S⓮MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 614–619 (2017) УДК 514.172.4

DOI 10.17377/semi.2017.14.052 MSC 52A15

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ШАРА

В.Н. СТЕПАНОВ

Abstract. In 1926 Nakajima showed that any convex body in $\mathbb{R}^3$ with constant width, constant brightness, and boundary of class C^2 is a ball [8]. To prove this Nakajima used the existence of umbilic point on every closed convex surfaces, topological theorem about a continuous tangent vector field on the sphere S^2 and isoperimetric inequality. The alternative proof of Nakajima Theorem under the same restrictions on the boundary of a convex body is given in this article. We reduce the Nakajima problem to the Monge-Ampere equation for the support function. We claim that the right part of this equation don't be negative. The last statement is proved with theorems about the structure for surfaces of negative curvature. Then we show that every orthogonal projection of body onto the plane is a circle.

Keywords: convex body, the support function, constant width, constant brightness, isoperimetric inequality, Monge-Ampere equation, orthogonal projection.

1. Основной результат

Пусть K – выпуклое тело класса C^2_+ (класса C^2 с положительной гауссовой кривизной) в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных $\mathbf{x} = (x, y, z)$; ∂K — граница тела K; $S^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : |u| = 1\}$ — единичная сфера; $F(u)$ и $L(u)$ — соответственно площадь и длина границы ортогональной проекции $K(u)$ тела K на плоскость $u^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, u\rangle = 0\}$, $u \in S^2$; $f^\pm(u)$ – четная и нечетная части функции $f(u)$ на сфере S^2; $H(u)$ – опорная функция. Известно, что опорная функция выпуклого тела K класса C^k_+, $k \geq 2$, обладает такой же степенью регулярности [7, p. 25].

Теорема 1. *Если $F(u) = F = const$ и $L(u) = L = const$, то тело K — шар.*

Stepanov, V.N., A characteristic property of the ball.

Поступила 5 июля 2016 г., опубликована 11 июля 2017 г.

Доказательство. Площадь $F(u)$ ортогональной проекции и длина границы $L(u)$ ортогональной проекции выпуклого тела на плоскость $u^{\perp}$ определяются формулами [3]:

$$L(u)=\frac{1}{2}\int_{S^2}[R_1(u)+R_2(u)]|\langle u,v\rangle|d\omega_v=\int_{S^2\cap u^{\perp}}H(v)ds_v, \tag{1}$$

$$F(u)=\frac{1}{2}\int_{S^2}|\langle u,v\rangle|R_1(u)R_2(u)d\omega_v, \tag{2}$$

где $R_1(u)$, $R_2(u)$ – главные радиусы кривизны поверхности ∂K в точке с направлением внешней нормали $u\in S^2$; $d\omega$ – элемент площади S^2; ds – элемент длины дуги окружности $S^2\cap u^{\perp}$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение.

Уравнения (1) и (2) однозначно разрешимы в классе гладких четных на S^2 функций и для них имеют место формулы обращения [3], [5]:

$$\begin{aligned}
&H^{+}(u)=-\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{d}{dt}\int_{\langle u,v\rangle^2>t}\frac{L(v)|\langle u,v\rangle|d\omega_v}{\sqrt{\langle u,v\rangle^2-t}}\Bigg|_{t=0}\\
&=\frac{L(u)}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{[\widetilde{L(\gamma,u)}]'d\gamma}{\cos\gamma},\\
&[R_1(u)R_2(u)]^{+}=-\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{d}{dt}\int_{\langle u,v\rangle^2>t}\frac{(\Delta_S+2)F(v)|\langle u,v\rangle|d\omega_v}{\sqrt{\langle u,v\rangle^2-t}}\Bigg|_{t=0}\\
&=\frac{1}{2\pi}[(\Delta_S+2)F(v)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\left[\widetilde{(\Delta_S+2)F}(\gamma,u)\right]'d\gamma}{\cos\gamma},
\end{aligned}$$

где Δ_S — поверхностный оператор Лапласа (второй дифференциальный параметр Бельтрами), $\widetilde{f(\gamma,u)}$ — среднее значение функции $f(\gamma,\tau)$ на окружности $\langle u,v\rangle=\cos\gamma$, (γ,τ) — сферические координаты точки $v\in S^2$ относительно полюса u.

Таким образом, из уравнения (1) определяется четная часть опорной функции $H^{+}(u)$ или четная часть суммы главных радиусов кривизны $[R_1(u)+R_2(u)]^{+}$, а из уравнения (2) четная часть произведения главных радиусов кривизны $[R_1(u)R_2(u)]^{+}$.

Из условий $F(u)=F=const$, $L(u)=L=const$ и формул обращения следует, что

$$[R_1(u)R_2(u)]^{+}=\frac{F}{\pi},\quad H^{+}(u)=\frac{L}{2\pi},\quad u\in S^2.$$

Сумма и произведение главных радиусов кривизны $R_1(u)$, $R_2(u)$ гладкой выпуклой поверхности находятся через вторые производные опорной функции по формулам [1], [3], [4]:

$$\begin{aligned}
&R_1(u)+R_2(u)=H_{xx}(u)+H_{yy}(u)+H_{zz}(u),\\
&R_1(u)\cdot R_2(u)=\begin{vmatrix}H_{xx}(u)&H_{xy}(u)\\H_{yx}(u)&H_{yy}(u)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}H_{xx}(u)&H_{xz}(u)\\H_{zx}(u)&H_{zz}(u)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}H_{yy}(u)&H_{yz}(u)\\H_{zy}(u)&H_{zz}(u)\end{vmatrix},
\end{aligned}\tag{3}$$

где, например, $H_{xz}(u) = \left.\frac{\partial^2 H(x,y,z)}{\partial x\,\partial z}\right|_u$. Как обычно, опорная функция продолжается на все значения $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ по правилу $H(x, y, z) = \lambda H(u)$, $u \in S^2$, $|u| = 1$, $\lambda \geq 0$.

Если в уравнении (3) взять четную часть произведения главных радиусов кривизны, то получим следующее уравнение:

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} H^+_{xx}(u) & H^+_{xy}(u) \\ H^+_{yx}(u) & H^+_{yy}(u) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H^+_{xx}(u) & H^+_{xz}(u) \\ H^+_{zx}(u) & H^+_{zz}(u) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H^+_{yy}(u) & H^+_{yz}(u) \\ H^+_{zy}(u) & H^+_{zz}(u) \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} H^-_{xx}(u) & H^-_{xy}(u) \\ H^-_{yx}(u) & H^-_{yy}(u) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H^-_{xx}(u) & H^-_{xz}(u) \\ H^-_{zx}(u) & H^-_{zz}(u) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H^-_{yy}(u) & H^-_{yz}(u) \\ H^-_{zy}(u) & H^-_{zz}(u) \end{vmatrix} \\
&= [R_1(u) \cdot R_2(u)]^+ = F/\pi.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Подставляя в уравнение (4) равенства

$$
\begin{aligned}
&H^+_{xx}(u) = \frac{L}{2\pi}(1 - u_1^2), \;\; H^+_{yy}(u) = \frac{L}{2\pi}(1 - u_1^2), \;\; H^+_{zz}(u) = \frac{L}{2\pi}(1 - u_1^2), \\
&H^+_{xy}(u) = -\frac{L}{2\pi}u_1 u_2, \;\; H^+_{xz}(u) = -\frac{L}{2\pi}u_1 u_3, \;\; H^+_{yz}(u) = -\frac{L}{2\pi}u_2 u_3, \\
&[R_1(u) \cdot R_2(u)]^+ = \frac{F}{\pi},
\end{aligned}
$$

где u_1, u_2, u_3 - компоненты единичного вектора $u \in S^2$, получаем для нечетной части опорной функции $H^-(u)$ уравнение:

$$
\begin{vmatrix} H^-_{xx}(u) & H^-_{xy}(u) \\ H^-_{yx}(u) & H^-_{yy}(u) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H^-_{yy}(u) & H^-_{yz}(u) \\ H^-_{zy}(u) & H^-_{zz}(u) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H^-_{zz}(u) & H^-_{xz}(u) \\ H^-_{zx}(u) & H^-_{zz}(u) \end{vmatrix} = \frac{4\pi F - L^2}{4\pi}. \tag{5}
$$

Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, приняв за начало O какую-либо точку внутри тела K, а ось Oz направим по $u_0 \in S^2$. Положим $h(x, y) = H^-(x, y, 1) = \frac{1}{2}[H(x, y, 1) - H(-x, -y, -1)]$, тогда $h_{xx}(x, y) = H^-_{xx}(x, y, 1)$, $h_{xy}(x, y) = H^-_{xy}(x, y, 1)$, $h_{yy}(x, y) = H^-_{yy}(x, y, 1)$. Поскольку сферическое изображение гладкой выпуклой поверхности ∂K покрывает всю сферу S^2, то функция $h(x, y)$ определена на всей плоскости Oxy с нормальным вектором $u_0 = \{0, 0, 1\}$. Так как опорная функция $H(x, y, z)$ является положительно однородной первой степени, то ее производные второго порядка – однородные функции степени -1. Поэтому из уравнения (5) следует, что в точке $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right)$ с направлением внешней нормали $(x, y, 1)$ функция $h(x, y)$ удовлетворяет уравнению Монжа-Ампера [4]

$$
h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 = \frac{4\pi F - L^2}{4\pi(1 + x^2 + y^2)}. \tag{6}
$$

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением $z = h(x, y)$. Гауссова кривизна этой поверхности в точке с направлением внешней нормали $(x, y, 1)$ определяется формулой:

$$
G(x, y) = \frac{4\pi F - L^2}{4\pi(1 + h_x^2 + h_y^2)^2(1 + x^2 + y^2)},
$$

так что знак гауссовой кривизны совпадает со знаком числа $4\pi F - L^2$.

Покажем, что в уравнении (6) правая часть не может быть отрицательной. Пусть $Q = \{u \in S^2 : H^-(u) > 0\}$. Множество Q будем считать не пустым. Если $Q = \emptyset$, то $H^-(u) = 0$, тогда поверхность ∂K центрально-симметричная [7, p. 16] и в таком случае ∂K – сфера. Действительно, если $H^-(u) = 0$, то в уравнении (4) остается сумма определителей, содержащих вторые производные $H^+(x, y, z)$, а так как $H^+(x, y, z) = L\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/2\pi$, то подставляя в (4) производные от $H^+(x, y, z)$, получим равенство: $L^2/4\pi^2 = F/\pi$, т. е. $L^2 - 4\pi F = 0$ для каждого $u \in S^2$. Следовательно, все ортогональные проекции тела K являются кругами, поэтому K – шар (теорема Зюсса в [8]).

Множество Q имеет ненулевую меру так как, если $u_0 \in Q$, то в силу непрерывности $H^-(u)$ найдется окрестность точки u_0, в которой $H^-(u) > 0$. Поскольку $H^-(u)$ нечетная функция на S^2, то множество Q не содержит диаметрально противоположных точек. Поэтому любая связная компонента множества Q лежит на какой-то фиксированной полусфере $S^2(u_0) = \{u \in S^2 : \langle u, u_0\rangle > 0\}$ с полюсом u_0.

Относительно расположения множества Q на полусфере возможны три случая.

1. Связная компонента множества Q совпадает с некоторой полусферой $S^2(u_0) = \{u \in S^2 : \langle u, u_0\rangle > 0\}$.

2. Множество Q содержит связную компоненту, которая лежит на полусфере $S^2(u_0) = \{u \in S^2 : \langle u, u_0\rangle > 0\}$, не совпадает с ней, не содержится полностью на границе любого шарового сегмента, но часть границы компоненты имеет общие точки с окружностью $C_0 = \{u \in S^2 : \langle u, u_0\rangle = 0\}$. Примером является полоса на сфере, проходящая через точку u_0 и опирающаяся краями на окружность C_0.

3. Найдется такое δ, что связная компонента Q содержится в множестве $\{u \in S^2 : \langle u, u_0\rangle \geq \delta > 0\}$.

В первом случае функция $H^-(u) > 0$ на полусфере $\{u \in S^2 : \langle u, u_0\rangle > 0\}$ и $H^-(u) = 0$ на окружности $C_0 = \{u \in S^2 : \langle u, u_0\rangle = 0\}$. Покажем, что в этом случае функция $h(x, y)$ при $x^2 + y^2 \to \infty$ ограничена. Предположим, что это не так, тогда существует такая последовательность точек $\{(x_k, y_k)\}$, что при $x_k^2 + y_k^2 \to \infty$ $\lim h(x_k, y_k) = \infty$. Рассмотрим последовтельность $\{(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)\}$, где $\widetilde{x}_k = x_k/\sqrt{1 + x_k^2 + y_k^2}$, $\widetilde{y}_k = y_k/\sqrt{1 + x_k^2 + y_k^2}$. Так как последовтельность $\{(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)\}$ ограничена, то из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, пусть это будет сама последовательность $\{(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)\}$ и при $x_k^2 + y_k^2 \to \infty$

$$\widetilde{x}_k = \frac{x_k}{\sqrt{1 + x_k^2 + y_k^2}} \to \widetilde{x_0}, \quad \widetilde{y}_k = \frac{y_k}{\sqrt{1 + x_k^2 + y_k^2}} \to \widetilde{y_0},$$
$$\widetilde{z}_k = \frac{1}{\sqrt{1 + x_k^2 + y_k^2}} \to 0.$$

Используя равенство нулю функции $H^-(x, y, z)$ на окружности C_0, однородность $H^-(x, y, z)$ и принадлежность опорной функции классу C^2, получим, разлагая функцию $H^-(x, y, z)$ по переменной z по формуле Тейлора:

$$h(x_k,y_k)=\frac{H(x_k,y_k,1)-H(-x_k,-y_k,-1)}{2}=\frac{H(\widetilde{x}_k,\widetilde{y}_k,\widetilde{z}_k)-H(-\widetilde{x}_k,-\widetilde{y}_k,-\widetilde{z}_k)}{2\widetilde{z}_k}$$
$$=\frac{H(\widetilde{x}_k,\widetilde{y}_k,0)+H_z(\widetilde{x}_k,\widetilde{y}_k,0)\widetilde{z}_k+H_{zz}(\widetilde{x}_k,\widetilde{y}_k,0)\widetilde{z}^{\,2}_k/2+o(\widetilde{z}^{\,2}_k)}{2\widetilde{z}_k}$$
$$-\frac{H(-\widetilde{x}_k,-\widetilde{y}_k,0)-H_z(-\widetilde{x}_k,-\widetilde{y}_k,0)\widetilde{z}_k+H_{zz}(-\widetilde{x}_k,-\widetilde{y}_k,0)\widetilde{z}^{\,2}_k/2+o(\widetilde{z}^{\,2}_k)}{2\widetilde{z}_k}$$
$$=\frac{H(\widetilde{x}_k,\widetilde{y}_k,0)-H(-\widetilde{x}_k,-\widetilde{y}_k,0)}{2\widetilde{z}_k}+\frac{H_z(\widetilde{x}_k,\widetilde{y}_k,0)+H_z(-\widetilde{x}_k,-\widetilde{y}_k,0)}{2}$$
$$+\frac{[H_{zz}(\widetilde{x}_k,\widetilde{y}_k,0)-H_{zz}(-\widetilde{x}_k,-\widetilde{y}_k,0)]\widetilde{z}_k}{4}+o(\widetilde{z}_k)$$

$$=\frac{H_z(\widetilde{x}_k,\widetilde{y}_k,0)+H_z(-\widetilde{x}_k,-\widetilde{y}_k,0)}{2}+\frac{[H_{zz}(\widetilde{x}_k,\widetilde{y}_k,0)+H_{zz}(-\widetilde{x}_k,-\widetilde{y}_k,0)]\widetilde{z}_k}{4}+o(\widetilde{z}_k),$$

так как точки с координатами $(\pm\,\widetilde{x}_k,\pm\,\widetilde{y}_k,0)$ находятся в плоскости окружности C_0 с нормалью $u_0=(0,0,1)$, а на окружности C_0 функция $H^-(x,y,z)=\ 0$.

Переходя теперь к пределу при $x^2+y^2\to\infty$, получаем:

$$\lim_{x_k^2+y_k^2\to\infty}|h(x_k,y_k)|=\lim_{x_k^2+y_k^2\to\infty}|H_z(\widetilde{x}_k,\widetilde{y}_k,0)+H_z(-\widetilde{x}_k,-\widetilde{y}_k,0)|/2=$$
$$=|H_z(\widetilde{x}_0,\widetilde{y}_0,0)+H_z(-\widetilde{x}_0,-\widetilde{y}_0,0)|\,/2\le$$
$$\le|H_z(\widetilde{x}_0,\widetilde{y}_0,0)|\,/2+|H_z(-\widetilde{x}_0,-\widetilde{y}_0,0)|\,/2<\infty.$$

Это противоречие доказывает ограниченность $h(x,y)$.

Если теперь $4\pi F-L^2<0$, то гауссова кривизна поверхности $z=h(x,y)$, в силу уравнения (6), будет отрицательной. Но тогда по теореме С. Бернштейна [2]

$$\sup_{0\le x^2+y^2<\infty}|h(x,y)|=\infty,$$

что противоречит ограниченности $h(x,y)$. Следовательно, в этом случае $4\pi F-L^2\ge 0$.

Рассмотрим второй случай. Ввиду нечетности функции $H^-(u)$ и в этом случае $H^-(u)=0$ на окружности $C_0=\{u\in S^2:\langle u,u_0\rangle=0\}$. Ограниченность $h(x,y)$ на плоскости Oxy и неравенство $4\pi F-L^2\ge 0$ доказывается также, как и в предыдущем случае.

Наконец, пусть теперь связная компонента множества Q содержится в множестве $\{u\in S^2:\langle u,u_0\rangle\ge\delta>0\}$. В этом случае, в силу нечетности $H^-(u)$, существует замкнутая кривая Γ (граница связной компоненты множества Q) такая, что $H^-(u)|_\Gamma=0$. Так как функция $h(x,y)$ определена на всей плоскости Oxy, получающейся центральным проектированием полусферы $\{u\in S^2:\langle u,u_0\rangle>0\}$ на плоскость $z=1$, а затем ортогональным проектированием на плоскость $z=0$, то на плоскости Oxy получаем односвязную область D, ограниченную замкнутой кривой Γ такой, что $h|_\Gamma=0$. Если предположить, что в уравнении (6) $4\pi F-L^2<0$, то поверхность $z=h(x,y)$ будет иметь отрицательную гауссову кривизну. Но от этой поверхности отрезается горбушка, соответствующая области D. Это невозможно поскольку поверхность $z=h(x,y)$ — седловая [2], и, следовательно, $4\pi F-L^2\ge 0$.

Итак, если $F(u) = F = const$ и $L(u) = L = const$, то в уравнении (6) правая часть неотрицательна, т. е. $4\pi F - L^2 \geq 0$. Но ортогональные проекции $K(u)$ выпуклого тела K – выпуклые фигуры. Поэтому, в силу изопериметрического свойства выпуклых фигур, $L^2 - 4\pi F \geq 0$. Учитывая доказанное, заключаем, что для любой ортогональной проекции $K(u)$ числа L и F связаны равенством $L^2 - 4\pi F = 0$. Это означает, что все ортогональные проекции тела K являются кругами. Следовательно, K — шар. □

Естественно ожидать, что если для каждой ортогональной проекции $K(u), u \in S^2$, тела K изопериметрический дефект $L^2(u) - 4\pi F(u)$ мал , то тело K мало отличается от шара.

Пусть R, r — радиусы "описанного" и "вписанного" шаров выпуклого тела K, $R(u)$ и $r(u)$ — радиусы "описанного" и "вписанного" кругов ортогональной проекции тела K на подпространство $u^{\perp}$, ортогональное вектору $u \in S^2$.

Теорема 2 ([6, p. 80]). *Если* $L^2(u) - 4\pi F(u) \leq \varepsilon^2$, *то* $R - r < \varepsilon/\pi$.

References

[1] T. Bonnesen, W. Fenchel, *Theorie der konvexen korper*, Berlin, Verlag von Juliies Springer, 1934. Zbl 0008.07708

[2] I.J. Bakel'man, A. L. Verner, B. E. Kantor, *Introduction to differential geometry "in the large"*, Moscow, Nauka, 1973. [in Russian]. MR0385759

[3] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Berlin, 1934.

[4] A.V. Pogorelov, *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, AMS Providence, Rhode Island, 1973. MR0346714

[5] A. V. Pogorelov, *Hilbert's fourth problem*, Scripta Series in Mathematics, Winston and Sons, 1979. MR0550440

[6] Yu. E. Anikonov, *Multidimensional Inverse and Ill-posed Problems for Differential Equation*, VSP, Utrecht, The Netherland, Tokyo, Japan, 1995. MR1374785

[7] R.J. Gardner, *Geometric tomography*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995. MR1356221

[8] S. Nakajima, *Eine charakteristische Eigenschaft der Kugel*, Jber. Deutsche Math.-Verein, **35** (1926), 298–300. JFM 52.0772.04

Vladimir Nikolaevich Stepanov
Omsk State Technical University,
pr. Mira, 11,
630029, Omsk, Russia
E-mail address: stpnv@yandex.ru