S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 647–656 (2017) УДК 517.5
DOI 10.17377/semi.2017.14.056 MSC 31B10

ОПЕРАТОР ТИПА ПОТЕНЦИАЛА ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА ПО $\dot{\mathbb{R}}^n$ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ГЕЛЬДЕРОВОСТИ

Б.Г. ВАКУЛОВ, Ю.Е. ДРОБОТОВ

Abstract. Theorems on the conditions for the spherical Riesz potential type operator to be bounded in the generalized Hölder spaces are considered to develop results for the spatial case. Due to applying stereographic projection, theorems on boundedness of the variable order multidimensional potential type operator in the generalized variable Hölder spaces are proven.

Keywords: fractional calculus, variable order, generalized Hölder space, Riesz potential.

1. Введение

1.1. **Постановка задачи.** В настоящее время исследования функциональных классов, определяющие характеристики которых зависят от пространственных координат, интенсивно развиваются. Об этом можно судить по все возрастающему объему соответствующих публикаций: так,например, проблемы действия операторов дробного интегродифференцирования в одномерном случае в таких пространствах рассматривались в работах [6], [10], [25]. Одновременно, в последние годы возрос интерес к исследованию интегральных и дифференциальных операторов не только нецелого, но и вообще переменного порядка — как вещественного, так и комплексного. Им посвящены, например, работы [16], [18], [21], [23], [24], [34], [35], [36].

Vakulov, B.G., Drobotov, Yu.E., Variable order Riesz potential over $\dot{\mathbb{R}}^n$ on weighted generalized variable Hölder spaces.

Поступила 19 июля 2016 г., опубликована 19 июля 2017 г.

Данные тенденции можно объяснить как стремлением к обобщению известных результатов, созданию универсального аппарата интегрального и дифференциального исчисления, так и наличием постоянно расширяющегося круга возможностей их приложений, удовлетворяющих уже существующие и разрешающих новые потребности математической физики. Приведем в качестве примера работы [1], [2], [3], [11], [12], связанные с исследованиями в разных областях механики и теории управления.

Целью настоящей работы является исследование условий ограниченности многомерного потенциала Рисса переменного порядка в пространствах обобщенной переменной гельдеровости. Актуальность поставленной задачи объясняется нарастающим объемом результатов в теории многомерных потенциальных и гиперсингулярных операторов переменного порядка – в частности, об условиях взаимосвязи гладкостных свойств образа и прообраза потенциального оператора. Этот вопрос особенно актуален в приложениях разрабатываемой теории к исследованию устойчивости решений многомерных интегральных уравнений.

В представленном здесь исследовании были использованы теоремы работы [21] об ограниченности сферического потенциала Рисса переменного порядка. На их основе применением стереографического проектирования были получены условия ограниченности многомерного оператора типа потенциала с характеристикой в весовых пространствах обобщенной переменной гельдеровости.

1.2. **Гладкость в терминах гельдеровских пространств.** Тематика пространств обобщенной переменной гельдеровости обязана своей актуальностью, в частности, получившему широкое распространение способу определения понятия гладкости. Следует обратить внимание, что при рассмотрении даже „обычной“ гладкости на сфере – т.е. дифференцируемости целого порядка – возникает необходимость в уточнении этого понятия. Именно, его можно определить, следуя двумя принципиально различными путями [29]:

I) в терминах, так или иначе связанных с оператором Бельтрами – Лапласа;

II) в терминах, связанных с дифференцированием по декартовым координатам.

Пути I) и II) приводят к, вообще говоря, эквивалентным классам $H^\lambda(\mathbb{S}^n)$ при нецелом λ и заведомо различным – при целых $\lambda = 1, 2, ...$ (здесь и далее $\mathbb{S}^n$ – сфера единичного радиуса в $\mathbb{R}^{n+1}$).

Усредненные пространства гельдеровского типа на сфере, определяемые на пути I), вводились, в частности, в [37] как частные случаи более общих пространств – например, пространств Бесова в [4], [7], [17]. Способы определения пространств гельдеровского типа на пути II) предложены в [22], [15].

Вопрос об эквивалентных нормировка в пространствах функций дробной гладкости на сфере типа $H^\lambda(\mathbb{S}^n)$ был решен в работах [29], [26].

Естественным обобщением гельдеровских пространств являются обобщенные пространства Гельдера, определяемые в терминах произвольного, не обязательно степенного, модуля непрерывности. Некоторые из вариантов обобщенных пространств Гельдера на сфере для модулей непрерывности первого и старших порядков и в терминах дифференцирования I) вводились, например, в [4], [5], [19].

1.3. **Обзор некоторых результатов.** Действие сферического оператора типа потенциала постоянного вещественного порядка в обобщенных классах Гельдера рассматривалось в работе [28], где, в частности, были получены оценки типа Зигмунда и доказаны теоремы о гомеоморфизме и ограниченности в обобщенных гельдеровских пространствах соответствующих конфигураций. Данный результат был распространен в [29] на риссов потенциал по $\dot{\mathbb{R}}^n$ с некоторыми степенными весами.

Потенциал Рисса постоянного комплексного порядка в обобщенных пространствах Гельдера на сфере являлся объектом рассмотрения в работе [27], где, в частности, были представлены оценки типа Зигмунда. В работе [30] результаты об ограниченности пространственного потенциала комплексного порядка были получены на основании соответствующих результатов работы [27].

В работе [20] был рассмотрен оператор сферической свертки с заданной асимптотикой его мультипликатора и выявлены условия его ограниченности в весовых обобщенных пространствах Гельдера.

Оценки типа Зигмунда и гладкостные свойства оператора сферической свертки типа потенциала со степенно-логарифмическим ядром составляли предмет рассмотрения в работе [31], где, в частности, были приведены условия ограниченности.

В работе [33] был рассмотрен сферический оператор типа потенциала в весовых пространствах Гельдера переменного порядка. В [33] получены результаты об изоморфизме, осуществляемом этим оператором.

Сферический оператор типа потенциала постоянного порядка со слабыми особенностями на полюсах рассматривался в [32]. В этой работе, в частности, были получены результаты об изоморфизме в соответствующих пространствах.

Работа [21], как уже было отмечено выше, является фундаментальной для представленного здесь исследования. В ней был рассмотрен сферический риссов потенциал в пространствах обобщенной переменной гельдеровости и приведены условия ограниченного действия оператора в безвесовом и весовом случаях.

В заключение, отметим работы [8] и [9], в которых исследовалось действие операторов типа потенциала постоянного вещественного порядка в гельдеровских пространствах $H^{\lambda}(X)$ в случае постоянного λ, где X – квазиметрическое пространство.

2. Предварительные сведения

Пусть $n \geq 2$. Далее используются, в частности, следующие обозначения:
$\dot{\mathbb{R}}^n$ – пространство $\mathbb{R}^n$ с компактификацией Александрова [13],
$\mathbb{S}^n$ – сфера радиуса, равного единице, вложенная в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$,
$C(\Omega, w)$ – пространство непрерывных на Ω с весом w функций.

Пусть также $\Pi_\alpha = \{x \in \Omega : \mathfrak{Re}[\alpha(x)] = 0\}$, где $\mathfrak{Re}$ – действительная часть. Будем полагать далее, что мера множества Π_α равна нулю.

Определение 1. *Пусть r – метрика, введенная на Ω. Будем называть оператором типа потенциала переменного порядка $\alpha(\cdot)$ по множеству Ω с плотностью $f(x)$ и характеристикой $c(x, y)$ интегральный оператор следующего вида:*

$$\left(I_\Omega^{\alpha(\cdot)} cf\right)(x) = \int\limits_\Omega \frac{c(x,y)f(y)}{r^{n-\alpha(x)}(x,y)} dy, \tag{1}$$

где $\forall x \in \Omega$ $\alpha(x) \neq n, n+2, n+4, ...,$ *значение* n *зависит от* Ω.

Определение 2. *Пусть* r *– метрика на* Ω, *функция* $f(x)$ *определена и ограничена на множестве* Ω. *Под локальным модулем непрерывности функции* $f(x)$ *понимается функционал*

$$M_r(f,x,t) = \sup_{y\in\Omega: r(x,y)\le t} |f(x)-f(y)|,$$

определенный для всех $t \in T \subseteq \mathbb{R}_+$ *и* $x \in \Omega$.

В дальнейшем для метрики Евклида будем применять обозначение

$$|x-y| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Определение 3. *Пусть* $w(x)$ *– строго положительная функция, определенная всюду на* Ω. *Символом* $H^{\omega(\cdot)}(\Omega, w)$ *обозначим множество функций* $f \in C(\Omega, w)$, *удовлетворяющих с весом* $w(x)$ *обобщенному условию Гельдера с переменной характеристикой, имеющему вид:*

$$\forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+ \qquad M_r(wf,x,t) \le A\omega(x,t), \qquad A>0.$$

Функционал

$$\|f\|_{H^{\omega(\cdot)}(\Omega,w)} = \|f\|_{C(\Omega,w)} + \sup_{x\in\Omega, t>0} \frac{M_r(wf,x,t)}{\omega(x,t)} \tag{2}$$

определяет норму в пространстве $H^{\omega(\cdot)}(\Omega, w)$.

Функцию $\omega(x,t)$ называют характеристикой пространства $H^{\omega(\cdot)}$. Различают в зависимости от вида характеристики пространства обобщенной гельдеровости H^{φ}, где $\varphi = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и переменной гельдеровости $H^{\lambda(\cdot)}$, предполагающее $\omega(x,t) = t^{\lambda(x)}$, где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$.

Всюду далее там, где это не приводит к недоразумениям, будем опускать обозначение Ω, ссылаясь на соответствующий индекс у рассматриваемого оператора. Так, в формулировках теорем раздела 3.2 $\Omega = \mathbb{S}^n$, и $\Omega = \dot{\mathbb{R}}^n$ в теоремах раздела 3.3. В заключительном разделе на конфигурацию Ω указывает обозначение у символа операторного пространства.

Определение 4. *Пусть* $\Omega \subseteq \dot{\mathbb{R}}^n$ *и* $T = \Omega \times [0; l]$, *где* $l \in \mathbb{R}$. *Для функции* $\omega(x,t)$ *на* T *введем грани*

$$\omega_-(t) = \inf_{x\in\Omega} \omega(x,t),\ \omega_+(t) = \sup_{x\in\Omega} \omega(x,t).$$

Функция $\omega : T \to \mathbb{R}_+$ *принадлежит классу* $W = W(T)$, *если*

(1) $\omega(x,t)$ *непрерывна по* $t \in [0; l]$ *для каждого* $x \in \Omega$;
(2) $\omega_-(t) > 0$ *при* $t > 0$ *и* $\lim\limits_{t\to+0} \omega(x,t) = 0$ *для каждого* $x \in \Omega$;
(3) $\omega(x,t)$ *почти возрастает по* t *для каждого* $x \in \Omega$.

Определение 5. *Говорят, что функция* $\omega(x,t)$ *принадлежит обобщенному классу* $\Phi^{\delta(\cdot)}_{\beta(\cdot)} = \Phi^{\delta(\cdot)}_{\beta(\cdot)}(T)$ *Зигмунда – Бари – Стечкина, где* $0 \le \delta(x) < \beta(x)$, $x \in \Omega \subseteq \dot{\mathbb{R}}^n$, *если* $\omega(x,t) \in W$ *и выполнены условия*

(1) $\int\limits_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^{\delta(x)} \frac{\omega(x,t)}{t} dt \le c\omega(x,h)$;

(2) $\int\limits_h^l \left(\frac{h}{t}\right)^{\beta(x)} \frac{\omega(x,t)}{t} dt \leq c\omega(x,h),$

где $0 < h < \frac{l}{2}$ *и* $c > 0$ *не зависит от* $h \in (0; \frac{l}{2}]$ *и* $x \in \Omega \subseteq \dot{\mathbb{R}}^n$.

Через $\Phi^{\delta(\cdot)}$ обозначим функциональный класс, предполагающий выполнение лишь первого из двух условий, через $\Phi_{\beta(\cdot)}$ — класс только со вторым условием.

Определение 6. *Индексными числами Матушевской — Орлича функции* $\omega(x,t)$ *относительно переменной* $t \in [0;2]$ *называются функционалы*

$$m(\omega,x) = \sup_{t>1} \frac{\ln[\underline{\lim}_{h\to 0} \frac{\omega(th,x)}{\omega(x,h}]}{\ln(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln[\overline{\lim}_{h\to 0} \frac{\omega(th,x)}{\omega(x,h)}]}{\ln(t)},$$

$$M(\omega,x) = \inf_{t>1} \frac{\ln[\overline{\lim}_{h\to 0} \frac{\omega(th,x)}{\omega(x,h}]}{\ln(t)} = \lim_{t\to \infty} \frac{\ln[\overline{\lim}_{h\to 0} \frac{\omega(th,x)}{\omega(x,h)}]}{\ln(t)},$$

зависящие от параметра $x \in \Omega$, $m(\omega,x) \leq M(\omega,x)$.

3. Результаты работы

3.1. **Стереографическая проекция.** Напомним, что стереографической проекцией называется преобразование n-мерного евклидова пространства $\dot{\mathbb{R}}^n$ в единичную сферу $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ по правилу $\xi = v(x)$, где вектор-функция v преобразования координат определена следующими формулами [14]:

$$\xi_k = \frac{2x_k}{|x|^2+1}, \quad k = 1,2,...,n; \tag{3}$$

$$\xi_{n+1} = \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}, \tag{4}$$

где $\xi \in \mathbb{S}^n$, $x \in \dot{\mathbb{R}}^n$, $|x|^2 = \sum\limits_{k=1}^n x_k^2$.

Известны следующие формулы, связывающие метрики на $\mathbb{S}^n$ и $\dot{\mathbb{R}}^n$ и элементы объемов $d\sigma$ и dy при стереографическом проектировании [14]:

$$\rho(\xi,\sigma) := |\xi - \sigma| = \frac{2|x-y|}{\sqrt{|x|^2+1}\sqrt{|y|^2+1}} =: r_\Pi(x,y), \tag{5}$$

$$d\sigma = \frac{2^n dy}{\left(|y|^2+1\right)^n}, \tag{6}$$

где $x, y \in \dot{\mathbb{R}}^n$, $\xi = v(x)$, $\sigma = v(y)$ и $x, y \in \mathbb{S}^n$.

Пространство $\mathbb{R}^n$ понимается как плоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$: $\mathbb{R}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\right\}$. Поскольку отображения 3 и 4 задают биективное отображение точек плоскости $\dot{\mathbb{R}}^n$ на сферу $\mathbb{S}^n$, стереографическая проекция является изоморфным преобразованием.

При обратном переходе – со сферы $\mathbb{S}^n$ в пространство $\dot{\mathbb{R}}^n$ – имеют место следующие выражения:

$$|\xi - e_{n+1}| = \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}}, \quad |\xi + e_{n+1}| = \frac{2|x|}{\sqrt{1+|x|^2}}, \quad e_{n+1} = (0,0,...,0,1). \tag{7}$$

3.2. **Об ограниченности сферического потенциала.** В работе [21] приведены результаты исследования условий ограниченного действия оператора $I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^n} f$ из $H^{\omega(\cdot)}$ в весовое пространство $H^{\omega_\alpha(\cdot)}(\alpha)$, а также – в $H^{\omega_\alpha(\cdot)}$, где

$$\omega_\alpha(x,t) := t^{\mathfrak{Re}[\alpha(x)]}\omega(x,t). \tag{8}$$

В терминах весовых классов Зигмунда – Бари – Стечкина они имеют вид:

Теорема 1. *Пусть* $\max\limits_{x\in\mathbb{S}^n}\mathfrak{Re}[\alpha(x)] < 1$, $\omega \in \Phi_{1-\mathfrak{Re}\alpha(x)}$, *функция* ω_α *определена выражением 8.*

(1) *Оператор* $I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^n}$ *является ограниченным из* $H^{\omega(\cdot)}$ *в* $H^{\omega_\alpha(\cdot)}(\alpha)$, *если*

$$\mathfrak{Re}[\alpha(x)] \geq 0; \quad \alpha \in Lip\,(\mathbb{S}^n)\,; \quad \max_{x\in\mathbb{S}^n}|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{9}$$

(2) *Оператор* $I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^n}$ *является ограниченным из* $H^{\omega(\cdot)}$ *в* $H^{\omega_\alpha(\cdot)}$, *если*

$$\min_{x\in\mathbb{S}^n}\mathfrak{Re}[\alpha(x)] > 0; \quad M_r(\alpha,x,t) \leq Ct^{\mathfrak{Re}[\alpha(x)]}\omega(x,t). \tag{10}$$

В терминах индексных чисел данная теорема может быть переписана следующим образом:

Теорема 2. *Пусть* $\omega \in W\,(\mathbb{S}^n \times [0;2])$, *функция* ω_α *определена выражением 8 и* $m\,(\omega_\alpha) < 1$.

(1) *Оператор* $I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^n}$ *является ограниченным из* $H^{\omega(\cdot)}$ *в* $H^{\omega_\alpha(\cdot)}(\alpha)$, *если*

$$\max_{x\in\mathbb{S}^n}\mathfrak{Re}[\alpha(x)] < 1$$

и выполнены условия 9.

(2) *Оператор* $I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^n}$ *является ограниченным из* $H^{\omega(\cdot)}$ *в* $H^{\omega_\alpha(\cdot)}$, *если*

$$\min_{x\in\mathbb{S}^n}\mathfrak{Re}[\alpha(x)] > 0; \quad \max_{x\in\mathbb{S}^n}\mathfrak{Re}[\alpha(x)] < 1; \quad \alpha \in Lip\,(\mathbb{S}^n)\,.$$

3.3. **Об ограниченности пространственного потенциала.** В силу изоморфности стереографического проектирования, а также того факта, что функция r_Π также определяет расстояние в $\dot{\mathbb{R}}^n$, функциональные классы Гельдера и Зигмунда – Бари – Стечкина, определенные на $\mathbb{S}^n$, переходят в себя же на $\dot{\mathbb{R}}^n$ с метрикой r_Π.

Таким образом, на основании теорем 1 и 2 могут быть получены теоремы об ограниченном действии пространственного оператора типа потенциала, а именно:

Теорема 3. *Пусть* $\max\limits_{x\in\dot{\mathbb{R}}^n}\mathfrak{Re}[\alpha(x)] < 1$, $\omega \in \Phi_{1-\mathfrak{Re}[\alpha(x)]}$, *функция* ω_α *определена выражением 8, характеристика* c_0 *оператора* $I^{\alpha(\cdot)}_{\dot{\mathbb{R}}^n}c_0$ *имеет вид:*

$$c_0(x,y) = \left(1+|y|^2\right)^{-\frac{n+\alpha(x)}{2}}, \tag{11}$$

а весовая функция w_0 *определена выражением*

$$w_0(x) = 2^{\alpha(x)}\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n-\alpha(x)}{2}}. \tag{12}$$

(1) *Оператор* $I^{\alpha(\cdot)}_{\dot{\mathbb{R}}^n}c_0$ *является ограниченным из* $H^{\omega(\cdot)}$ *в* $H^{\omega_\alpha(\cdot)}(w_0\alpha)$, *если*

$$\mathfrak{Re}[\alpha(x)] \geq 0; \quad \alpha \in Lip\left(\dot{\mathbb{R}}^n\right); \quad \max_{x\in\dot{\mathbb{R}}^n}|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{13}$$

(2) *Оператор* $I^{\alpha(\cdot)}_{\dot{\mathbb{R}}^n} c_0$ *является ограниченным из* $H^{\omega(\cdot)}$ *в* $H^{\omega_\alpha(\cdot)}(w_0)$, *если*

$$\min_{x\in\dot{\mathbb{R}}^n} \mathfrak{Re}[\alpha(x)] > 0; \quad M_{r_\Pi}(\alpha, x, t) \le Ct^{\mathfrak{Re}[\alpha(x)]}\omega(x,t),$$

где выраженная формулой 5 функция r_Π *является метрикой на* $\dot{\mathbb{R}}^n$.

Доказательство. Согласно формулам 5 и 6, справедливо следующее равнство:

$$\left(I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^n}\tilde{f}\right)(\xi) := \int\limits_{\mathbb{S}^n} \frac{\tilde{f}(\sigma)}{|\xi-\sigma|^{n-\tilde{\alpha}(\xi)}}d\sigma =$$

$$= 2^{\alpha(x)}\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n-\alpha(x)}{2}} \int\limits_{\dot{\mathbb{R}}^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha(x)}\left(1+|y|^2\right)^{\frac{n+\alpha(x)}{2}}} =: w_0(x)\left(I^{\alpha(\cdot)}_{\dot{\mathbb{R}}^n} c_0 f\right)(x),$$

где $\xi = v(x)$, $\sigma = v(y)$, $f(y) = (\tilde{f}\circ v)(y)$, $\alpha(x) = (\tilde{\alpha}\circ v)(x)$.

В силу данного равенства и сделанного выше замечания об отображении функциональных классов при стереографическом проектировании, теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть* $\omega \in W\left(\dot{\mathbb{R}}^n \times [0;2]\right)$, *функция* ω_α *определена выражением 8 и* $m(\omega_\alpha) < 1$, *функции* c_0 *и* w_0 *определены формулами 11 и 12, на* $\dot{\mathbb{R}}^n$ *введена метрика* r_Π, *определенная формулой 5.*

(1) *Оператор* $I^{\alpha(\cdot)}_{\dot{\mathbb{R}}^n} c_0$ *является ограниченным из* $H^{\omega(\cdot)}$ *в* $H^{\omega_\alpha(\cdot)}(w_0\alpha)$, *если*

$$\max_{x\in\dot{\mathbb{R}}^n} \mathfrak{Re}[\alpha(x)] < 1$$

и выполнены условия 13.

(2) *Оператор* $I^{\alpha(\cdot)}_{\dot{\mathbb{R}}^n} c_0$ *является ограниченным из* $H^{\omega(\cdot)}$ *в* $H^{\omega_\alpha(\cdot)}(w_0)$, *если*

$$\min_{x\in\dot{\mathbb{R}}^n} \mathfrak{Re}[\alpha(x)] > 0; \quad \max_{x\in\dot{\mathbb{R}}^n} \mathfrak{Re}[\alpha(x)] < 1; \quad \alpha \in Lip\left(\dot{\mathbb{R}}^n\right).$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 3. □

3.4. **Леммы о стереографическом проектировании.** Результирующие теоремы настоящей работы полезно рассмотреть с алгебраической точки зрения. Именно, введем следующее

Определение 7. *Пусть* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$ *– нормированные векторные пространства. Обозначим символом* $\mathfrak{I}_\Omega = \mathfrak{I}_\Omega(c, \mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ *множество операторов типа потенциала 1, ограниченно действующих из* $\mathfrak{U}$ *в* $\mathfrak{V}$.

Множество $\mathfrak{I}_\Omega$ является, очевидно, подпространством пространства всех линейных операторов, ограниченно действущих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$. Функционал

$$\|I^{\alpha(\cdot)}_\Omega c\|_{\mathfrak{I}_\Omega} = \sup_{f\in\mathfrak{U}, f\ne 0} \frac{\|I^{\alpha(\cdot)}_\Omega cf\|_{\mathfrak{V}}}{\|f\|_{\mathfrak{U}}}$$

определяет норму в $\mathfrak{I}_\Omega$.

Рассматривая преобразования в соответствии с формулами 3 и 4 как оператор стереографического проектирования Q и опуская в данном разделе обозначение вида $\tilde{\cdot}$ (предполагая операторную запись вида $(Qf)(x) = f(\xi)$), сформулируем следующую лемму:

Лемма 1. *Оператор Q осуществляет изометрический изоморфизм вида*

$$\mathfrak{I}_{\mathbb{S}^n}\left(1, H^{\omega_1(\cdot)}(w_1), H^{\omega_2(\cdot)}(w_2)\right) \longleftrightarrow \mathfrak{I}_{\dot{\mathbb{R}}^n}\left(c_0, H^{\omega_1(\cdot)}(w_1), H^{\omega_2(\cdot)}(w_0 w_2)\right),$$

где c_0 и w_0 выражены, соответственно, формулами 11 и 12.

Доказательство. Доказательство леммы повторяет рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 3, и требует лишь дополнительного указания на факт сохранения sup-нормы в пространстве $C(\Omega, w_2)$ при стереографическом проектировании, следующий из биективности отображения, осуществляемого системой преобразований 3, 4. □

Лемма 2. *Оператор Q осуществляет изометрический изоморфизм вида*

$$\mathfrak{I}_{\mathbb{S}^n}\left(c_1, H^{\omega_1(\cdot)}(w_1), H^{\omega_2(\cdot)}(w_2 w_3)\right) \longleftrightarrow \mathfrak{I}_{\dot{\mathbb{R}}^n}\left(1, H^{\omega_1(\cdot)}(w_1), H^{\omega_2(\cdot)}(w_2)\right),$$

где

$$c_1(\xi, \eta) := \frac{1}{|\sigma - e_{n+1}|^{n+\alpha(\xi)}}, \tag{14}$$

$$w_3(\xi) := 2^{\alpha(\xi)} |\xi - e_{n+1}|^{n-\alpha(\xi)}. \tag{15}$$

Доказательство. Согласно 6 и 7, справедливо представление

$$\left(Q I^{\alpha(\cdot)}_{\dot{\mathbb{R}}^n} f\right)(x) := Q\left[\int\limits_{\dot{\mathbb{R}}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} dy\right] =$$

$$= 2^{\alpha(\xi)} |\xi - e_{n+1}|^{n-\alpha(\xi)} \int\limits_{\mathbb{S}^n} \frac{f(\sigma) d\sigma}{|\sigma - e_{n+1}|^{\alpha(\xi)+n} |\xi - e_{n+1}|^{n-\alpha(\xi)}} =: w_3(\xi)\left(I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^n} c_1 f\right)(\xi),$$

где $\xi = v(x)$, $\sigma = v(y)$, а функции c_1 и w_3 выражены, соответственно, формулами 14 и 15.

В силу данного представления, а также рассуждений, аналогичных приведенным в доказательстве леммы 1, настоящая лемма доказана. □

Поскольку единичная сфера $\mathbb{S}^n$ является, в некотором смысле, более удобным для получения результатов множеством, ценность лемм 1 и 2 состоит в том, что они, устанавливая связь между пространствами ограниченных в обобщенных гельдеровских классах операторов типа потенциала, действующих на сфере и по евклидову пространству, переводят изучение в плоскость результатов для первых, в то время, как результаты для пространственного случая получаются из них автоматически. Так, описание пространства $\mathfrak{I}_{\mathbb{S}^n}\left(1, H^{\omega(\cdot)}, H^{\omega_\alpha(\cdot)}(w)\right)$, где $\omega_\alpha(\xi) = t^{\Re\alpha(\xi)}$, а в роли $w(\xi)$ выступают 1 и $\alpha(\xi)$, было представлено в работе [21], и на основании данной спецификации посредством леммы 1 в настоящей работе получено описание класса $\mathfrak{I}_{\dot{\mathbb{R}}^n}\left(c_0, H^{\omega(\cdot)}, H^{\omega_\alpha(\cdot)}(w_0 w)\right)$.

References

[1] R. Almeida, A. B. Malinowska, D. F. M. Torres, *A fractional calculus of variations for multiple integrals with application to vibrating string*, J. Math. Phys., **51**:3 (2010), 033503. MR2647882

[2] N. R. O. Bastos, R. A. C. Ferreira, D. F. M. Torres, *Discrete-time fractional variational problems*, Signal Process, **91** (2010), 513–524.

[3] C. F. M. Coimbra, *Mechanics with variable-order differential operators*, Ann. Phys., **12**:11–12 (2003), 692–703. MR2020716

[4] A. S. Dzhafarov, *Nailuchshee priblizhenie konechnymi sfericheskimi summami i nekotorye differencial'nye svojstva garmonicheskih v share funkcij*, Teoremy vlozhenija i ih prilozhenija, M., 1966, 75–81.

[5] A. S. Dzhafarov, *Konstruktivnoe opisanie obobshhennyh klassov Besova na mnogomernoj sfere*, DAN SSSR, **285**: 3 (1985), 542–546. MR0821336

[6] A. I. Ginsburg, N. K. Karapetyants, *Drobnoe integrodifferencirovanie v gel'derovskih klassah peremennogo porjadka*, Doklady RAN, **339**:4 (1994), 439–441.

[7] A. D. Gadzhiev, H. P. Rustamov, *Jekvivalentnaja normirovka v prostranstvah Besova na sfere i svojstva simvola mnogomernogo singuljarnogo integrala*, Izv. vuzov, Matemat., **9** (1984), 69–71. MR0769569

[8] J. Garcia-Cuerva, A. E. Gatto, *Boundedness properties of fractional integral operators associated to non-doubling measures*, Studia Math., **162**:3 (2004), 245–261. MR2047654

[9] A. E. Gatto, C. Segovia, S. Vagi, *On fractional differentiation on spaces of gomogeneous type*, Revista Mat. Iberoamer., **12**:1 (1996), 1–35. MR1387588

[10] N. K. Karapetyants, A. I. Ginsburg, *Fractional integrodifferentiation in Holder classes of arbitrary order*, Georg. Math. Journal, **2**:2 (1995), 141–150.

[11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier, Amsterdam, 2006. MR2218073

[12] M. Klimek, *Fractional sequential mechanics—models with symmetric fractional derivative*, Czechoslovak J. Phys., **51**:12 (2001), 1348–1354. MR1917624

[13] A. G. Kurosh, A. I. Markushevich, P. K. Rashevskij (Eds.) *Matematika v SSSR za 30 let (1917-1947)*, M.-L. (1948), 183–228.

[14] S. G. Mihlin, *Mnogomernye singuljarnye integraly i integral'nye uravnenija*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoj literatury, Moscow, 1962. MR0155165

[15] S. M. Nikolsky, Lizorkin P. I., *Priblizhenie spericheskimi polinomami*, Tr. MIAN SSSR, Moscow, **166** (1984), 186–200. MR0752177

[16] T. Odzijewicz, A. B. Malinowska, D. F. M. Torres, *Fractional variational calculus of variable order*, Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory: The Stefan Samko Anniversary Volume, Springer Basel, Basel, 2013, 291–301. MR3060420

[17] I. V. Petrova, *Teorema Dzheksona i prostranstva Besova na sfere*, DAN SSSR, **276**:3 (1984), 544–549. MR0764993

[18] B. Ross, S. G. Samko, *Fractional integration operator of a variable order in the Hölder spaces* $H^{\lambda(x)}$, Internat. J. Math. Math. Sci., **18**:4 (1995), 777–788. MR1347069

[19] H. P. Rustamov, *O tochnosti gladkostnyh svojstv simvola mnogomernogo singuljarnogo operatora s nepreryvnoj harakteristikoj*, Deponirovanie v VINITI, Baku, 1981, №5014-81 DEP.

[20] N. Samko, B. Vakulov, *On generalized spherical fractional integration operators in weighted generalized Hölder spaces on the unit sphere*, Operator Theory: Advances and Applications, **181** (2008), 429–437. MR2681901

[21] N. Samko, B. Vakulov, *Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristic*, Math. Nachr., **284**:2–3 (2011), 355–369. MR2790894

[22] S. G. Samko, *Obobshhennye rissovy potencialy i gipersinguljarnye integraly s odnorodnymi harakteristikami, ih simvoly i obrashhenie*, Trudy MIAN SSSR, **156** (1980), 157–222. MR0622233

[23] S. G. Samko, B. Ross, *Integration and differentiation to a variable fractional order*, Integral Transform. Spec. Funct, **1**:4 (1993), 277–300. MR1421643

[24] S. G. Samko, *Fractional integration and differentiation of variable order*, Anal. Math., **21**:3 (1995), 213–236. MR1349652

[25] S. G. Samko, *Differentiation and integration of variable order and the spaces* $L^{p(x)}$, Contemporary Mathematics, **212** (1998), 203–219. MR1486602

[26] S. G. Samko, B. G. Vakulov, *On equivalent norms in fractional order function spaces of continuous functions on the unit sphere*, Fract. Calc. Appl. Anal., **3**:4 (2000), 401–433. MR1806312

[27] L. D. Shankishvili *Operatory tipa sfericheskogo potenciala kompleksnogo porjadka v obobshhjonnyh prostranstvah Gjol'dera*, Deponirovanie v VINITI 23.03.98, №860-B98.

[28] B. G. Vakulov, *Operator tipa potenciala na sfere v obobshhennyh klassah Gjol'dera*, Izv.vuzov. Matem., **11** (1986), 66–69. MR0883682

[29] B. G. Vakulov, S. G. Samko, *Ob jekvivalentnyh normirovkah v prostranstvah funkcij drobnoj gladkosti na sfere tipa $C^{\lambda}(\mathbb{S}_{n-1})$, $H^{\lambda}(\mathbb{S}_{n-1})$*, Izv. vuzov. Matem., **12** (1987), 68–71. MR0930382

[30] B. G. Vakulov, *O dejstvii operatora rissova potenciala kompleksnogo porjadka po $\mathbb{R}^n$ v vesovyh prostranstvah Gjol'dera*, Izvestija vuzov. Severo-Kavkazskij region. Estestvennye nauki, **4** (2001), 47–49. Zbl 1053.47016

[31] B. G. Vakulov, N. K. Karapetjanc, L. D. Shankishvili, *Operatory sfericheskoj svertki so stepenno-logarifmicheskim jadrom v obobshhennyh prostranstvah Gjol'dera*, Izv. vuzov. Matem., **2** (2003), 3–14. MR1981429

[32] B. G. Vakulov, N. K. Karapetjanc, *Operatory tipa potenciala na sfere s osobennostjami na poljusah*, Doklady Akademii nauk, **392**:2 (2003), 151–154. MR2089652

[33] B. G. Vakulov, *Sfericheskie operatory tipa potenciala v vesovyh prostranstvah Gjol'dera peremennogo porjadka*, Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal,**7**:2 (2005), 26–40. MR2190994

[34] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, *Operatory drobnogo integrirovanija i differencirovanija peremennogo porjadka v prostranstvah Gjol'dera $H^{\omega(x,t)}$*, Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal, **12**:4 (2010), 3–11. MR2779795

[35] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, *Ocenki tipa Zigmunda dlja operatorov drobnogo integrirovanija i differencirovanija peremennogo porjadka*, Izv. vuzov. Sev. Kavk. region. Estestv. nauki. Specvypusk, (2011), 15–17.

[36] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, N. G. Samko *Ocenki tipa Zigmunda dlja operatorov drobnogo integrirovanija i differencirovanija peremennogo porjadka*, Izv. vuzov. Matematika, **6** (2011), 25–34.

[37] M. Werens, *Best Approximation on the Unit Spere in $\mathbb{R}^k$*, Func. Anal. and Approxim. Proc. Conf. Oberwolfach., Aug. 9–16, 1980. Basel c. a., 1981, 233–245.

Boris Grigorievich Vakulov
Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences,
Milchakova str., 8a,
344090, Rostov-on-Don, Russia
E-mail address: bvak1961@bk.ru

Yuri Evgenievich Drobotov
Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences,
ul. Milchakova, 8a,
344090, Rostov-on-Don, Russia
Azov Sea Research Fisheries Institute,
ul. Beregovaya, 21v,
344002, Rostov-on-Don, Russia
SPE Vibrobit LLC,
ul. Kapustina, 8a,
344092, Rostov-on-Don, Russia
E-mail address: yu.e.drobotov@yandex.ru