S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 629–639 (2017) УДК 512.57
DOI 10.17377/semi.2017.14.054 MSC 20F17

Ω-РАССЛОЕННЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА T-ГРУПП

Е.Н. БАЖАНОВА, В.А. ВЕДЕРНИКОВ

Abstract. We define and construct several types of Ω-foliated Fitting classes of multioperator T-groups with composition series and describe the structure of its minimal satellites.

Keywords: multioperator T-group, Ω-foliated Fitting class, satellite.

1. Введение

Понятие формации конечных групп было введено в 1963 году В. Гашюцом [1], и уже в этой работе функциональные методы нашли применение к построению локальных формаций, занимающих центральное место в теории формаций. Б. Хартли в работе [2] определил локальные классы Фиттинга. Дальнейшее развитие функциональный подход к изучению формаций и классов Фиттинга нашел в работе Л.А. Шеметкова [3] и в монографиях [4-7], в которых были определены и композиционные формации конечных групп. Отметим, что композиционные формации независимо от Л.А. Шеметкова были построены также Р. Бэром (см. [6]). В книге [5] систематизированы исследования по теории формаций алгебраических систем и их применениям к мультикольцам и конечным алгебрам мальцевского многообразия. В работах [8-10] А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым исследуются частично локальные (ω-локальные) и частично композиционные формации и классы Фиттинга конечных групп. Уже в этих работах при исследовании классов групп существенную роль стали играть минимальные и максимальные спутники формаций и классов Фиттинга.

Идея построения новых видов формаций и классов Фиттинга привела к необходимости рассмотрения спутников различных направлений. В работах [11-16] В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной были построены Ω-расслоенные и

Bazhanova, E.N., Vedernikov, V.A. Ω-Foliated Fitting classes of T-groups.

Поступила 4 ноября 2016 г., опубликована 13 июля 2017 г.

ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп, имеющие бесконечное множество попарно неэквивалентных направлений Ω-спутника (ω-спутника) f, одним из которых является направление Ω-композиционного (ω-локального) спутника. Отметим, что направление Ω-спутника (ω-спутника) f определяется как отображение класса $\mathfrak{I}$ всех конечных простых групп (множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел) во множество всех непустых формаций Фиттинга.

Дальнейший анализ понятия расслоенности формации конечных групп и групп, обладающих конечными композиционными рядами [17], показал, что понятие расслоенности формации носит более универсальный характер и может быть вполне применено к построению расслоенных формаций универсальных алгебр, обладающих условиями минимальности и максимальности для идеалов. В работе [18] определены и построены различные типы Ω-расслоенных формаций мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами. Получено описание строения минимальных и полных спутников, рассмотрены их применения к исследованию свойств решеток и произведений таких формаций.

Цель настоящей работы – построить различные классы Ω-расслоенных классов Фиттинга мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами, дать описание строения их минимальных Ω-спутников.

Настоящая работа является продолжением работы [18], её основные результаты были анонсированы в тезисах [19-20]. Используемые в дальнейшем обозначения, определения и результаты можно найти в работах [4-6; 11-13; 18; 21-23]. Приведем лишь некоторые из них.

Пусть дана аддитивная группа G с нулевым элементом 0. Группа G называется мультиоператорной T-группой с системой мультиоператоров T (или коротко T-группой), если в G задана еще некоторая система n-арных алгебраических операций T при некоторых n, удовлетворяющих условию $n > 0$, причем для всех $t \in T$ должно выполняться условие $t(0, \ldots, 0) = 0$, где слева элемент 0 стоит n раз, если операция t n-арна. Частными случаями мультиоператорных T-групп являются группы, модули, кольца и мультикольца. Напомним, что мультиоператорная T-группа называется мультикольцом [5], если каждая операция $t \in T$ дистрибутивна в G относительно операции сложения.

Пусть $\mathfrak{C}$ – класс всех T-групп с конечными композиционными рядами, $\mathfrak{I}$ – класс всех простых T-групп, то есть таких ненулевых T-групп P, идеалами которых являются лишь нулевой идеал $\{0\}$ и сама T-группа P. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые T-группы принадлежат классу $\mathfrak{C}$. Класс $\mathfrak{X}$, содержащийся в классе $\mathfrak{C}$, будем называть $\mathfrak{C}$-классом. Пусть Ω – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\Omega' = \mathfrak{I}\backslash\Omega$ и $\mathfrak{K}(G)$ – класс всех простых T-групп, изоморфных композиционным факторам T-группы G. Если $\mathfrak{K}(G) \subseteq \Omega$, то G называется Ω-группой. Обозначим через $\mathfrak{C}_\Omega$ – класс всех Ω-групп, принадлежащих $\mathfrak{C}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество T-групп. Группа, принадлежащая $\mathfrak{X}$, называется $\mathfrak{X}$-группой; $(\mathfrak{X})$ обозначает класс T-групп, порожденный $\mathfrak{X}$; в частности, (G) – класс всех T-групп, изоморфных T-группе G; $\mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ – объединение классов $\mathfrak{K}(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$.

Запись $M \lhd G$ означает, что M является идеалом T-группы G.

Формацией или корадикальным классом называется класс T-групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений [5, с. 12].

Класс T-групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга или радикальным классом, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если N_1 и N_2 – идеалы в T-группе G и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1 + N_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга T-групп. Сумма всех $\mathfrak{X}$-идеалов T-группы G называется $\mathfrak{X}$-радикалом T-группы G и обозначается через $G_{\mathfrak{X}}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация T-групп и G – T-группа. Пересечение всех идеалов T-группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, называется $\mathfrak{F}$-корадикалом T-группы G и обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$.

Нетрудно проверить, что класс T-групп $\mathfrak{C}_\Omega$ является формацией Фиттинга. Будем полагать $O^\Omega(G) = G^{\mathfrak{C}_\Omega}$, $O^{\Omega,\Omega'}(G) = G^{\mathfrak{C}_\Omega \mathfrak{C}_{\Omega'}}$.

В дальнейшем без дополнительных ссылок будем применять, следуя [6], определения, обозначения и отмеченные ниже свойства произведений классов групп. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – $\mathfrak{C}$-классы T-групп. Тогда $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G : G$ имеет идеал $N \in \mathfrak{X}$ с $G/N \in \mathfrak{Y})$. Отметим, что если $\{0\} \in \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Пусть $\mathfrak{H}$ – $\mathfrak{C}$-класс T-групп и $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{C}$-формация. Тогда $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = (G : G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называется формационным произведением классов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Отметим, что если $\{0\} \in \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}$; если $S_n\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{F}$; если $\mathfrak{M}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}$ – $\mathfrak{C}$-формации, то $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}$ – $\mathfrak{C}$-формация и $(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{B}$ – $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X} = (G : G/G_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{X})$ называется фиттинговым произведением классов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{X}$. Отметим, что если $\{0\} \in \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X}$; если $Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X} = \mathfrak{B}\mathfrak{X}$; если $\mathfrak{B}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ – $\mathfrak{C}$-классы Фиттинга, то $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X}$ – $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга и $(\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X}) \diamond \mathfrak{Y} = \mathfrak{B} \diamond (\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y})$. Произведения $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X}$ введены В. Гашюцом в 1969 году.

2. Ω-расслоенные классы Фиттинга T-групп

Следуя работам [11, 13], приведем следующие определения и обозначения. Все рассматриваемые функции принимают одинаковые значения на изоморфных T-группах из их области определения.

Функция f: $\Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$классы Фиттинга T-групп$\}$, где $f(\Omega') \neq \varnothing$, называется ΩR-функцией; функция g: $\mathfrak{I} \to \{$классы Фиттинга T-групп$\}$ называется R-функцией; функция φ: $\mathfrak{I} \to \{$непустые формации Фиттинга T-групп$\}$ называется FR-функцией.

На множестве всех ΩR-функций (R-функций и FR-функций) введем отношение частичного порядка $\leq$. Для любых таких функций μ_1 и μ_2 полагаем $\mu_1 \leq \mu_2$, если $\mu_1(A) \subseteq \mu_2(A)$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ ($A \in \mathfrak{I}$).

Доказательство следующей леммы содержится в книге [22, гл. 3].

Лемма 1. *Пусть G – T-группа, H – T-подгруппа в G, M, N – идеалы в G. Тогда*

1) $H + N$ – T-подгруппа в G, а $(H + N)/N$ – T-подгруппа T-группы G/N, причем таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми T-подгруппами T-группы G, содержащими N, и всеми T-подгруппами T-группы G/N;

2) $M + N$ – идеал в G;

3) $H \cap N \triangleleft H$, причем $(H + N)/N \cong H/H \cap N$;

4) если $M \lhd N$, *то* $(G/M)/(N/M) \cong G/N$.

В дальнейшем, как правило, без ссылок будут применяться легко проверяемые утверждения следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть* G – $\mathfrak{C}$*-группа,* H – T*-подгруппа в* G *и* $N \lhd G$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*
1) $O^{\Omega}(N) \subseteq N \cap O^{\Omega}(G)$;
2) если $G/N \in \mathfrak{C}_{\Omega}$, *то* $O^{\Omega}(G) = O^{\Omega}(N)$;
3) если $H \lhd G$ *и* $G = H + N$, *то* $O^{\Omega}(G) = O^{\Omega}(H) + O^{\Omega}(N)$.
4) если $\mathfrak{H}, \mathfrak{F}$ – $\mathfrak{C}$*-формации, то* $G^{\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}} = (G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}$.

Лемма 3. *Пусть* f – ΩR*-функция,* φ – FR*-функция и*

$$\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega'),$$

и $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ *для всех* $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G))$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *является классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$. Покажем, что $N \in \mathfrak{F}$. Так как по лемме 2 $O^{\Omega}(N) \subseteq O^{\Omega}(G)$, $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и класс $f(\Omega')$ является классом Фиттинга, то $O^{\Omega}(N) \in f(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(N)$. Тогда $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$ и по условию $S = G^{\varphi(A)} \in f(A)$. Из $(N + S)/S \lhd G/S \in \varphi(A)$ и того, что $\varphi(A)$ является классом Фиттинга следует, что $N/N \cap S \in \varphi(A)$. Поэтому $P = N^{\varphi(A)} \subseteq N \cap S$. Так как $P \lhd S$ и класс $f(A)$ является классом Фиттинга, то $P \in f(A)$, и значит, $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G = H + K$, $H \lhd G$, $K \lhd G$, H и K принадлежат $\mathfrak{F}$. Так как по лемме 2 $O^{\Omega}(G) = O^{\Omega}(H) + O^{\Omega}(K)$, $O^{\Omega}(H)$ и $O^{\Omega}(K)$ принадлежат классу Фиттинга $f(\Omega')$, то $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$. Покажем, что $G^{\varphi(A)} \in f(A)$. Так как $X = H^{\varphi(A)} \in f(A)$, $Y = K^{\varphi(A)} \in f(A)$ и $f(A)$ – класс Фиттинга, то $D = X + Y \in f(A)$, причем $D \lhd G$. Из $G = H + K$ следует, что $G/D = (H + D)/D + (K + D)/D$. По модулярному тождеству Дедекинда $(H + D)/D \cong H/H \cap D = H/(X + (H \cap Y))$. Поскольку $H/X \in \varphi(A)$ и $\varphi(A)$ – формация, то $H/(X + (H \cap Y)) \cong (H/X)/((X + (H \cap Y))/X) \in \varphi(A)$, и значит, $(H + D)/D \in \varphi(A)$. Аналогично можно показать, что $(K + D)/D \in \varphi(A)$. Так как $\varphi(A)$ – класс Фиттинга, то $G/D = (H + D)/D + (K + D)/D \in \varphi(A)$. Следовательно, $G^{\varphi(A)} \subseteq D$. Из $D \in f(A)$ получим, что $G^{\varphi(A)} \in f(A)$, и значит, $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга. □

Аналогично доказывается следующая

Лемма 4. *Пусть* f – R*-функция,* φ – FR*-функция и* $\mathfrak{F} = R(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} : G^{\varphi(A)} \in f(A)$ *для всех* $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G))$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *является классом Фиттинга.*

Определение 1. *Класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *назовем* Ω*-расслоенным, если*

$$\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi),$$

где f *и* φ *– некоторые* ΩR*-функция и* FR*-функция соответственно. Функцию* f *будем называть* ΩR*-спутником, а функцию* φ *– направлением* Ω*-расслоенного класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$. *Пусть* f – R*-функция. Класс Фиттинга* $\mathfrak{F} = R(f, \varphi)$ *назовем расслоенным, а* f *будем называть* R*-спутником расслоенного класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$.

Напомним, что T-группа G называется комонолитической, если в G имеется такой идеал M (комонолит T-группы G), что G/M – простая T-группа и $N \subseteq M$ для любого собственного идеала N T-группы G.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– непустой* $\mathfrak{C}$*-класс Фиттинга и* $\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cap \Omega = \oslash$*. Тогда* $\mathfrak{M} = \Omega R(m, \varphi)$*, где* m *–* ΩR*-функция такая, что* $m(\Omega') = \mathfrak{M}$*,* $m(A) = \oslash$ *для всех* $A \in \Omega$*, и* φ *– произвольная* FR*-функция. В частности,* $\mathfrak{C}$*-класс Фиттинга* (0) T*-групп является* Ω*-расслоенным для любого непустого класса* $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$*.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \Omega R(m, \varphi)$, где m и φ – из заключения леммы. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда $O^{\Omega}(G) = G \in \mathfrak{M} = m(\Omega')$, и из $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G) = \oslash$ следует, что $G^{\varphi(A)} \in m(A)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{M}_1$, и значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Предположим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$ и H – T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{M}_1 \backslash \mathfrak{M}$. Тогда $O^{\Omega}(H) \in m(\Omega') = \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \neq \oslash$ и $H \neq \{0\}$. Пусть M_1 и M_2 – собственные идеалы T-группы H такие, что $H = M_1 + M_2$. Так как $M_i \in \mathfrak{M}_1$, то, в силу выбора H, получим, что $M_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, 2$, и значит, $H \in \mathfrak{M}$. Получили противоречие. Следовательно, H – комонолитическая T-группа с комонолитом M. Тогда $M \in \mathfrak{M}$, $M = H_{\mathfrak{M}}$ и H/M – простая T-группа. Если $H/M \notin \Omega$, то $H = O^{\Omega}(H) \in m(\Omega') = \mathfrak{M}$, что невозможно. Поэтому $\mathfrak{K}(H/M) \subseteq \Omega$ и для любого $A \in \mathfrak{K}(H/M) \subseteq \mathfrak{K}(H)$ получим $H^{\varphi(A)} \in m(A) = \oslash$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$. □

Определение 2. *Класс Фиттинга* $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ *называется* Ω*-свободным или, коротко,* ΩFr*-классом Фиттинга, если* $\varphi(A) = \mathfrak{C}_{A'}$ *для любого* $A \in \mathfrak{I}$*, и обозначается* $\mathfrak{F} = \Omega FrR(f) = (G \in \mathfrak{C} : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ *и* $O^{A'}(G) \in f(A)$ *для всех* $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G))$*, а* f *называется* ΩFr*-спутником класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$*. Пусть* f *–* R*-функция. Класс Фиттинга* $\mathfrak{F} = FrR(f) = (G \in \mathfrak{C} : O^{A'}(G) \in f(A)$ *для всех* $A \in \mathfrak{K}(G))$ *называется свободным классом Фиттинга с* Fr*-спутником* f*.*

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ *называется* Ω*-каноническим или, коротко,* ΩK*-классом Фиттинга, если* $\varphi(A) = \mathfrak{C}_A \mathfrak{C}_{A'}$ *для любого* $A \in \mathfrak{I}$*, и обозначается* $\mathfrak{F} = \Omega KR(f) = (G \in \mathfrak{C} : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ *и* $O^{A,A'}(G) \in f(A)$ *для всех* $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G))$*, а* ΩR*-функцию* f *назовем* ΩK*-спутником класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$*. Пусть* f *–* R*-функция. Класс Фиттинга* $\mathfrak{F} = KR(f) = (G \in \mathfrak{C} : O^{A,A'}(G) \in f(A)$ *для всех* $A \in \mathfrak{K}(G))$ *назовем каноническим классом Фиттинга с* K*-спутником* f*.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{C}$-класс. Пересечение всех $\mathfrak{C}$-классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$, называется $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга, порожденным классом $\mathfrak{X}$, и обозначается через $fit(\mathfrak{X})$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустой ненулевой* $\mathfrak{C}$*-класс Фиттинга и* $\Omega = \mathfrak{K}(\mathfrak{F})$*. Тогда* $\mathfrak{F}$ *является* Ω*-свободным* $\mathfrak{C}$*-классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть f – такая ΩR-функция, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = fit(O^{A'}(G) : G \in \mathfrak{F})$ для всех $A \in \Omega$, и $\mathfrak{F}_1 = \Omega FrR(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^{\Omega}(H) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Далее, $O^{A'}(H) \in (O^{A'}(G) : G \in \mathfrak{F})$, и значит, $O^{A'}(H) \in fit(O^{A'}(G) : G \in \mathfrak{F}) = f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(H)$. Следовательно, $H \in \Omega FrR(f) = \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и K – T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_1 \backslash \mathfrak{F}$. Как и при доказательстве леммы 5, нетрудно проверить, что K – комонолитическая T-группа с комонолитом $M = K_{\mathfrak{F}}$. Так как $O^{\Omega}(K) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega}(K) \subseteq M$, и значит, $K/M \cong A \in \Omega$. По определению $\Omega FrR(f)$ получим, что $O^{A'}(K) \in f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Из комонолитичности T-группы K следует, что $K = O^{A'}(K)$. Поэтому $K \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. □

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 1 и леммы 5 следует, что каждый непустой $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга является Ω-свободным для некоторого непустого $\mathfrak{C}$-класса простых T-групп Ω. Обозначим направление Ω-свободного $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга через φ_0.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, где φ – произвольная FR-функция. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F} = \Omega R(g, \varphi)$, где $g(A) = f(A) \cap \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$;

2) $\mathfrak{F} = \Omega R(h, \varphi)$, где $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = f(A)$ для всех $A \in \Omega$;

3) если $\varphi_0 \leq \varphi$ и $\Omega \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{C} : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega)$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega R(g, \varphi)$, где g – ΩR-функция из пункта 1) леммы. Так как $g(A) \subseteq f(A)$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$. Поскольку класс $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга, то $\{O^{\Omega}(G), G^{\varphi(A)}\} \subseteq \mathfrak{F}$ и значит, $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \cap \mathfrak{F} = g(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A) \cap \mathfrak{F} = g(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

2) Пусть h – ΩR-функция, описанная в пункте 2) леммы, и $\mathfrak{H} = \Omega R(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$ имеем $G^{\varphi(A)} \in f(A) = h(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Предположим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и B – T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{H} \backslash \mathfrak{F}$. Тогда T-группа B является комонолитической с комонолитом $M = B_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $B \in \mathfrak{H}$, то $O^{\Omega}(B) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, и значит, $O^{\Omega}(B) \subseteq M$. Тогда $B/M \cong (B/O^{\Omega}(B))/(M/O^{\Omega}(B)) \in \mathfrak{C}_{\Omega}$ и по лемме 2 $O^{\Omega}(B) = O^{\Omega}(M)$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega}(M) \in f(\Omega')$, и значит, $O^{\Omega}(B) \in f(\Omega')$. Далее, $B \in \mathfrak{H}$ влечет $B^{\varphi(A)} \in h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(B)$. Таким образом, $B \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

3) Пусть $\varphi_0 \leq \varphi$, $\Omega \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{F})$ и $G \in \mathfrak{F}$. Если $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$, то $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ по определению класса $\Omega R(f, \varphi)$. Пусть $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(G)$. Так как $\Omega \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{F})$, то найдется такая T-группа $L \in \mathfrak{F}$, что $A \in \mathfrak{K}(L)$. Отсюда получаем, что $L^{\varphi(A)} \in f(A)$, и значит, $f(A) \neq \oslash$. Поскольку $A \notin \mathfrak{K}(G)$, то $G \in \mathfrak{C}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ и поэтому $G^{\varphi(A)} = \{0\} \in f(A)$. Таким образом, $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega$. $\square$

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой ненулевой $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга и $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \subseteq \Omega$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенным с направлением φ и ΩR-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – расслоенный класс Фиттинга с направлением φ и R-спутником f_1 таким, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \oslash$ для любого $A \in \mathfrak{I} \backslash \Omega$. Такие ΩR-спутник f и R-спутник f_1 класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем называть согласованными.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G))$. Рассмотрим R-функцию f_1 такую, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \oslash$ для любого $A \in \mathfrak{I} \backslash \Omega$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = R(f_1, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \subseteq \Omega$, то G является Ω-группой, и значит, $G^{\varphi(A)} \in f(A) = f_1(A)$ для любого $A \in \mathfrak{K}(G) \cap \Omega = \mathfrak{K}(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и L – T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_1 \backslash \mathfrak{F}$. Тогда L – комонолитическая T-группа с комонолитом $M = L_{\mathfrak{F}}$. В силу леммы 6, п. 2) можем считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Пусть $L/M \cong B$. Поскольку

$L \in \mathfrak{F}_1$, то $L^{\varphi(B)} \in f_1(B)$, и значит, $f_1(B) \neq \oslash$. Тогда по определению f_1 следует, что $B \in \Omega$ и $O^\Omega(L) \subseteq M$. Поэтому $O^\Omega(L) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Далее, из $M \in \mathfrak{F}$ и $B \in \Omega$ следует, что $\mathfrak{K}(L) \subseteq \Omega$ и $L^{\varphi(A)} \in f_1(A) = f(A)$ для всех $A \in \mathfrak{K}(L)$. Теперь по определению Ω-расслоенного $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ получаем $L \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Достаточность. Пусть теперь $\mathfrak{F} = R(g, \varphi)$ – расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с направлением φ. Рассмотрим ΩR-функцию h такую, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$, $h(A) = g(A)$ для любого $A \in \Omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega R(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$ справедливо $G^{\varphi(A)} \in g(A) = h(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{H} \backslash \mathfrak{F}$. Тогда H – комонолитическая T-группа с комонолитом $M = H_\mathfrak{F}$. Так как $O^\Omega(H) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $O^\Omega(H) \subseteq M$. Из $H/M \cong (H/O^\Omega(H))/(M/O^\Omega(H)) \in \mathfrak{C}_\Omega$ следует, что и $\mathfrak{K}(H) \subseteq \Omega$, и поэтому $H^{\varphi(A)} \in h(A) = g(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(H) = \mathfrak{K}(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. □

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой ненулевой $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга и $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \subseteq \Omega$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-свободным с ΩFr-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – свободный класс Фиттинга с Fr-спутником f_1, согласованным с f.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой ненулевой $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга и $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \subseteq \Omega$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-каноническим с ΩK-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – канонический класс Фиттинга с K-спутником f_1, согласованным с f.*

Определение 3. *Направление φ расслоенного $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга назовем правильным или, коротко, r-направлением, если $\varphi(A) = \varphi(A)\mathfrak{C}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$.*

Теорема 3. *Если $\mathfrak{F}$ – расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с r-направлением φ, то $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенным $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга с r-направлением φ для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Доказательство. Пусть Ω – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{F} = R(f, \varphi)$ – расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с r-направлением φ. Рассмотрим ΩR-функцию h такую, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$, $h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega R(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$. Кроме того, $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \mathfrak{K}(G)$. Тогда для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$ следует, что $G^{\varphi(A)} \in f(A) = h(A)$. Теперь по определению класса $\mathfrak{H}$ получим, что $G \in \mathfrak{H}$ и значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{H} \backslash \mathfrak{F}$. Тогда H – комонолитическая T-группа с комонолитом $M = H_\mathfrak{F}$. Так как $O^\Omega(H) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $O^\Omega(H) \subseteq M$ и $H/M \cong (H/O^\Omega(H))/(M/O^\Omega(H)) \in \mathfrak{C}_\Omega$. Пусть $A \in \mathfrak{K}(H) \cap \Omega$. Тогда $H^{\varphi(A)} \in h(A) = f(A)$. Пусть $A \in \mathfrak{K}(H) \backslash \Omega$. Тогда $\Omega \subseteq A'$, $H/M \in \mathfrak{C}_{A'}$, $A \in \mathfrak{K}(M)$ и по лемме 2, п. 2) $H^{\mathfrak{C}_{A'}} = M^{\mathfrak{C}_{A'}}$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $M^{\varphi(A)} \in f(A)$. По условию φ является r-направлением $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $\varphi(A) = \varphi(A)\mathfrak{C}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$. Тогда, в силу леммы 2, п. 4), получим $H^{\varphi(A)} = H^{\varphi(A)\mathfrak{C}_{A'}} = (H^{\mathfrak{C}_{A'}})^{\varphi(A)} = (M^{\mathfrak{C}_{A'}})^{\varphi(A)} = M^{\varphi(A)\mathfrak{C}_{A'}} = M^{\varphi(A)} \in f(A)$.

Следовательно, $H^{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \mathfrak{K}(H)$. Тогда по определению класса $\mathfrak{F}$ имеем $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. □

Следствие 3. *Если $\mathfrak{F}$ – свободный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является Ω-свободным $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Следствие 4. *Если $\mathfrak{F}$ – канонический $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является Ω-каноническим $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

3. Минимальные спутники Ω-расслоенных классов Фиттинга T-групп

Так как всякое непустое множество ΩR-функций (R-функций) является частично упорядоченным с отношением $\leq$, то имеет смысл говорить о его минимальном элементе.

Пусть $\{f_i | i \in I\}$ – произвольный набор ΩR-функций (R-функций). Обозначим через $\cap_{i\in I} f_i$ такую ΩR-функцию (R-функцию) f, что $f(A) = \cap_{i\in I} f_i(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ ($A \in \mathfrak{I}$).

Лемма 7. *Пусть φ – произвольная FR-функция, $\mathfrak{F} = \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \Omega R(f_i, \varphi)$, $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, где $f = \cap_{i\in I} f_i$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega R(f, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$, тогда $G \in \mathfrak{F}_i$. Значит, $O^{\Omega}(G) \in f_i(\Omega'), i \in I$. Поэтому $O^{\Omega}(G) \in \cap_{i\in I} f_i(\Omega') = f(\Omega')$. Так как для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$ имеем $G^{\varphi(A)} \in f_i(A), i \in I$, то $G^{\varphi(A)} \in \cap_{i\in I} f_i(A) = f(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $B \in \mathfrak{H}$. Тогда $O^{\Omega}(B) \in f(\Omega') = \cap_{i\in I} f_i(\Omega')$ и $B^{\varphi(A)} \in f(A) = \cap_{i\in I} f_i(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(B)$. Отсюда следует, что $O^{\Omega}(B) \in f_i(\Omega')$ и $B^{\varphi(A)} \in f_i(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(B)$, $i \in I$. Поэтому $B \in \mathfrak{F}_i$, $i \in I$, и значит, $B \in \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. □

Нетрудно проверить, что и для расслоенных $\mathfrak{C}$-классов Фиттинга справедливо утверждение, аналогичное лемме 7.

Следуя определению n-кратно (тотально) локальной формации (см. [5, 7]), аналогично определяются (см. [12]) n-кратно (тотально) Ω-расслоенные классы Фиттинга.

Каждый $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга считаем 0-кратно Ω-расслоенным с направлением φ. При $n \neq 0$ $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем n-кратно Ω-расслоенным с направлением φ, если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один $\Omega R_{(n-1)}$-спутник, т. е. такой ΩR-спутник, все значения которого являются $(n-1)$-кратно Ω-расслоенными $\mathfrak{C}$-классами Фиттинга с направлением φ. Ω-расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга мультиоператорных T-групп называется тотально Ω-расслоенным, если он является n-кратно Ω-расслоенным $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга для любого $n \in \mathbb{N}$.

$\Omega R_{(n-1)}$-спутник f n-кратно Ω-расслоенного $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ с направлением φ назовем минимальным $\Omega R_{(n-1)}$-спутником, если $f \leq h$ для всякого $\Omega R_{(n-1)}$-спутника h $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Напомним, что $\Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ – Ω-расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с направлением φ, порожденный множеством $\mathfrak{C}$-групп $\mathfrak{X}$. Обозначим через $\Omega R_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ ($\Omega R_\infty(\mathfrak{X}, \varphi)$) n-кратно (тотально) Ω-расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с направлением φ, порожденный непустым множеством $\mathfrak{C}$-групп $\mathfrak{X}$. Соответственно через $\Omega FrR_n(\mathfrak{X})$ и $\Omega KR_n(\mathfrak{X})$ обозначаются n-кратно Ω-свободный и n-кратно

Ω-канонический $\mathfrak{C}$-классы Фиттинга, порожденные непустым множеством $\mathfrak{C}$-групп $\mathfrak{X}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп. Тогда n-кратно Ω-расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным $\Omega R_{(n-1)}$-спутником f таким, что $f(\Omega') = \Omega R_{(n-1)}((O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}), \varphi)$, $f(A) = \Omega R_{(n-1)}((G^{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{X}), \varphi)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.*

Доказательство. Множество $\mathfrak{C}$ является n-кратно Ω-расслоенным классом Фиттинга с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$. Кроме того, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{C}$ и, значит, $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует, и множество $\mathfrak{L}$ всех ΩR_{n-1}-спутников $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ непусто.

Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из $\mathfrak{L}$. По лемме 7 $\mathfrak{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$. Так как пересечение m-кратно Ω-расслоенных $\mathfrak{C}$-классов Фиттинга с направлением φ является m-кратно Ω-расслоенным $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга с направлением φ для любого $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{0\}$, то все значения f_1 являются $(n-1)$-кратно Ω-расслоенными $\mathfrak{C}$-классами Фиттинга с направлением φ. Следовательно, f_1 – ΩR_{n-1}-спутник $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, причем f_1 является единственным минимальным ΩR_{n-1}-спутником $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в силу своего строения.

Пусть f – ΩR-функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$, тогда $O^{\Omega}(M) \in f(\Omega')$ и из $\mathfrak{K}(M) \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ следует, что $M^{\varphi(A)} \in f(A)$ для любых $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(M)$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega R(f, \varphi)$. Тогда $M \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку f – ΩR_{n-1}-спутник, то $\mathfrak{H}$ – n-кратно Ω-расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с направлением φ. Значит, $\mathfrak{F} = \Omega R_n(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Для этого достаточно показать, что $f \leq f_1$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая T-группа $H \in \mathfrak{X}$, что $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(H)$. Из равенства $\mathfrak{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$, следует, что $H^{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Поэтому $f_1(A) \neq \varnothing$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$, то из $G \in \mathfrak{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$ получаем $G^{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Пусть теперь $A \in (\Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})) \setminus \mathfrak{K}(G)$. Тогда $G \in \mathfrak{C}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ и, значит, $G^{\varphi(A)} = \{0\} \in f_1(A)$. Так как f_1 – ΩR_{n-1}-спутник, то $f(A) = \Omega R_{n-1}((G^{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{X}), \varphi) \subseteq f_1(A)$. Кроме того, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ имеем $f(\Omega') = \Omega R_{n-1}((O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}), \varphi) \subseteq f_1(\Omega')$. Если $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$, то $f(A) = \varnothing \subseteq f_1(A)$. Следовательно, $f \leq f_1$. Тогда $\mathfrak{H} = \Omega R(f, \varphi) \subseteq \Omega R(f_1, \varphi) = \mathfrak{F}$.

Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Поэтому, $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, и значит, $f \in \mathfrak{L}$. Так как f_1 – минимальный элемент в $\mathfrak{L}$, то из $f \leq f_1$ следует, что $f = f_1$. $\square$

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп. Тогда тотально Ω-расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R_{\infty}(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным ΩR_{∞}-спутником f таким, что $f(\Omega') = \Omega R_{\infty}((O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}), \varphi)$, $f(A) = \Omega R_{\infty}((G^{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{X}), \varphi)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.*

Следствие 6. *Пусть f_i – минимальный $\Omega R_{(n-1)}$-спутник n-кратно Ω-расслоенного $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.*

Следствие 7. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп. Тогда n-кратно Ω-свободный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega FrR_n(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным $\Omega FrR_{(n-1)}$-спутником f таким, что $f(\Omega') = \Omega FrR_{(n-1)}(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X})$,*

$f(A) = \Omega FrR_{(n-1)}(O^{A'}(G) : G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ *и* $f(A) = \varnothing$, *если* $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Следствие 8. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– непустой класс* T*-групп. Тогда* n*-кратно* Ω*-канонический* $\mathfrak{C}$*-класс Фиттинга* $\mathfrak{F} = \Omega KR_n(\mathfrak{X})$ *обладает единственным минимальным* $\Omega KR_{(n-1)}$*-спутником* f *таким, что* $f(\Omega') = \Omega KR_{(n-1)}(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X})$, $f(A) = \Omega KR_{(n-1)}(O^{A,A'}(G) : G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ *и* $f(A) = \varnothing$, *если* $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

References

[1] W. Gaschütz, *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen*, Mathematische Zeitschrift, **80**:4 (1963), 300–305. Zbl 0111.24402

[2] B. Hartley, *On Fischer's dualization of formation theory*, Proceedings of the London Mathematical Society, **3**:19 (1969), 193–207. MR0244381

[3] L.A. Shemetkov, *Graduated formations of groups*, Mathematics of the USSR-Sbornik, **23**:4 (1974), 593–611. MR0352258

[4] L.A. Shemetkov, *Formations of Finite Groups*, Nauka, Moscow, 1978. MR0519875

[5] L. A. Shemetkov and A. N. Skiba, *Formations of Algebraic Systems*, Nauka, Moscow, 1989. MR1007307

[6] K. Doerk and T. Hawkes, *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin and New Jork, 1992. MR1169099

[7] A. N. Skiba, *Algebra of Formations*, Belarusskaya Nauka, Minsk, 1997. MR1659316

[8] A. N. Skiba and L. A. Shemetkov, *On the minimal composition screen of a composition formation*, Voprosy Algebry, **7** (1992), 39–43. MR1647589

[9] A. N. Skiba and L. A. Shemetkov, *Partially composition formations of finite groups*, Doclady of the national academy of science of Belarus, **43**:4 (1999), 5–8. MR1745723

[10] A.N. Skiba and L.A. Shemetkov, *Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups*, Siberian Advances in Mathematics, **10**:2 (2000), 112–141. MR1781326

[11] V. A. Vedernikov and M. M. Sorokina, *Ω-Foliated formations and Fitting classes of finite groups*, Discrete Mathematics and Applications, **11**:5 (2001), 507–527. MR1874910

[12] M. M. Sorokina, *On minimal satellites of multiply Ω-foliated Fitting classes and formations of finite groups*, in: Proc. 70th Ann. Bryansk State Pedagogical Univ., Bryansk State Pedagogical University, Bryansk (2000), 199–203.

[13] V. A. Vedernikov, *Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **2** (2001), 217–233. MR2067934

[14] V. A. Vedernikov and M. M. Sorokina, *ω-Fibered formations and Fitting classes of finite groups*, Mathematical Notes, **71**:1 (2002), 39–55. MR1900446

[15] V. A. Vedernikov, *On new types of ω-fibered formations of finite groups*, in: Ukrainian Mathematical Congress-2001 (Kiev, Ukraine, August 21–23, 2001): Proceedings. Section 1: Algebra and Number Theory, Inst. Mat., Kiev (2002), 36–45. MR2225262

[16] V. A. Vedernikov, *On new types of ω-fibered Fitting classes of finite groups*, Ukrainian Mathematical Journal, **54**:7 (2002), 897–906. MR2015511

[17] V. A. Vedernikov, *Ω-Foliated formations and Fitting classes with finite composition series*, in: Abstracts: Ukrainian Mathematical Congress. Algebra and Number Theory, Kiev (2001), 16–17.

[18] V. A. Vedernikov and E.N. Demina, *Ω-Foliated formations of multioperator T-groups*, Siberian Mathematical Journal, **51**, No. 5 (2010), 789–804. MR2757923

[19] V. A. Vedernikov and E. N. Demina, *Ω-Foliated formations and Fitting classes of T-groups*, in: Algebra and Its Applications: Proceedings of the International Conference on the Occasion of the 80 years of the Birth of A. I. Kostrikin, Kabardino-Balkarsk. Univ., Nalchik (2009), 26–29.

[20] V. A. Vedernikov, *Foliated Fitting classes of multioperator T-groups*, in: Innovative technologies of teaching physics and mathematics disciplines: Proceedings of the International scientific-practical internet-conference on the Occasion of the 60 years of N.T. Vorob'ev, Vitebsk St. Univ., Vitebsk (2011), 16–18.

[21] P. J. Higgins, *Groups with multiple operators*, Proceedings of the London Mathematical Society, **6**:3 (1956), 366–416. MR0082492
[22] A. G. Kurosh, *Lectures on General Algebra*, Fizmatgiz, Moscow, 1962. MR0141700
[23] L. A. Skornyakov (ed.), *General Algebra. Vol. 2*, Nauka, Moscow, 1991. MR1146434

Ekaterina Nikolaevna Bazhanova
Moscow City University (MCU),
2-y Selskokhozyastvenny pr., 4-1,
129226, Moscow, Russia
E-mail address: DeminaENmf@yandex.ru

Viktor Aleksandrovich Vedernikov
Moscow City University (MCU),
2-y Selskokhozyastvenny pr., 4-1,
129226, Moscow, Russia
E-mail address: vavedernikov@mail.ru