которого (если она существует), вместе с соответствующей функцией ρ, дает решение задачи (7)–(10).

Покажем, что при достаточно малом t_m оператор Λ удовлетворяет условиям теоремы Шаудера (см., например, [13]).

Установим сначала, что $\Lambda(B) \subset B$. Умножим уравнения (14) на $\Psi_{ik}(t)$, $k = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, N$, а затем просуммируем по $k = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, N$, получим с учетом (7), что

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho U_i^2 \, dx \right) + \sum_{i,j=1}^{N} \mu_{ij} \int\limits_0^1 (\partial_x U_i)(\partial_x U_j) \, dx + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \int\limits_0^1 (U_i - U_j)^2 \, dx = K \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho^\gamma \partial_x U_i \, dx. \end{gathered} \tag{16}$$

Далее, поскольку $\mathbf{M} > 0$, имеет место поточечное неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{N} \mu_{ij} (\partial_x U_i)(\partial_x U_j) \geqslant C_0 \sum_{i=1}^{N} |\partial_x U_i|^2 \tag{17}$$

с некоторой положительной постоянной $C_0 = C_0(\mathbf{M})$. Правая часть (16), в силу неравенства Коши и неравенства (13), оценивается следующим образом:

$$K \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho^\gamma \partial_x U_i \, dx \leqslant \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 |\partial_x U_i|^2 \, dx + C_1,$$

где $C_1 = \dfrac{K^2 N}{2C_0} \left(\sup\limits_{[0,1]} \rho_0 \right)^{2\gamma} \exp\left\{ 2\pi\gamma m^2 b t_m \right\}$. Таким образом, приходим к оценке

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho U_i^2 \, dx \right) + C_0 \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 |\partial_x U_i|^2 \, dx \leqslant 2C_1, \tag{18}$$

из которой следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho U_i^2 \, dx \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho_0 U_{0i}^2 \, dx + 2C_1 t_m, \tag{19}$$

где $U_{0i}=\sum\limits_{k=1}^{m}\Psi_{ik}(0)\omega_k(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}\psi_{0ik}\omega_k(x)$, $i=1,\ldots,N$. Еще раз привлекая (13), получаем из (19) неравенство

$$\|\mathbf{\Psi}\|^2_{(C[0,t_m])^{mN}}\leqslant e^{\pi m^2 bt_m}\frac{\sup\limits_{[0,1]}\rho_0}{\inf\limits_{[0,1]}\rho_0}\|\boldsymbol{\psi}_0\|^2_{\mathbb{R}^{mN}}+\frac{4C_1e^{\pi m^2bt_m}}{\inf\limits_{[0,1]}\rho_0}t_m. \tag{20}$$

Выбирая

$$t_m<\min\left\{\frac{1}{\pi m^2 b},\frac{\inf\limits_{[0,1]}\rho_0}{2eC_2},T\right\}, \tag{21}$$

где $C_2=\dfrac{K^2N}{C_0}\left(\sup\limits_{[0,1]}\rho_0\right)^{2\gamma}\exp\{2\gamma\}$, получим, что $C_1\leqslant C_2$, и придем к нужной оценке

$$\|\mathbf{\Psi}\|_{(C[0,t_m])^{mN}}\leqslant b. \tag{22}$$

Таким образом, при выполнении (21), оператор Λ отображает множество B в себя.

Докажем компактность оператора Λ. Умножая (14) на $\dfrac{d\Psi_{ik}(t)}{dt}$, $k=1,\ldots,m$, $i=1,\ldots,N$, а затем суммируя по $k=1,\ldots,m$, $i=1,\ldots,N$, выводим соотношение

$$\sum_{i=1}^N\int_0^1\rho|\partial_tU_i|^2\,dx=\sum_{i=1}^N\int_0^1\left(-\sum_{j=1}^N\mu_{ij}(\partial_{tx}U_i)(\partial_xU_j)-\frac{\rho}{N}\left(\sum_{j=1}^Nu_j\right)(\partial_xU_i)(\partial_tU_i)+\right.$$

$$\left.+K\rho^\gamma(\partial_{tx}U_i)+\left(\sum_{j=1}^Na_{ij}(U_j-U_i)\right)(\partial_tU_i)\right)\,dx. \tag{23}$$

Произведем оценки слагаемых в правой части (23) с помощью (13), неравенства Коши и неравенств $\|\boldsymbol{\psi}\|_{(C[0,t_m])^{mN}}\leqslant b$, $\|\mathbf{\Psi}\|_{(C[0,t_m])^{mN}}\leqslant b$, $\|\partial_xU_i\|_{L_2(0,1)}\leqslant C_3(m)\|U_i\|_{L_2(0,1)}$, $\|\partial_{tx}U_i\|_{L_2(0,1)}\leqslant C_3\|\partial_tU_i\|_{L_2(0,1)}$, $i=1,\ldots,N$:

$$\left|\sum_{i,j=1}^N\mu_{ij}\int_0^1(\partial_{tx}U_i)(\partial_xU_j)\,dx\right|\leqslant\frac18\sum_{i=1}^N\int_0^1\rho|\partial_tU_i|^2\,dx+C_4,$$

$$\left|\frac1N\sum_{i=1}^N\int_0^1\rho\left(\sum_{j=1}^Nu_j\right)(\partial_xU_i)(\partial_tU_i)\,dx\right|\leqslant\frac18\sum_{i=1}^N\int_0^1\rho|\partial_tU_i|^2\,dx+C_5,$$

$$\left|\sum_{i=1}^N\int_0^1K\rho^\gamma(\partial_{tx}U_i)\,dx\right|\leqslant\frac18\sum_{i=1}^N\int_0^1\rho|\partial_tU_i|^2\,dx+C_6,$$

$$\left|\sum_{i=1}^N\int_0^1\left(\sum_{j=1}^Na_{ij}(U_j-U_i)\right)(\partial_tU_i)\,dx\right|\leqslant\frac18\sum_{i=1}^N\int_0^1\rho|\partial_tU_i|^2\,dx+C_7,$$

где $C_4 = C_4\left(C_3, \inf\limits_{[0,1]}\rho_0, \mathbf{M}, N, b, m, t_m\right)$, $C_5 = C_5\left(C_3, \sup\limits_{[0,1]}\rho_0, N, b, m, t_m\right)$, $C_6 = C_6\left(C_3, \inf\limits_{[0,1]}\rho_0, \sup\limits_{[0,1]}\rho_0, K, N, b, m, t_m, \gamma\right)$, $C_7 = C_7\left(\inf\limits_{[0,1]}\rho_0, \{a_{ij}\}, N, b, m, t_m\right)$. Таким образом, из (23) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho|\partial_t U_i|^2\,dx \leqslant C_4 + C_5 + C_6 + C_7, \tag{24}$$

интегрируя которое по времени и применяя (13), выводим оценку

$$\sum_{i=1}^{N}\|\partial_t U_i\|^2_{L_2(Q_{t_m})} \leqslant C_8\left(C_4, \ldots, C_7, \inf_{[0,1]}\rho_0, b, m, t_m\right). \tag{25}$$

Таким образом, получена оценка $\mathbf{\Psi}$ в $(W_2^1(0,t_m))^{mN}$. Следовательно, Λ является компактным оператором.

Установим непрерывность оператора Λ из B в $(C[0,t_m])^{mN}$. Пусть $\boldsymbol{\psi}^{(1,2)} \in B$, $\mathbf{\Psi}^{(1,2)} = \Lambda(\boldsymbol{\psi}^{(1,2)})$, $u_i^{(1,2)} = \sum\limits_{k=1}^{m}\psi_{ik}^{(1,2)}\omega_k$, $U_i^{(1,2)} = \sum\limits_{k=1}^{m}\Psi_{ik}^{(1,2)}\omega_k$, $i = 1,\ldots,N$. Далее, пусть $\rho^{(1,2)}$ — решения задач Коши (7), (9), где вместо v стоит $v^{(1,2)} = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}u_i^{(1,2)}$ соответственно. Обозначим $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $U_i = U_i^{(1)} - U_i^{(2)}$, $i = 1,\ldots,N$, $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$, $v = v^{(1)} - v^{(2)}$. Дифференцируя по переменной x уравнения (7) для $\rho^{(1,2)}$ $\left(\text{т. е. уравнения } \partial_t\rho^{(1,2)} + \partial_x\left(\rho^{(1,2)}v^{(1,2)}\right) = 0\right)$, умножая на $\partial_x\rho^{(1,2)}$, интегрируя, используя начальные условия $\rho^{(1,2)}|_{t=0} = \rho_0$ и неравенства (13) и Гронуолла, а также тот факт, что $\boldsymbol{\psi}^{(1,2)} \in B$, получаем оценки

$$\left\|\partial_x\rho^{(1,2)}\right\|_{L_2(0,1)} \leqslant C_9\left(\|\rho_0\|_{W_2^1(0,1)}, b, m, t_m\right). \tag{26}$$

Заметим далее, что из (7), (9) следуют равенства

$$\partial_t\rho + \partial_x\left(\rho v^{(1)}\right) + \partial_x\left(\rho^{(2)}v\right) = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0. \tag{27}$$

Умножая первое равенство в (27) на ρ и интегрируя по $x \in (0,1)$, находим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^1 \rho^2\,dx\right) = -\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}\rho^2\left(\partial_x v^{(1)}\right) + \rho^{(2)}\rho(\partial_x v) + \left(\partial_x\rho^{(2)}\right)\rho v\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\sup_{[0,1]}\left|\partial_x v^{(1)}\right|\int\limits_0^1\rho^2\,dx + \sup_{[0,1]}\rho^{(2)}\int\limits_0^1\left(\rho^2 + (\partial_x v)^2\right)dx + \right. \tag{28}$$

$$\left. + \sup_{[0,1]} v^2\int\limits_0^1\left(\partial_x\rho^{(2)}\right)^2 dx + \int\limits_0^1\rho^2\,dx\right) \leqslant C_{10}\left(\int\limits_0^1\rho^2\,dx + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 u_i^2\,dx\right),$$

где $C_{10} = C_{10}\left(C_9, \sup\limits_{[0,1]} \rho_0, b, m, t_m\right)$. Здесь использовали очевидные соотношения

$$\sum_{j=1}^{N} \int_0^1 u_j^2\, dx = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} \psi_{jk}^2(t), \quad \sup_{[0,1]} v^2 \leqslant \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{m} |\psi_{jk}(t)||\psi_{il}(t)|,$$

$$\int_0^1 |\partial_x v|^2\, dx = \frac{\pi^2}{2N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} k^2 \psi_{jk}(t) \psi_{ik}(t). \tag{29}$$

Из (28), применяя неравенство Гронуолла и учитывая начальное условие в (27), выводим неравенство для всех $t \in (0, t_m]$

$$\int_0^1 \rho^2\, dx \leqslant C_{11}(C_{10}, t_m) \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_t} u_i^2\, dx d\tau. \tag{30}$$

Далее, из уравнений для $U_i^{(1,2)}$, $i = 1, \ldots, N$ (см. (14)), ввиду (7), следует соотношение для всех $t \in (0, t_m]$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho^{(1)} U_i^2\, dx + \sum_{i,j=1}^{N} \mu_{ij} \int_{Q_t} (\partial_x U_i)(\partial_x U_j)\, dx d\tau +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \int_{Q_t} (U_i - U_j)^2\, dx d\tau = K \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_t} \left(\left(\rho^{(1)}\right)^\gamma - \left(\rho^{(2)}\right)^\gamma\right) (\partial_x U_i)\, dx d\tau -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_t} \rho U_i \left(\partial_t U_i^{(2)}\right) dx d\tau - \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_t} \rho^{(1)} v U_i \left(\partial_x U_i^{(2)}\right) dx d\tau - \tag{31}$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_t} \rho v^{(2)} U_i \left(\partial_x U_i^{(2)}\right) dx d\tau.$$

Первое слагаемое в левой части (31), ввиду (13), допускает оценку

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho^{(1)} U_i^2\, dx \geqslant \frac{1}{2} \inf_{[0,1]} \rho_0 \exp\left\{-\pi m^2 b t_m\right\} \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 U_i^2\, dx; \tag{32}$$

для второго слагаемого имеем неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{Q_t} \mu_{ij} (\partial_x U_i)(\partial_x U_j)\, dx d\tau \geqslant C_0 \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_t} |\partial_x U_i|^2\, dx d\tau; \tag{33}$$

используя неравенство Коши для первого слагаемого в правой части (31), получаем соотношение

$$
\begin{gathered}
K\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}\left(\left(\rho^{(1)}\right)^{\gamma}-\left(\rho^{(2)}\right)^{\gamma}\right)(\partial_x U_i)\,dxd\tau \leqslant \frac{C_0}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}|\partial_x U_i|^2\,dxd\tau+ \\
+\frac{K^2N}{2C_0}\int\limits_{Q_t}\left(\left(\rho^{(1)}\right)^{\gamma}-\left(\rho^{(2)}\right)^{\gamma}\right)^2 dxd\tau,
\end{gathered}
\tag{34}
$$

откуда, ввиду (см. (13)),

$$
\left(\rho^{(1)}\right)^{\gamma}-\left(\rho^{(2)}\right)^{\gamma}=\gamma\left(\lambda\rho^{(1)}+(1-\lambda)\rho^{(2)}\right)^{\gamma-1}\rho,\quad \lambda\in[0,1],
$$

$$
\left(\inf_{[0,1]}\rho_0\right)\exp\left\{-\pi m^2 b t_m\right\}\leqslant\lambda\rho^{(1)}+(1-\lambda)\rho^{(2)}\leqslant\left(\sup_{[0,1]}\rho_0\right)\exp\left\{\pi m^2 b t_m\right\},
$$

и (30), находим

$$
\begin{gathered}
K\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}\left(\left(\rho^{(1)}\right)^{\gamma}-\left(\rho^{(2)}\right)^{\gamma}\right)(\partial_x U_i)\,dxd\tau\leqslant \\
\leqslant\frac{C_0}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}|\partial_x U_i|^2\,dxd\tau+C_{12}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}u_i^2\,dxd\tau,
\end{gathered}
\tag{35}
$$

где $C_{12}=C_{12}\left(C_0,C_{11},\sup\limits_{[0,1]}\rho_0,K,N,b,m,t_m,\gamma\right)$; для второго слагаемого в правой части (31), используя (25), (30) и неравенство Коши с малым множителем $\varepsilon>0$, получаем неравенство (ср. (29))

$$
\begin{gathered}
-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}\rho U_i\left(\partial_t U_i^{(2)}\right)dxd\tau\leqslant\frac{C_{11}Nt}{2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}u_i^2\,dxd\tau+ \\
+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}\sup_{Q_t}U_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\partial_t U_i^{(2)}\right\|^2_{L_2(Q_t)}\right)\leqslant \\
\leqslant\frac{C_{11}Nt}{2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}u_i^2\,dxd\tau+m\varepsilon^2C_8^2\sum_{i=1}^{N}\sup_{[0,t]}\int\limits_0^1 U_i^2\,dx= \\
\left[m\varepsilon^2C_8^2=\frac{1}{4}\inf_{[0,1]}\rho_0\exp\left\{-\pi m^2bt_m\right\}\right] \\
=C_{13}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}u_i^2\,dxd\tau+\frac{1}{4}\inf_{[0,1]}\rho_0\exp\left\{-\pi m^2bt_m\right\}\sum_{i=1}^{N}\sup_{[0,t]}\int\limits_0^1 U_i^2\,dx,
\end{gathered}
\tag{36}
$$

где $C_{13} = C_{13}\left(C_8, C_{11}, \inf\limits_{[0,1]} \rho_0, N, b, m, t_m\right)$; третье слагаемое в правой части (31) оценим с помощью (13), неравенства Коши и неравенства $\|\boldsymbol{\Psi}^{(2)}\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leqslant b$ (ср. (29)):

$$(37) \quad -\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} \rho^{(1)} v U_i \left(\partial_x U_i^{(2)}\right) dx d\tau \leqslant C_{14} \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} u_i^2 \, dx d\tau + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} U_i^2 \, dx d\tau\right),$$

где $C_{14} = C_{14}\left(\sup\limits_{[0,1]} \rho_0, N, b, m, t_m\right)$; наконец, благодаря (30) и оценкам $\|\boldsymbol{\psi}^{(2)}\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leqslant b$, $\|\boldsymbol{\Psi}^{(2)}\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leqslant b$, для последнего слагаемого в правой части (31) получаем соотношение

$$(38) \quad -\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} \rho v^{(2)} U_i \left(\partial_x U_i^{(2)}\right) dx d\tau \leqslant C_{15} \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} u_i^2 \, dx d\tau + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} U_i^2 \, dx d\tau\right),$$

где $C_{15} = C_{15}(C_{11}, N, b, m, t_m)$. Таким образом, из (31), с учетом (32)–(38), следует неравенство

$$(39) \qquad \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 U_i^2 \, dx \leqslant C_{16} \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} u_i^2 \, dx d\tau + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} U_i^2 \, dx d\tau\right),$$

где $C_{16} = C_{16}\left(C_{12}, \dots, C_{15}, \inf\limits_{[0,1]} \rho_0, N, b, m, t_m\right)$, из которого, пользуясь неравенством Гронуолла, получаем оценку

$$(40) \qquad \sum_{i=1}^{N} \|U_i\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant C_{17}(C_{16}, t_m) \sum_{i=1}^{N} \|u_i\|^2_{L_2(Q_{t_m})},$$

а отсюда — неравенство

$$(41) \qquad \|\boldsymbol{\Psi}\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leqslant C_{18}(C_{17}, t_m) \|\boldsymbol{\psi}\|_{(C[0,t_m])^{mN}},$$

обосновывающее непрерывность оператора Λ на B.

Поскольку оператор Λ удовлетворяет условиям теоремы Шаудера, то в B существует неподвижная точка $\boldsymbol{\psi}$ оператора Λ, определяющая (вместе с соответствующей функцией ρ) решение задачи (7)–(10). Лемма 3 доказана.

4. Равномерные оценки галеркинских приближений

Лемма 4. *В предположениях теоремы 2 существуют положительные постоянные C_{19} и $t_0 \leqslant T$ (см. (59)) такие, что для любого решения $(\rho, u_1, \dots, u_N)$ задачи (7)–(10) (определенного при $t \in [0, \tau]$, где $\tau \in (0, T]$, например, это может быть решение, построенное по Лемме 3, тогда $\tau \in [t_m, T]$, при этом автоматически $\rho > 0$) справедлива оценка*

$$(42) \quad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} \left(\|u_i\|_{L_\infty\left(0,t_0;W_2^1(0,1)\right)} + \|u_i\|_{L_2\left(0,t_0;W_2^2(0,1)\right)} + \|\partial_t u_i\|_{L_2(Q_{t_0})}\right) + \\ &+ \|\rho\|_{L_\infty\left(0,t_0;W_2^1(0,1)\right)} + \|1/\rho\|_{L_\infty(Q_{t_0})} + \|\partial_t \rho\|_{L_\infty\left(0,t_0;L_2(0,1)\right)} \leqslant C_{19}, \end{aligned}$$

где

$$C_{19} = C_{19}\left(\left\{\|u_{0i}\|_{W_2^1(0,1)}\right\},\ \|\rho_0\|_{W_2^1(0,1)},\ \inf_{[0,1]}\rho_0,\ \{a_{ij}\},\ K,\ \boldsymbol{M},\ N,\ T,\ \gamma\right),$$

а t_0 *зависит от тех же величин что и* C_{19}. *При этом, если* $t_0 > \tau$, *то оценка* (42) *понимается как справедливая только при* $t \in [0,\tau]$ (*т. е. на всем интервале* $[0, t_0]$ *эта оценка, вообще говоря, априорная*).

Доказательство. Введем обозначение

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 \left(\rho(\partial_t u_i)^2 + (\partial_{xx}u_i)^2\right)\,dxd\tau, \quad \alpha'(t) \geqslant 0. \tag{43}$$

Уравнение (7) влечет выполнение неравенств (12), из которых, в свою очередь, следуют оценки

$$C_{20}^{-1}\exp\{-C_{20}\alpha(t)\} \leqslant \rho(x,t) \leqslant C_{20}\exp\{C_{20}\alpha(t)\}, \tag{44}$$

где $C_{20} = C_{20}\left(\sup\limits_{[0,1]}\rho_0, \inf\limits_{[0,1]}\rho_0, T\right)$. Заметим теперь, что из (7) вытекает равенство

$$\rho\partial_{tx}(1/\rho) + \rho v\partial_{xx}(1/\rho) = \partial_{xx}v, \tag{45}$$

из которого получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \rho(\partial_x(1/\rho))^2\,dx\right) = 2\int_0^1(\partial_{xx}v)(\partial_x(1/\rho))\,dx. \tag{46}$$

Из (46), после интегрирования по t и применения неравенства Коши, следует соотношение

$$\begin{aligned}\int_0^1 \rho(\partial_x(1/\rho))^2\,dx \leqslant \int_0^1 \rho_0((1/\rho_0)')^2\,dx + \int_0^t\int_0^1 \rho(\partial_x(1/\rho))^2\,dxd\tau +\\ + \int_0^t\int_0^1 \frac{(\partial_{xx}v)^2}{\rho}\,dxd\tau.\end{aligned} \tag{47}$$

Замечание 5. *При выводе* (47) *нам потребовалась* (*в* (45), (46)) *дополнительная гладкость* ρ *по сравнению с* (11), *хотя само соотношение* (47) *никаких дополнительных требований не предусматривает. Это означает, что* (47) *может быть получено путем регуляризации* ρ_0, *вывода* (47) *для решений получившихся задач, а затем предельного перехода по параметру регуляризации.*

Из (47), пользуясь (43), (44) и неравенством Гроноулла, получаем оценку

$$\int_0^1(\partial_x(1/\rho))^2\,dx + \int_0^1(\partial_x\rho)^2\,dx \leqslant C_{21}\exp\{C_{21}\alpha(t)\}, \tag{48}$$

где $C_{21} = C_{21}\left(C_{20}, \|\rho_0\|_{W_2^1(0,1)}, \inf\limits_{[0,1]}\rho_0, T\right)$. Далее, умножая (8) на $\psi_{ik}' + \pi^2k^2\psi_{ik}$, суммируя по $k = 1,\dots,m$, $i = 1,\dots,N$, и учитывая (7), (10), приходим к соотношению[2]

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho(\partial_t u_i)^2\,dx + \sum_{i,j=1}^{N}\mu_{ij}\int\limits_0^1 (\partial_{xx}u_i)(\partial_{xx}u_j)\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho(\partial_x u_i)^2\,dx\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{N}\mu_{ij}\int\limits_0^1 (\partial_x u_i)(\partial_x u_j)\,dx\right) = \sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \Big(-\rho v(\partial_t u_i)(\partial_x u_i)- \tag{49}$$

$$-K(\partial_x\rho^\gamma)(\partial_t u_i) + K(\partial_x\rho^\gamma)(\partial_{xx}u_i) + 2\rho v(\partial_x u_i)(\partial_{xx}u_i) - (\partial_x\rho)(\partial_t u_i)(\partial_x u_i)+$$

$$+\Big(\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(u_j-u_i)\Big)(\partial_t u_i) - \Big(\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(u_j-u_i)\Big)(\partial_{xx}u_i)\Big)\,dx.$$

Т. к. $\mathbf{M}>0$, то

$$\text{левая часть (49)} \geqslant C_{22}(C_0)\alpha'(t)+\beta'(t), \tag{50}$$

где

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho(\partial_x u_i)^2\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\mu_{ij}\int\limits_0^1 (\partial_x u_i)(\partial_x u_j)\,dx.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в правой части (49). В силу неравенства Гельдера, неравенства Коши и оценки (44), имеем

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho v(\partial_t u_i)(\partial_x u_i)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{N}\|v\|_{C[0,1]}\|\sqrt{\rho}\partial_t u_i\|_{L_2(0,1)}\|\sqrt{\rho}\partial_x u_i\|_{L_2(0,1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{22}}{12}\alpha'(t) + C_{23}\,\beta^2(t)\exp\{C_{23}\alpha(t)\}, \tag{51}$$

где $C_{23}=C_{23}(C_{20},C_{22})$. Благодаря неравенству Коши, а также (44) и (48), получаем

$$-K\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 (\partial_x\rho^\gamma)(\partial_t u_i)\,dx \leqslant \frac{C_{22}}{12}\alpha'(t) + C_{24}\exp\{C_{24}\alpha(t)\}, \tag{52}$$

где $C_{24}=C_{24}(C_{20},C_{21},C_{22},K,N,\gamma)$. Аналогично,

$$K\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 (\partial_x\rho^\gamma)(\partial_{xx}u_i)\,dx \leqslant \frac{C_{22}}{12}\alpha'(t) + C_{25}\exp\{C_{25}\alpha(t)\},\ \ C_{25}=C_{25}(\text{арг. } C_{24}). \tag{53}$$

---

[2] Здесь используется симметричность матрицы $\mathbf{M}$.

Используя неравенства Гельдера и Коши, а также оценку (44), выводим

$$2\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho v(\partial_x u_i)(\partial_{xx}u_i)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{N}\|v\|_{C[0,1]}\|\sqrt{\rho}\|_{C[0,1]}\|\sqrt{\rho}\partial_x u_i\|_{L_2(0,1)}\|\partial_{xx}u_i\|_{L_2(0,1)} \leqslant \tag{54}$$

$$\leqslant \frac{C_{22}}{12}\alpha'(t) + C_{26}\,\beta^2(t)\exp\{C_{26}\alpha(t)\}, \quad C_{26} = C_{26}(C_{20}, C_{22}).$$

Далее, используя неравенство Коши, интерполяционную оценку

$$\|\partial_x u_i\|_{C[0,1]} \leqslant \sqrt{2}\|\partial_x u_i\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(0,1)}\|\partial_{xx}u_i\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(0,1)}$$

и оценки (44), (48), получаем

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 (\partial_x\rho)(\partial_t u_i)(\partial_x u_i)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{N}\|\partial_x u_i\|_{C[0,1]}\|\partial_x\rho/\sqrt{\rho}\|_{L_2(0,1)}\|\sqrt{\rho}\partial_t u_i\|_{L_2(0,1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{22}}{12}\alpha'(t) + C_{27}\,\beta(t)\exp\{C_{27}\alpha(t)\}, \quad C_{27} = C_{27}(C_{20}, C_{21}, C_{22}). \tag{55}$$

Наконец, благодаря неравенствам Коши и (44), имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(u_j - u_i)\Big)\Big((\partial_t u_i) - (\partial_{xx}u_i)\Big)\,dx \leqslant \tag{56}$$

$$\leqslant \frac{C_{22}}{12}\alpha'(t) + C_{28}\,\beta(t)\exp\{C_{28}\alpha(t)\}, \quad C_{28} = C_{28}(C_{20}, C_{22}, \{a_{ij}\}, N).$$

Таким образом, из (51)–(56) следует, что

$$\text{правая часть (49)} \leqslant \frac{C_{22}}{2}\alpha'(t) + C_{29}(1 + \beta^2(t))\exp\{C_{29}\alpha(t)\}, \tag{57}$$

где $C_{29} = C_{29}(C_{23}, \dots, C_{26}, C_{27}, C_{28})$. Объединяя соотношения (50) и (57), получаем из (49) неравенство

$$\frac{C_{22}}{2}\alpha' + \beta' \leqslant C_{30}\exp\{C_{30}(C_{22}\alpha/2 + \beta)\}, \quad C_{30} = C_{30}(C_{22}, C_{29}). \tag{58}$$

Зададим любое $C_{31} > \beta(0)$ (например, $C_{31} = 2\beta(0)$). Тогда при

$$t_0 = \min\left\{\frac{\exp\{-C_{30}\beta(0)\} - \exp\{-C_{30}C_{31}\}}{C_{30}^2}, T\right\} \tag{59}$$

из (58) получаем оценку

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}(\alpha + \beta) \leqslant \left(1 + \frac{2}{C_{22}}\right)C_{32}, \quad C_{32} = \frac{1}{C_{30}}\ln\frac{1}{\exp\{-C_{30}\beta(0)\} - C_{30}^2 t_0}, \tag{60}$$

которая вместе с (7), (44) и (48) завершает доказательство Леммы 4. Отметим, что t_0 и C_{32} зависят от следующих величин:

$$\|\rho_0\|_{W_2^1(0,1)},\ \inf_{[0,1]}\rho_0,\ \{a_{ij}\},\ C_0,\ K,\ N,\ T,\ \beta(0),\ \gamma.$$

5. Сходимость приближенных решений

Построив согласно Лемме 3 решения ρ_m, u_{im}, $i = 1, \dots, N$ задач (7)–(10) при всех $m \in \mathbb{N}$, а затем при необходимости продолжив их на интервал $t \in (0, t_0)$ согласно Лемме 4, можно использовать для них оценку (42). На основании этой оценки, из последовательности ρ_m, u_{im}, $i = 1, \dots, N$, $m \in \mathbb{N}$, может быть выделена подпоследовательность (которую обозначим так же), для которой при $m \to \infty$ (для всех $i = 1, \dots, N$) имеют место сходимости

$$\rho_m \to \rho \ \ * -\text{слабо в } \ L_\infty\big(0, t_0; W_2^1(0,1)\big), \tag{61}$$

$$u_{im} \to u_i \ \ * -\text{слабо в } \ L_\infty\big(0, t_0; W_2^1(0,1)\big) \ \text{ и слабо в } \ L_2\big(0, t_0; W_2^2(0,1)\big). \tag{62}$$

Кроме того, оставшиеся свойства, перечисленные в (5), выполнены для нашей последовательности в Q_{t_0} равномерно по m, а значит предельные функции попадают в соответствующие классы. Покажем, что совокупность функций $(\rho, u_1, \dots, u_N)$ является сильным решением задачи (1)–(4) на $(0, t_0)$.

Из равномерных оценок ρ_m, u_{im} в $L_\infty\big(0, t_0; W_2^1(0,1)\big)$ и $\partial_t \rho_m$, $\partial_t u_{im}$ в $L_2(Q_{t_0})$ (см. (42)) получаем по теореме Арцела–Асколи ([14], Теорема 1.70, стр. 58) сходимости (выделяя подпоследовательности и переобозначая их так же; далее эта процедура также будет подразумеваться при необходимости)

$$\rho_m \to \rho \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ C\big([0, t_0]; L_2(0,1)\big), \tag{63}$$

$$u_{im} \to u_i \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ C\big([0, t_0]; L_2(0,1)\big), \quad i = 1, \dots, N. \tag{64}$$

Из ограниченности $\partial_t u_{im}$ в $L_2(Q_{t_0})$ следует равномерная оценка $\partial_{tx} u_{im}$ в $L_2(0, t_0; W_2^{-1}(0,1))$, что вместе с оценкой $\partial_x u_{im}$ в $L_2(0, t_0; W_2^1(0,1))$ приводит, по теореме Лионса–Обена ([14], Теорема 1.71, стр. 59), к сходимостям

$$\partial_x u_{im} \to \partial_x u_i \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ L_2(Q_{t_0}), \quad i = 1, \dots, N. \tag{65}$$

Отсюда и из (64) следуют соотношения

$$u_{im} \to u_i \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ L_2\big(0, t_0; C[0,1]\big), \quad i = 1, \dots, N. \tag{66}$$

Таким образом, предельные функции ρ, u_i, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяют уравнениям неразрывности (1) п. в. в Q_{t_0}, начальным условиям (3) для п. в. $x \in (0,1)$ и граничным условиям (4) для п. в. $t \in (0, t_0)$.

Из ограниченности $\partial_t u_{im}$ в $L_2(Q_{t_0})$ следует слабая сходимость $\partial_t u_{im}$ к $\partial_t u_i$ в $L_2(Q_{t_0})$, что вместе с (63) и ограниченностью $\rho_m \partial_t u_{im}$ в $L_2(Q_{t_0})$, влечет слабую сходимость $\rho_m \partial_t u_{im}$ к $\rho \partial_t u_i$ в $L_2(Q_{t_0})$.

Далее, из (63) и (65) следует, что

$$\rho_m \partial_x u_{im} \to \rho \partial_x u_i \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ L_2\big(0, t_0; L_1(0,1)\big), \quad i = 1, \dots, N, \tag{67}$$

откуда и из (66) получаем сходимости

$$(\rho_m \partial_x u_{im}) u_{jm} \to (\rho \partial_x u_i) u_j \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ L_1(Q_{t_0}), \quad i, j = 1, \dots, N. \tag{68}$$

Из (8) следует, что для любых функций вида

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{M} \eta_k(t) \omega_k(x), \ \ \eta_k \in C[0, t_0], \ \ k = 1, \dots, M, \ \ M \leqslant m, \tag{69}$$

выполнены для всех $i = 1, \ldots, N$ равенства

$$\int\limits_{Q_{t_0}} \Big(\rho_m \partial_t u_{im} + \rho_m v_m \partial_x u_{im} + K \partial_x \rho_m^\gamma - \sum_{j=1}^N \mu_{ij} \partial_{xx} u_{jm} - \tag{70}$$
$$- \sum_{j=1}^N a_{ij} (u_{jm} - u_{im}) \Big) \varphi_i \, dx dt = 0, \quad v_m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_{jm},$$

переходя в которых (благодаря полученным выше сходимостям) к пределу по $m \to \infty$, получаем (поскольку множество функций φ_i, $i = 1, \ldots, N$ вида (69) всюду плотно в $L_2(Q_{t_0})$) справедливость уравнений баланса импульсов (2) для предельных функций ρ, u_i, $i = 1, \ldots, N$ п. в. в Q_{t_0}. Таким образом, доказано существование сильного решения задачи (1)–(4) в малом по времени.

6. Единственность сильного решения

Пусть $\left(\rho^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_N^{(1)}\right)$ и $\left(\rho^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_N^{(2)}\right)$ — два сильных решения задачи (1)–(4). Положим $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$, $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, N$, $v^{(1,2)} = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{j=1}^N u_j^{(1,2)}$, $v = v^{(1)} - v^{(2)}$. Из (7), (9) следуют равенства

$$\partial_t \rho + \partial_x \left(\rho v^{(1)} \right) + \partial_x \left(\rho^{(2)} v \right) = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0. \tag{71}$$

Умножая (71) на 2ρ и интегрируя по $x \in (0,1)$, получаем (см. (27))

$$y_1'(t) = - \int\limits_0^1 \left(\rho^2 \left(\partial_x v^{(1)} \right) + 2 \rho^{(2)} \rho (\partial_x v) + 2 \left(\partial_x \rho^{(2)} \right) \rho v \right) dx, \tag{72}$$

где

$$y_1(t) = \int\limits_0^1 \rho^2 \, dx. \tag{73}$$

Слагаемые в правой части (72) можно оценить следующим образом:

$$- \int\limits_0^1 \rho^2 \left(\partial_x v^{(1)} \right) dx \leqslant \left(\sum_{j=1}^N \| \partial_x u_j^{(1)} \|_{L_\infty(0,1)} \right) y_1(t),$$

$$-2 \int\limits_0^1 \rho^{(2)} \rho (\partial_x v) \, dx \leqslant \| \rho^{(2)} \|^2_{L_\infty(Q_{t_0})} y_1(t) + \sum_{j=1}^N \int\limits_0^1 |\partial_x u_j|^2 \, dx,$$

$$-2 \int\limits_0^1 \left(\partial_x \rho^{(2)} \right) \rho v \, dx \leqslant y_1(t) + \|v\|^2_{L_\infty(0,1)} \| \partial_x \rho^{(2)} \|^2_{L_\infty\left(0,t_0; L_2(0,1)\right)} \leqslant$$

$$\leqslant y_1(t) + C_{33} \left(\| \partial_x \rho^{(2)} \|_{L_\infty\left(0,t_0; L_2(0,1)\right)} \right) \sum_{j=1}^N \int\limits_0^1 |\partial_x u_j|^2 \, dx.$$

В силу включений

$$\rho^{(2)} \in L_\infty(Q_{t_0}), \quad \partial_x \rho^{(2)} \in L_\infty\big(0, t_0; L_2(0,1)\big),$$
$$\partial_x u_i^{(1)} \in L_2\big(0, t_0; L_\infty(0,1)\big), \quad i = 1, \ldots, N,$$

для функции $y_1(t)$ выводим оценку

$$y_1'(t) \leqslant C_{34}(t) y_1(t) + C_{35} \sum_{j=1}^{N} \int_0^1 |\partial_x u_j|^2 \, dx, \tag{74}$$

где $C_{34} = C_{34}\left(\left\{\|\partial_x u_j^{(1)}\|_{L_\infty(0,1)}\right\}, \|\rho^{(2)}\|_{L_\infty(Q_{t_0})}\right)$, $C_{34} \in L_2(0, t_0)$, $C_{35} = C_{35}\,(C_{33})$. Поэтому, т. к. $y_1(0) = 0$ (ввиду начального условия в (71)), то применяя неравенство Гроноулла, приходим к неравенству

$$y_1(t) \leqslant C_{36}\left(C_{35}, \|C_{34}\|_{L_1(0,1)}\right) \sum_{j=1}^{N} \int_0^t \int_0^1 |\partial_x u_j|^2 \, dx d\tau. \tag{75}$$

Далее, из уравнений (2) и краевых условий (4) следует равенство (см. (31))

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho^{(1)} u_i^2 \, dx\right) + \sum_{i,j=1}^{N} \mu_{ij} \int_0^1 (\partial_x u_i)(\partial_x u_j) \, dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \int_0^1 (u_i - u_j)^2 \, dx =$$
$$= K \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left(\left(\rho^{(1)}\right)^\gamma - \left(\rho^{(2)}\right)^\gamma\right)(\partial_x u_i) \, dx - \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho u_i \left(\partial_t u_i^{(2)}\right) dx - \tag{76}$$
$$- \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho^{(1)} v u_i \left(\partial_x u_i^{(2)}\right) dx - \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho v^{(2)} u_i \left(\partial_x u_i^{(2)}\right) dx,$$

из которого вытекает соотношение

$$y_2'(t) + y_3'(t) \leqslant K \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left(\left(\rho^{(1)}\right)^\gamma - \left(\rho^{(2)}\right)^\gamma\right)(\partial_x u_i) \, dx - \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho u_i \left(\partial_t u_i^{(2)}\right) dx -$$
$$- \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho^{(1)} v u_i \left(\partial_x u_i^{(2)}\right) dx - \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho v^{(2)} u_i \left(\partial_x u_i^{(2)}\right) dx, \tag{77}$$

где

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho^{(1)} u_i^2 \, dx, \quad y_3(t) = C_0 \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \int_0^1 |\partial_x u_i|^2 \, dx d\tau. \tag{78}$$

Оценим слагаемые в правой части соотношения (77) следующим образом:

$$K \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left(\left(\rho^{(1)}\right)^\gamma - \left(\rho^{(2)}\right)^\gamma\right)(\partial_x u_i) \, dx \leqslant \frac{C_0}{4} \sum_{i=1}^{N} \|\partial_x u_i\|^2_{L_2(0,1)} +$$
$$+ C_{37}\left(C_0, \|\rho^{(1,2)}\|_{L_\infty(Q_{t_0})}, K, N, \gamma\right) y_1(t),$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho u_i \left(\partial_t u_i^{(2)}\right)\,dx \leqslant \frac{C_0}{4}\sum_{i=1}^{N}\|\partial_x u_i\|^2_{L_2(0,1)} + C_{38}\left(C_0, \left\{\|\partial_t u_j^{(2)}\|_{L_2(0,1)}\right\}\right) y_1(t),$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho^{(1)} v u_i \left(\partial_x u_i^{(2)}\right)\,dx \leqslant C_{39}\left(\left\{\|\partial_x u_j^{(2)}\|_{L_\infty(0,1)}\right\}\right) y_2(t),$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho v^{(2)} u_i \left(\partial_x u_i^{(2)}\right)\,dx \leqslant C_{40}\left(\left\{\|u_j^{(2)}\|_{L_\infty(Q_{t_0})}\right\}\right) y_1(t) +$$

$$+ C_{41}\left(\left\{\|\partial_x u_j^{(2)}\|_{L_\infty(0,1)}\right\}, \|1/\rho^{(1)}\|_{L_\infty(Q_{t_0})}\right) y_2(t),$$

где $C_{38}, C_{41} \in L_1(0,t_0)$, $C_{39} \in L_2(0,t_0)$. Таким образом, из (77), с учетом уже доказанного соотношения (см. (75))

$$y_1(t) \leqslant C_{42}(C_0, C_{36}) y_3(t),$$

следует неравенство

$$y_2'(t) + \frac{1}{2}y_3'(t) \leqslant C_{43}(C_{37},\ldots,C_{42})\left(y_2(t) + \frac{1}{2}y_3(t)\right), \tag{79}$$

где $C_{43} \in L_1(0,1)$, из которого, с учетом того, что $y_2(0) = y_3(0) = 0$, получаем тождества

$$y_1 \equiv y_2 \equiv y_3 \equiv 0, \tag{80}$$

завершающие доказательство Теоремы 2.

References

[1] N. A. Kucher, D. A. Prokudin, *Stationary solutions to the equations of a mixture of compressible viscous fluids*, Sib. Zh. Ind. Mat., **12**:3 (2009), 52–65. (in Russian). MR2668146

[2] N. A. Kucher, A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Stationary solutions to the equations of dynamics of mixtures of heat-conductive compressible viscous fluids*, Siberian Math. J., **53**:6 (2012), 1075—1088. MR3074444

[3] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solubility of a stationary boundary-value problem for the equations of motion of a one-temperature mixture of viscous compressible heat–conducting fluids*, Izvestiya Ros. Akad. Nauk. Ser.: Mathematics, **78**:3 (2014), 554—579. MR3241821

[4] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solvability of the regularized steady problem of the spatial motions of multocomponent viscous compressible fluids*, Siberian Math. J., **57**:6 (2016), 1044–1054. MR3614003

[5] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solubility of initial boundary value problem for the equations of polytropic motion of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Electr. Math. Reports, **13** (2016), 541—583. (in Russian). MR3528629

[6] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solubility of steady boundary value problem for the equations of polytropic motion of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Electr. Math. Reports, **13** (2016), 664—693. (in Russian). MR3540771

[7] D. A. Prokudin, M. V. Krayushkina, *Solvability of a stationary boundary value problem for a model system of the equations of barotropic motion of a mixture of compressible viscous fluids*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **10**:3 (2016), 417—428. MR3588953

[8] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Existence of weak solutions to the three-dimensional problem of steady barotropic motions of mixtures of viscous compressible fluids*, Siberian Math. J., **58**:1 (2017), 113—127.

[9] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods and Applications of Analysis, **20**:2 (2013), 179—195. MR3119736

[10] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory*, Siberian Electr. Math. Reports, **14** (2017), 388–397.
[11] A. V. Kazhikov, A. N. Petrov, *Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture*, Din. Splosh. Sredy, **35** (1978), 61—73. (in Russian).
[12] A. N. Petrov, *Well-posedness of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of mutually penetrating flows of ideal gases*, Din. Splosh. Sredy, **56** (1982), 105–121. (in Russian).
[13] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, V. N. Monakhov, Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids, Studies in Mathematics and its Applications, **22**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
[14] A. Novotný, I. Straškraba, Introduction to the mathematical theory of compressible flow, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, **27**, Oxford University Press, Oxford, 2004.

Dmitriy Alexeyevich Prokudin
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
pr. Lavrent'eva, 15,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: prokudin@hydro.nsc.ru