S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 640–646 (2017) УДК 519.854
DOI 10.17377/semi.2017.14.055 MSC 90C57

БУЛЕВ КВАДРАТИЧНЫЙ МНОГОГРАННИК ЯВЛЯЕТСЯ ГРАНЬЮ МНОГОГРАННИКА ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

А.Н. МАКСИМЕНКО

Abstract. Let $P_{\rm BQP}(n)$ be a boolean quadric polytope, $n \in \mathbb{N}$, $P_{\rm LO}(m)$ — linear ordering polytope, $m \in \mathbb{N}$. It is shown that $P_{\rm BQP}(n)$ is affine equivalent to a face of $P_{\rm LO}(2n)$.
Keywords: boolean quadric polytope, linear ordering polytope, stable set polytope, double covering polytope, affine equivalence.

1. Введение

Множество вершин $P_{\rm BQP}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *булева квадратичного многогранника* состоит из 0/1-векторов $\boldsymbol{x} = (x_{ij}) \in \{0,1\}^{n(n+1)/2}$, координаты которых удовлетворяют условию

$$x_{ij} = x_{ii}x_{jj}, \quad 1 \le i < j \le n. \tag{1}$$

Сам многогранник представляет собой выпуклую оболочку $\operatorname{conv}(P_{\rm BQP}(n)) \subset \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Тем не менее, далее мы будем называть многогранником множество его вершин. (Причины такой вольности изложены в начале следующего раздела.)

Булевы квадратичные многогранники возникают, в первую очередь, в контексте поиска решений для задачи квадратичного 0/1-программирования. Входными данными этой задачи является набор коэффициентов $c_{ij} \in \mathbb{R}$ многочлена

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij} x_i x_j.$$

Maksimenko, A.N., Boolean quadric polytopes are faces of linear ordering polytopes.

Работа выполнена в рамках гос. задания на НИР ЯрГУ, шифр 1.5768.2017/П220.

Поступила 20 апреля 2017 г., опубликована 18 июля 2017 г.

Цель задачи — поиск набора значений 0/1-переменных $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, доставляющих многочлену максимальное значение.

Изучению свойств этих многогранников, а также свойств аффинно эквивалентных им многогранников разрезов в настоящее время уделяется значительное внимание. Поисковая система scholar.google.ru сообщает о 889 цитированиях[1] монографии Деза и Лоран [1], целиком посвященной этой теме. Недавно установлено [3, 4], что размер линейного (внешнего) описания для $\mathrm{conv}(P_{\mathrm{BQP}}(n))$ остается экспоненциальным, даже если разрешено использование вспомогательных переменных. Граф этого многогранника полон; более того, любые три вершины образуют грань этого многогранника [1, Corollary 31.6.2] (многогранники с таким свойством называются 3-смежностными). Известно также, что для любого фиксированного $s \leq 3 \left\lfloor \frac{\log_2 n}{2} \right\rfloor$, $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ имеет s-смежностную грань со сверхполиномиальным (относительно n) числом вершин [8].

С оптимизационной задачей о линейном упорядочивании связаны многогранники линейных порядков. Они не столь популярны, как булевы квадратичные. Тем не менее, исследованию их свойств уделяется внимание в нескольких десятках публикаций (см., например, [2, 6], а также ссылки в них).

В настоящее время известно [10], что булевы квадратичные многогранники аффинно эквивалентны граням многогранников, ассоциированных со следующими NP-трудными задачами комбинаторной оптимизации: задача коммивояжера, задача о рюкзаке, задачи о покрытиях и упаковках множества, задача о максимальной 3-выполнимости, задача о 3-назначениях и многие другие. Известно также, многогранники любой линейной задачи комбинаторной оптимизации являются аффинными проекциями граней булевых квадратичных многогранников [7]. В частности, задача о линейном упорядочивании является линейной задачей комбинаторной оптимизации (но не благодаря «линейности» упорядочивания).

Ниже будет показано, что между $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ и многогранниками линейных порядков $P_{\mathrm{LO}}(m)$, где m — число упорядочиваемых элементов, имеется более тесная связь. А именно, $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ аффинно эквивалентен некоторой грани многогранника $P_{\mathrm{LO}}(2n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, многие свойства булева квадратичного многогранника наследуются многогранником линейных порядков. Например, так как граф многогранника $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ полон и имеет 2^n вершин, то кликовое число графа многогранника $P_{\mathrm{LO}}(m)$ ограничено снизу величиной $2^{\lfloor m/2 \rfloor}$. Аналогично, так как сложность расширенной формулировки для $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ оценивается снизу величиной 1.5^n [4], то сложность расширенной формулировки для $P_{\mathrm{LO}}(m)$ также экспоненциальна относительно m.

2. Основная часть

Для множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ будем пользоваться обозначением $[n]$. Вектор-столбцы (в частности, вершины многогранников) выделены полужирным шрифтом. Гиперплоскость H называется *опорной* к многограннику P, если $P \cap H \neq \varnothing$ и многогранник P целиком лежит с одной стороны от этой гиперплоскости. Пересечение многогранника с одной или несколькими опорными гиперплоскостями называется его *гранью*.

[1] дата обращения: 20.04.2017

В настоящей работе рассматриваются только выпуклые многогранники, определяемые посредством описания множества их вершин. Поэтому далее, с целью упрощения рассуждений, выпуклый многогранник будет отождествляться с множеством его вершин. То же самое верно и в отношении граней многогранников. Выгоду от такого упрощения проиллюстрируем следующим примером.

Пусть $X = \mathrm{ext}(P)$ — множество вершин многогранника P. Соответственно, $P = \mathrm{conv}(X)$. Пусть H — гиперплоскость, опорная к многограннику P. Тогда множество вершин грани $P \cap H$ можно выразить как сложной формулой $\mathrm{ext}(\mathrm{conv}(X) \cap H)$, так и простой $X \cap H$. Таким образом, данное выше определение грани не искажается при замене многогранника множеством его вершин.

Пусть P и Q — выпуклые многогранники, связанные аффинным отображением $\alpha\colon P \to Q$. В этом случае будем говорить, что Q является *(аффинной) проекцией* P. Если же отображение α обратимо, то P и Q называются *аффинно эквивалентными*.

Перейдем теперь к описанию многогранника линейных порядков.

Пусть $D = (V, A)$ — орграф без петель и параллельных дуг, с множеством вершин $V = [m]$. Далее предполагается, что орграф D полный, то есть $(i,j) \in A$ и $(j,i) \in A$ для всех $i, j \in V$, $i \neq j$. Подграф $T = (V, A')$ орграфа D называется *транзитивным*, если из условий $(i,j) \in A'$ и $(j,k) \in A'$ следует $(i,k) \in A'$. Если для каждой пары вершин $i, j \in V$ в A' входит ровно одна из двух дуг (i,j) и (j,i), то соответствующий орграф называется *турниром*. Транзитивный турнир (точнее, множество его дуг A') в орграфе D будем называть *линейным порядком*. Каждый линейный порядок L в D соответствует некоторой перестановке $\pi\colon [n] \to [n]$, удовлетворяющей условию

$$\pi(i) < \pi(j) \iff (i,j) \in L. \tag{2}$$

Координаты y_{ij}, $1 \le i < j \le m$ характеристического вектора $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{m(m-1)/2}$ для линейного порядка L в D определим следующим образом:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,j) \in L, \\ 0, & \text{если } (j,i) \in L. \end{cases}$$

Обозначим через $P_{\mathrm{LO}}(m)$ множество всех характеристических векторов линейных порядков в D. Выпуклая оболочка $P_{\mathrm{LO}}(m)$ называется *многогранником линейных порядков*. $P_{\mathrm{LO}}(m)$ может быть также определен как множество $0/1$-векторов $\boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{m(m-1)/2}$, удовлетворяющих 3-контурым неравенствам (см., например, [6]):

$$0 \le y_{ij} + y_{jk} - y_{ik} \le 1, \quad i < j < k. \tag{3}$$

Рассмотрим еще два семейства многогранников.

Многогранником двойных покрытий будем называть выпуклую оболочку множества

$$P_{2\mathrm{cover}}(B) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid B\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\},$$

где $B \in \{0,1\}^{k \times n}$ — $(k \times n)$-матрица, каждая строка которой содержит ровно четыре единицы, $\mathbf{2}$ — вектор-столбец, все координаты которого равны 2. Известно, что это семейство является в некотором смысле минимальным среди семейств многогранников с NP-полным критерием несмежности вершин [9].

Легко заметить, что $P_{\mathrm{LO}}(m)$ аффинно эквивалентен грани $P_{2\mathrm{cover}}(B)$, где система $B\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ определяется следующим образом. В дополнение к переменным y_{ij}, $1 \le i < j \le m$, вводятся две переменные $z, h \in \{0,1\}$. Для каждой переменной y_{ij} вводится дополнительная переменная $\bar{y}_{ij} \in \{0,1\}$ и уравнение

$$y_{ij} + \bar{y}_{ij} + z + h = 2. \tag{4}$$

А каждое 3-контурное неравенство (3) заменяется уравнением

$$y_{ij} + y_{jk} + \bar{y}_{ik} + t_{ijk} = 2, \tag{5}$$

где t_{ijk} — еще одна дополнительная 0/1-переменная. С одной стороны, система из $m(m-1)(m+1)/6$ уравнений (4) и (5) определяет некоторый многогранник двойных покрытий. С другой стороны, в пересечении опорных гиперплоскостей $z = 0$ и $h = 1$ находится грань этого многогранника, аффинно эквивалентная $P_{\mathrm{LO}}(m)$. В этой связи заметим, что многогранники двойных покрытий (во всяком случае, некоторые из них) едва ли могут быть гранями $P_{\mathrm{LO}}(m)$, так как критерий смежности вершин последнего полиномиален [11].

Пусть $G = (V, E)$ — (неориентированный) граф и $V = [n]$. *Многогранником независимых множеств* в графе G называется выпуклая оболочка множества

$$P_{\mathrm{stab}}(G) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid x_i + x_j \le 1 \text{ для каждого ребра } \{i,j\} \in E\}.$$

Сводимость задачи о независимом множестве к задаче о разрезающем циклы наборе дуг, описанная в классической работе Карпа [5], определяет следующую взаимосвязь между $P_{\mathrm{stab}}(G)$ и $P_{\mathrm{LO}}(m)$.

Лемма 1. *Пусть $G = (V, E)$ — граф, где $V = [n]$. Тогда многогранник $P_{\mathrm{stab}}(G)$ является проекцией одной из граней многогранника $P_{\mathrm{LO}}(2n)$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{y} = (y_{ij}) \in P_{\mathrm{LO}}(2n)$. Воспользуемся тем, что уравнения $y_{ij} = 0$, при $1 \le i < j \le 2n$ определяют (некоторые) опорные гиперплоскости многогранника $P_{\mathrm{LO}}(2n)$. Для каждого ребра $\{i,j\} \in E$ графа G положим

$$y_{i,n+j} = y_{j,n+i} = 0 \tag{6}$$

и перейдем к рассмотрению соответствующей грани $F(G)$ многогранника $P_{\mathrm{LO}}(2n)$. Ниже будет показано, что эта грань связана с многогранником $P_{\mathrm{stab}}(G)$ аффинным отображением α:

$$y_{i,n+i} \mapsto x_i, \quad \text{где } \boldsymbol{x} = (x_i) \in P_{\mathrm{stab}}(G).$$

Из 3-контурных неравенств

$$y_{i,j} + y_{j,n+j} - y_{i,n+j} \le 1, \tag{7}$$

$$y_{i,j} + y_{j,n+i} - y_{i,n+i} \ge 0, \tag{8}$$

и ограничений (6) следует $y_{i,n+i} \le y_{i,j} \le 1 - y_{j,n+j}$ и, в частности,

$$y_{i,n+i} + y_{j,n+j} \le 1, \quad \text{при } \{i,j\} \in E.$$

Таким образом, $\alpha(F(G)) \subseteq P_{\mathrm{stab}}(G)$.

Покажем теперь, что для каждой вершины $\boldsymbol{x} \in P_{\mathrm{stab}}(G)$ найдется вершина $\boldsymbol{y} \in F(G)$ такая, что $y_{i,n+i} = x_i$, $i \in [n]$.

Для произвольно выбранной вершины $\boldsymbol{x} \in P_{\mathrm{stab}}(G)$ рассмотрим множества

$$I_0 = \{i \in [n] \mid x_i = 0\} \quad \text{и} \quad I_1 = \{i \in [n] \mid x_i = 1\}.$$

Далее предполагаем, что элементы множеств $I_0 = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и $I_1 = \{i'_1, \ldots, i'_{n-k}\}$ отсортированы (любым способом). Соответствующий линейный порядок для

$\boldsymbol{y} \in F(G)$ представим перестановкой $\pi\colon [n] \to [n]$ (см. условие (2)). Положим

$$\begin{aligned} &\pi(i_s) = 2n - k + s, && \pi(n + i_s) = s, && s \in [k],\\ &\pi(i'_t) = k + t, && \pi(n + i'_t) = n + t, && t \in [n-k]. \end{aligned}$$

Из описания перестановки π следует, что $y_{i_s,n+i_s} = 0$, при $s \in [k]$, а $y_{i'_t,n+i'_t} = 1$, при $t \in [n-k]$. То есть $\alpha(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$. Кроме того, если $y_{i,n+i} + y_{j,n+j} \le 1$, то $y_{i,n+j} = y_{j,n+i} = 0$. Значит, $\boldsymbol{y} \in F(G)$. □

Заметим, что в только что доказанной лемме речь идет именно о проекции, так как каждая вершина $\boldsymbol{x} \in P_{\mathrm{stab}}(G)$, вообще говоря, является образом нескольких вершин соответствующей грани многогранника $P_{\mathrm{LO}}(2n)$.

Известно [10], что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует граф G на $n(n+1)$ вершинах такой, что булев квадратичный многогранник $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ аффинно эквивалентен грани многогранника $P_{\mathrm{stab}}(G)$. С учетом леммы 1 получаем, что $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ является проекцией одной из граней многогранника $P_{\mathrm{LO}}(2n(n+1))$. Оказывается, между этими двумя многогранниками имеется более тесная связь.

Теорема 1. *$P_{\mathrm{BQP}}(n)$ аффинно эквивалентен грани многогранника $P_{\mathrm{LO}}(2n)$, при любом $n \in \mathbb{N}$.*

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\boldsymbol{y} = (y_{ij}) \in P_{\mathrm{LO}}(2n)$. Воспользуемся тем, что неравенства $y_{ij} \ge 0$, при $1 \le i < j \le 2n$, и 3-контурные неравенства (3) выполнены для всех $\boldsymbol{y} \in P_{\mathrm{LO}}(2n)$, а соответствующие равенства определяют (некоторые) опорные гиперплоскости для многогранника $P_{\mathrm{LO}}(2n)$.

Покажем, что многогранник $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ аффинно эквивалентен грани $F \subset P_{\mathrm{LO}}(2n)$, лежащей в пересечении опорных гиперплоскостей

$$y_{2i,2j-1} = 0, \tag{9}$$

$$y_{2i-1,2i} + y_{2i,2j} - y_{2i-1,2j} = 0, \tag{10}$$

$$y_{2i-1,2j-1} + y_{2j-1,2j} - y_{2i-1,2j} = 0, \tag{11}$$

для всех $1 \le i < j \le n$.

Из (10) и (11) выводим

$$y_{2i-1,2j} = y_{2i-1,2i} + y_{2i,2j}, \tag{12}$$

$$y_{2i-1,2j-1} = y_{2i-1,2i} + y_{2i,2j} - y_{2j-1,2j}. \tag{13}$$

Таким образом, все координаты вектора $\boldsymbol{y} \in F$ линейно зависят от координат $y_{2i-1,2i}$, $i \in [n]$, и $y_{2i,2j}$, $1 \le i < j \le n$.

Покажем, что значения координаты $y_{2i,2j}$ однозначно определяются значениями координат $y_{2i-1,2i}$ и $y_{2j-1,2j}$. Из (12) и $y_{2i-1,2j} \le 1$ следует $y_{2i,2j} \le 1 - y_{2i-1,2i}$, иными словами,

$$y_{2i-1,2i} = 1 \Rightarrow y_{2i,2j} = 0.$$

Из 3-контурного неравенства $0 \le y_{2i,2j-1} + y_{2j-1,2j} - y_{2i,2j}$ и уравнения (9) следует $y_{2i,2j} \le y_{2j-1,2j}$, то есть

$$y_{2j-1,2j} = 0 \Rightarrow y_{2i,2j} = 0.$$

А из (13) и $y_{2i-1,2j-1} \ge 0$ следует $y_{2i,2j} \ge y_{2j-1,2j} - y_{2i-1,2i}$, то есть

$$y_{2i,2j} = 1, \quad \text{если } y_{2i-1,2i} = 0 \text{ и } y_{2j-1,2j} = 1.$$

Таким образом, учитывая, что вектор $\boldsymbol{y} \in F$ является 0/1-вектором,

$$y_{2i,2j} = y_{2j-1,2j}(1 - y_{2i-1,2i}). \tag{14}$$

Итак, все вершины грани F должны быть 0/1-векторами, удовлетворяющими соотношению (14), и все координаты этих векторов линейно зависят от $y_{2i-1,2i}$, $i \in [n]$, и $y_{2i,2j}$, $1 \le i < j \le n$ (см. уравнения (9), (12) и (13)). Покажем теперь, что каждому набору значений переменных $y_{2i-1,2i}$, $i \in [n]$, на самом деле соответствует некоторая вершина грани F.

Пусть

$$I_0 = \{i \in [n] \mid y_{2i-1,2i} = 0\}, \quad I_1 = \{i \in [n] \mid y_{2i-1,2i} = 1\}.$$

Далее предполагаем, что элементы множеств $I_0 = \{i_1, \dots, i_k\}$ и $I_1 = \{i'_1, \dots, i'_{n-k}\}$ отсортированы *по убыванию.* Линейный порядок для соответствующей вершины $\boldsymbol{y} \in F$ представим перестановкой $\pi\colon [n] \to [n]$ (см. условие (2)). Положим

$$\begin{aligned} &\pi(2i_s - 1) = n - k + 2s, && \pi(2i_s) = \pi(2i_s - 1) - 1, && s \in [k], \\ &\pi(2i'_t - 1) = t, && \pi(2i'_t) = n + k + t, && t \in [n-k]. \end{aligned}$$

Так, например, в случае $n = 3$ вершины грани $F \subset P_{\mathrm{LO}}(6)$ соответствуют восьми перестановкам (записанным в виде $\pi^{-1}(1) \dots \pi^{-1}(6)$, то есть если цифра i располагается в этой последовательности левее j, то $y_{ij} = 1$)

$$\begin{aligned} &654321, && k = 3, && I_0 = \{3,2,1\}, && I_1 = \varnothing, \\ &165432, && k = 2, && I_0 = \{3,2\}, && I_1 = \{1\}, \\ &365214, && k = 2, && I_0 = \{3,1\}, && I_1 = \{2\}, \\ &543216, && k = 2, && I_0 = \{2,1\}, && I_1 = \{3\}, \\ &316542, && k = 1, && I_0 = \{3\}, && I_1 = \{2,1\}, \\ &514362, && k = 1, && I_0 = \{2\}, && I_1 = \{3,1\}, \\ &532164, && k = 1, && I_0 = \{1\}, && I_1 = \{3,2\}, \\ &531642, && k = 0, && I_0 = \varnothing, && I_1 = \{3,2,1\}. \end{aligned}$$

Из описания перестановки π следует, что $y_{2i_s-1,2i_s} = 0$, при $s \in [k]$, а $y_{2i'_t-1,2i'_t} = 1$, при $t \in [n-k]$. Справедливость соотношений (9)–(11) проверяется перебором четырех случаев, в зависимости от принадлежности индексов i, j множествам I_0, I_1.

Завершая доказательство, установим между $\boldsymbol{x} = (x_{ij}) \in P_{\mathrm{BQP}}(n)$ и $\boldsymbol{y} \in F \subset P_{\mathrm{LO}}(2n)$ взаимно-однозначное соответствие:

$$\begin{aligned} &x_{ii} = y_{2i-1,2i}, && i \in [n], \\ &x_{ij} = y_{2j-1,2j} - y_{2i,2j}, && 1 \le i < j \le [n]. \end{aligned}$$

4. Благодарности

Автор благодарит Самюэля Фиорини за указанную им взаимосвязь между многогранниками независимых множеств и многогранниками линейных порядков, описанную в лемме 1.

References

[1] M.M. Deza, M. Laurent, *Geometry of cuts and metrics*, Springer, 1997. MR1460488
[2] S. Fiorini, *How to recycle your facets*, Discrete Optimization, **3** (2006), 136–153. MR2224981
[3] S. Fiorini, S. Massar, S. Pokutta, H.R. Tiwary, R. de Wolf, *Exponential Lower Bounds for Polytopes in Combinatorial Optimization*, J. ACM, **62**:2 (2015), Article No.: 17. MR3346156
[4] V. Kaibel, S. Weltge, *A Short Proof that the Extension Complexity of the Correlation Polytope Grows Exponentially*, Discrete and Computational Geometry, **53** (2015), 397–401. MR3316228
[5] R.M. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, Complexity of computer computations, (1972), 85–103. MR0378476
[6] M.M. Kovalev, G.G. Bolotashvili, *Extension of a special class of facets for the polytope of the linear ordering problem*, Doklady of the National academy of sciences of Belarus, **56**:5 (2012), 20–24. MR3587571
[7] A.N. Maksimenko, *An analog of the Cook theorem for polytopes*, Russian Mathematics, **56** (2012), 28–34. MR3077485
[8] A. Maksimenko, *k-Neighborly faces of the Boolean quadric polytopes*, Journal of Mathematical Sciences, **203** (2014), 816–822. MR3431787
[9] A. Maksimenko, *The common face of some 0/1-polytopes with NP-complete nonadjacency relation*, Journal of Mathematical Sciences, **203** (2014), 823–832. MR3431788
[10] A.N. Maksimenko, *A special role of Boolean quadratic polytopes among other combinatorial polytopes*, Model. Anal. Inform. Sist., **23** (2016), 23–40. MR3502273
[11] H.P. Young, *On permutations and permutation polytopes*, Polyhedral combinatorics, **8** (1978), 128–140. MR0510372

Aleksandr Nikolaevich Maksimenko
P. G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya 14,
150000, Yaroslavl, Russia
E-mail address: maximenko.a.n@gmail.com