S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 657–672 (2017) УДК 514.74,517.977
DOI 10.17377/semi.2017.14.057 MSC 53D05,39B22

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЛОЖЕНИЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В.А. КЫРОВ, Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

Abstract. As you know, the n-dimensional geometry of maximum mobility allows the group of motions of dimension $n(n+1)/2$. Many of these geometries are well known such as euclidean and pseudoeuclidean geometries. These are phenomenologically symmetric geometries, i.e. for them the metric properties are equivalent to group ones. In this work we applied the analytical method of embedding, which helps to find metric functions of all three-dimensional geometries of maximum mobility, which contain as an argument metric functions of two-dimensional symplectic geometry.

Keywords: symplectic geometry, functional equation, differential equation, metric function

1. Введение

Как известно, n-мерная геометрия максимальной подвижности допускает группу движений размерности $n(n+1)/2$ [1]. Многие из таких геометрий хорошо известны, к их числу относятся: евклидова геометрия, псевдоевклидова, симплектическая геометрия, сферическая, геометрия Лобачевского, пространство де Ситтера и др. Полная же классификация таких геометрий неизвестна [2].

В работах второго соавтора [2, 4] дается полная классификация двумерных феноменологически симметричных геометрий, которые являются геометриями максимальной подвижности, т. е. фактически построена полная классификация двумерных геометрий максимальной подвижности. Эта классификация, кроме хорошо известных двумерных геометрий (евклидова, псевдоевклидова,

Kyrov, V.A., Mikhailichenko, G.G., The analytic method of embedding symplectic geometry.

Поступила 19 декабря 2016 г., опубликована 20 июля 2017 г.

симплектическая, сферическая, двумерное пространство де Ситтера и др.), содержит и неизвестные геометрии (симплициальная, гельмгольцева, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева). Заметим, что группы движений всех этих геометрий трехпараметрические. Методы, разработанные Михайличенко для классификации таких геометрий, ввиду больших технических трудностей, неприменимы при построении классификации геометрий большей размерности.

В. Х. Лев другим методом построил классификацию трехмерных феноменологически симметричных геометрий (геометрий максимальной подвижности) [5], которая также содержит как известные, так и неизвестные геометрии. Правда полной уверенности в полноте этой классификации нет. Группы движений таких геометрий шестипараметрические. Методом Лева классификацию четырехмерных геометрий и геометрий более высокой размерности, ввиду больших технических сложностей, построить не удалось.

В данной работе предлагается новый метод классификации феноменологически симметричных геометрий (геометрий максимальной подвижности), который позволит построить классификацию феноменологически симметричных геометрий более высоких размерностей. Он назван методом вложения и его суть состоит в нахождении метрических функций всех феноменологически симметричных геометрий по известным метрическим функциям феноменологически симметричных геометрий размерности на единицу меньше, содержащих их внутри себя как аргумент. С помощью этого метода здесь перепроверяется часть классификации Лева. Так, в приводимых здесь исследованиях, по метрической функции симплектической плоскости

$$x_i y_j - x_j y_i$$

ищутся все метрические функции трехмерных геометрий вида:

$$\varphi(x_i y_j - x_j y_i, z_i, z_j),$$

допускающие шестипараметрическую группу движений. Эта задача здесь имеет единственное решение

$$x_i y_j - x_j y_i + z_i + z_j.$$

Геометрия с полученной метрической функцией иногда называется трехмерной симплектической [6]. Вообще, под четномерной симплектической геометрией, понимается геометрия, задаваемая функцией

$$x_i^1 x_j^2 - x_j^1 x_i^2 + \cdots + x_i^{n-1} x_j^2 - x_j^{n-1} x_i^n,$$

а под нечетномерной симплектической геометрией — геометрия с функцией

$$x_i^1 x_j^2 - x_j^1 x_i^2 + \cdots + x_i^{n-1} x_j^2 - x_j^{n-1} x_i^n + x_i^{n+1} - x_j^{n+1}.$$

В этой статье задача о вложении решается аналитически, т. е. сводится к решению соответствующих функциональных и дифференциальных уравнений в виде рядов Тейлора. Подобная задача в классе дифференцируемых как минимум два раза, но неаналитических функций исследуется в работах первого соавтора [7, 8, 9].

2. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим аналитическое трехмерное многообразие M. Локальные координаты в M обозначим через (x, y, z). Пусть задана функция $f : M \times M \to R$, называемая *метрической*, с открытой и плотной в $M \times M$ областью определения S_f. Выполнение метрических аксиом не предполагается.

Аксиома аналитичности. Метрическая функция $f : M \times M \to R$ аналитическая во всех точках области определения S_f.

Рассмотрим множество четверок $\langle i_1, i_2, i_3, i\rangle$, $\langle i, i_1, i_2, i_3\rangle \in M^4$ таких, что $\langle i, i_1\rangle, \langle i, i_2\rangle, \langle i, i_3\rangle \in S_f$, $\langle i_1, i\rangle, \langle i_2, i\rangle, \langle i_3, i\rangle \in S_f$. Пусть выполняется следующая аксиома:

Аксиома невырожденности. Для открытого и плотного в M^4 множества четверок $\langle i_1, i_2, i_3, i\rangle$ и $\langle i, i_1, i_2, i_3\rangle$ справедливы неравенства

$$\frac{\partial(f(i, i_1), f(i, i_2), f(i, i_3))}{\partial(x_i, y_i, z_i)} \neq 0,\ \frac{\partial(f(i_1, i), f(i_2, i), f(i_3, i))}{\partial(x_i, y_i, z_i)} \neq 0,$$

где (x_i, y_i, z_i) — координаты точки $i \in M$.

Рассмотрим множество пятерок $\langle i_1, \dots, i_5\rangle \in M^5$: $\langle i_p, i_q\rangle \in S_f$, $p, q = 1, \dots, 5$, $p \neq q$.

Аксиома феноменологической симметрии. Для некоторой окрестности пятерки точек $\langle i_1, \dots, i_5\rangle$ из плотного в M^5 множества выполняется тождество:

$$\varPhi(f(i_1, i_2), \dots, f(i_4, i_5)) = 0,$$

где $\varPhi$ — аналитическая функция, причем $\mathrm{rang}\Phi = 1$.

Определение 1. *Говорят, что на аналитическом многообразии M метрическая функция f задает феноменологически симметричную геометрию, если выполняются аксиомы* ***аналитичности****,* ***невырожденности*** *и* ***феноменологической симметрии*** [2].

Ниже все вычисления будем проводить в координатной окрестности $U \subset M$, хотя это не всегда будет оговариваться. Для любых точек $i, j \in U$, $\langle i, j\rangle \in S_f$, существуют окрестности $U(i) \subset U$, $U(j) \subset U$ такие, что метрическая функция f определена и аналитична в $U(i) \times U(j)$. Заметим, что эти окрестности могут пересекаться.

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U \subset M$. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие)

$$\lambda : U \times G \to U',$$

где $U' \subset M$ — открытая область, причем выполняются свойства:

1). $\lambda(i, e) = i$, $e \in G$ — единица, $i \in U$;

2). $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, для любых $a, b \in G$ и $i \in U$;

3). $\lambda(i, a) = i$, если $a = e$.

Действие λ_a, определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $i, j \in U$ таких, что $\langle i, j\rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j)\rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(i), \lambda_a(j)) = f(i, j).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают [2].

Множество определенных таким образом движений образует аналитическую группу Ли движений. Доказано, что размерность группы движений трехмерной феноменологически симметричной геометрии равна 6 [2]. Двухточечным инвариантом такой группы является метрическая функция. Также доказано, что по метрической функции можно найти уравнения группы движений.

Алгебра Ли группы движений состоит из операторов вида [3]:

$$X = X_1\partial_x + X_2\partial_y + X_3\partial_z, \tag{1}$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x, y, z)$ — аналитическая функция в U, $\alpha = 1, 2, 3$. Через операторы (1) записывается условие локальной инвариантности метрической функции:

$$X(i)f(i, j) + X(j)f(i, j) = 0, \tag{2}$$

которое выполняется в окрестностях $U(i) \subset U$ и $U(j) \subset U$ точек i и j.

Рассмотрим метрическую функцию симплектической плоскости:

$$\theta = x_i y_j - x_j y_i, \tag{3}$$

где (x_i, y_i) и (x_j, y_j) — локальные координаты точек i и j.

Как известно, алгебра Ли группы движений двумерной симплектической геометрии трехмерна, поэтому ее базис состоит из трех линейно независимых операторов [2]:

$$X^1 = y\partial_x,\ X^2 = x\partial_y,\ X^3 = x\partial_x - y\partial_y. \tag{4}$$

Произвольный же оператор является их линейной комбинацией с постоянными коэффициентами.

Цель данной работы — нахождение всех трехмерных феноменологически симметричных геометрий с метрическими функциями, в подходящих координатах принимающих следующий вид:

$$f(i, j) = f(\theta, z_i, z_j) = f(x_i y_j - x_j y_i, z_i, z_j). \tag{5}$$

Поскольку метрическая функция (5) невырождена (аксиома невырожденности), ее координаты не "выпадают", т. е. в $U(i)\times U(j)$ справедливы неравенства:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} \neq 0,\ \frac{\partial f}{\partial z_i} \neq 0,\ \frac{\partial f}{\partial z_j} \neq 0. \tag{6}$$

Пусть $k \in U \subset M$ — начало некоторой системы координат в U, в которой эта точки имеет нулевые координаты $(0, 0, 0)$. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора [10] для компонент оператора (1) и метрической функции:

$$\left\{\begin{aligned} X_1 =& X_1(z) + D_1(X_1)(z)x + D_2(X_1)(z)y + \\ &+ \frac{1}{2}D_{1,1}(X_1)(z)x^2 + D_{1,2}(X_1)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_1)(z)y^2 + \cdots, \\ X_2 =& X_2(z) + D_1(X_2)(z)x + D_2(X_2)(z)y + \\ &+ \frac{1}{2}D_{1,1}(X_2)(z)x^2 + D_{1,2}(X_2)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_2)(z)y^2 + \cdots, \\ X_3 =& X_3(z) + D_1(X_3)(z)x + D_2(X_3)(z)y + \\ &+ \frac{1}{2}D_{1,1}(X_3)(z)x^2 + D_{1,2}(X_3)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_3)(z)y^2 + \cdots, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$f(\theta, z_i, z_j) = f(z_i, z_j) + D_1(f)(z_i, z_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f)(z_i, z_j)\theta^2 + \cdots, \tag{8}$$

где, например, $X_1(z) = X_1(0,0,z)$, $D_1(X_1)(z) = \dfrac{\partial X_1(x,y,z)}{\partial x}|_{x=y=0}$, $D_2(X_1)(z) = \dfrac{\partial X_1(x,y,z)}{\partial y}|_{x=y=0}$, $D_{1,2}(X_2)(z) = \dfrac{\partial^2 X_2(x,y,z)}{\partial x \partial y}|_{x=y=0}$, $f(z_i,z_j) = f(0,z_i,z_j)$, $D_1(f)(z_i,z_j) = \dfrac{\partial f(\theta,z_i,z_j)}{\partial \theta}|_{\theta=0}$.

Теорема 1. *Рассмотрим произвольную точку $k \in M$ и ее координатную окрестность U. Возьмем также две точки $i,j \in U$ с окрестностями $U(i)$ и $U(j)$ такие, что $U(i) \cup U(j) \subset U$, причем $\langle i,j\rangle, \langle i',j'\rangle \in S_f$, $\forall i' \in U(i)$, $\forall j' \in U(j)$. Тогда метрическая функция $f(i,j)$ в аналитическом многообразии M задающая трехмерную феноменологически симметричную геометрию в окрестности $U(i) \times U(j)$ в подходящих локальных координатах и масштабном преобразовании (аналитическая функция от метрической функции $\varphi(f) \to f$), имеет вид:*

$$f(i,j) = x_i y_j - y_i x_j + z_i - z_j. \tag{9}$$

Заметим, что выражение (9) дает метрическую функцию трехмерной симплектической геометрий.

В процессе доказательства теоремы ищутся как метрические функции трехмерных феноменологически симметричных геометрий в виде (5), так и базисные операторы алгебр Ли групп движений этих геометрий. Заметим, что эти алгебры шестимерны, поэтому их базисы состоят из шести независимых операторов, три из которых совпадают с операторами (4):

$$X^1 = y\partial_x,\ X^2 = x\partial_y,\ X^3 = x\partial_x - y\partial_y,\ X^{4,5,6} = X_1^{4,5,6}\partial_x + X_2^{4,5,6}\partial_y + X_3^{4,5,6}\partial_z.$$

Произвольный же оператор алгебр Ли этих геометрий имеет вид (1) и является линейной комбинацией шести базисных операторов.

3. Доказательство теоремы

Искомая метрическая функция (5) является двухточечным инвариантом шестимерной группы движений, поэтому условие локальной инвариантности (2) в явном виде записывается так:

$$\left\{ \begin{aligned} &[y_j X_1(i) - y_i X_1(j) - x_j X_2(i) + x_i X_2(j)]\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} \\ &+ X_3(i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j} = 0, \end{aligned} \right. \tag{10}$$

где X_1, X_2, X_3 – компоненты произвольного оператора (1). Заметим, что выражение (10) выполняется тождественно по координатам точек i и j из окрестностей $U(i)$ и $U(j)$, причем $U(i) \cup U(j) \subset U$, где U — координатная окрестность.

Лемма 1. *В тождестве* (10)

$$y_j X_1(i) - y_i X_1(j) - x_j X_2(i) + x_i X_2(j) \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное, пусть выполняется равенство

$$y_j X_1(i) - y_i X_1(j) - x_j X_2(i) + x_i X_2(j) = 0.$$

Продифференцируем его дважды по: x_i и x_j, y_i и y_j, x_i и y_j, z_i и x_j, z_i и y_j

$$X'_{2x}(j) - X'_{2x}(i) = 0,\ X'_{1y}(j) - X'_{1y}(i) = 0,$$

$$X'_{2y}(j) + X'_{1x}(i) = 0,\ X'_{2z}(i) = 0,\ X'_{1z}(i) = 0.$$

Затем разделяем переменные:

$$X'_{1x} = c = \text{const},\ X'_{2y} = -c,\ X'_{2x} = a = \text{const},\ X'_{1y} = b = \text{const},\ X'_{1z} = 0,\ X'_{2z} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения и подставляя результат в исходное уравнение, получаем первые две компоненты произвольного оператора (1) алгебры Ли группы движений:

$$X_1 = cx + by,\ X_2 = ax - cy.$$

В тождестве (10), с учетом сделанного выше предположения, возможны два случая: либо $X_3 = 0$, либо $X_3 \neq 0$.

Если $X_3 = 0$, то произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерной феноменологически симметричной геометрии с метрической функцией (5) имеет вид:

$$X = (cx + by)\partial_x + (ax - cy)\partial_y.$$

Придавая произвольным постоянным (a, b, c) значения $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, получаем три базисных оператора (4), а должно быть шесть. Противоречие.

Пусть теперь $X_3 \neq 0$. Тогда

$$X_3(i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j} = 0,\ X_3 \neq 0. \tag{11}$$

От выражения (11) переходим к тождеству

$$\frac{X_3(i)}{X_3(j)} = \varphi(\theta, z_i, z_j), \tag{12}$$

для чего левую и правую части делим на ненулевое произведение $X_3(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_i}$ и вводим обозначение $\varphi(\theta, z_i, z_j) = -\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j} / \frac{\partial f(i,j)}{\partial z_i}$. Дифференцируем (12) по x_i и по x_j:

$$\frac{X'_{3x}(i)}{X_3(j)} = y_j\varphi'_\theta,\ -\frac{X_3(i)X'_{3x}(j)}{X_3^2(j)} = -y_i\varphi'_\theta,$$

затем первое выражение умножаем на y_i, а второе на y_j и складываем результаты, а потом разделяем переменные:

$$\frac{y_iX'_{3x}(i)}{X_3(i)} = \frac{y_jX'_{3x}(j)}{X_3(j)} = \alpha = \text{const}.$$

Уравнение (12) теперь дифференцируем по y_i и y_j, затем результаты умножаем на x_i и x_j соответственно и складываем, а потом разделяем переменные:

$$\frac{x_iX'_{3y}(i)}{X_3(i)} = \frac{x_jX'_{3y}(j)}{X_3(j)} = \beta = \text{const}.$$

Дифференцируем (12) по x_i и по y_j:

$$\frac{X'_{3x}(i)}{X_3(j)} = y_j\varphi'_\theta,\ -\frac{X_3(i)X'_{3y}(j)}{X_3^2(j)} = x_i\varphi'_\theta,$$

затем первое выражение умножаем на x_i, а второе на y_j и вычитаем результаты, потом разделяем переменные:

$$\frac{x_iX'_{3x}(i)}{X_3(i)} = -\frac{y_jX'_{3y}(j)}{X_3(j)} = \gamma = \text{const}.$$

Таким образом, получаем

$$yX'_{3x} = \alpha X_3,\ xX'_{3y} = \beta X_3,\ xX'_{3x} = \gamma X_3,\ yX'_{3y} = -\gamma X_3.$$

Сравнивая полученные уравнения, имеем $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Тогда

$$X_3 = c(z) \neq 0.$$

Подставляя найденное в (11), имеем

$$a(z_i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_i} + a(z_j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j} = 0.$$

Вводим замену: $\int \frac{dz}{a(z)} = \overline{z}$. Тогда в новых координатах $X_3 = 1$.

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерной феноменологически симметричной геометрии с метрической функцией (5) имеет вид:

$$X = (cx + by)\partial_x + (ax - cy)\partial_y + \partial_{\overline{z}}.$$

Придавая произвольным постоянным (a, b, c) значения $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$, получаем базисные операторы

$$y\partial_x + \partial_{\overline{z}},\ x\partial_y + \partial_{\overline{z}},\ x\partial_x - y\partial_y + \partial_{\overline{z}},\ \partial_{\overline{z}}.$$

Видно, что таких операторов четыре, а должно быть шесть. Противоречие. □

Лемма 2. *В тождестве* (10)

$$X_3 \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное, пусть в (10) $X_3 = 0$. Тогда из леммы 1 следует $\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} = 0$, что противоречит условию невырожденности (6) метрической функции (5). □

Лемма 3. *В тождестве* (10) *функция* $X_3(x, y, z)$ *явно зависит либо от* x, *либо от* y, *то есть*

$$\left(\frac{\partial X_3(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_3(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное, пусть

$$X_3 = X_3(z) \neq 0.$$

Тогда тождество (10) можно представить в виде:

$$y_j X_1(i) - y_i X_1(j) - x_j X_2(i) + x_i X_2(j) = F(\theta, z_i, z_j), \tag{13}$$

где введено обозначение

$$F(\theta, z_i, z_j) = -\left(X_3(z_i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + X_3(z_j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j}\right)\Big/\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}.$$

Продифференцируем равенство (13) по переменным x_i, x_j, y_i, y_j:

$$y_j X'_{1x_i} - x_j X'_{2x_i} + X_2(j) = y_j F'_\theta,$$
$$-y_i X'_{1x_j} - X_2(i) + x_i X'_{2x_j} = -y_i F'_\theta,$$
$$y_j X'_{1y_i} - X_1(j) - x_j X'_{2y_i} = -x_j F'_\theta,$$
$$X_1(i) - y_i X'_{1y_j} + x_i X'_{2y_j} = x_i F'_\theta.$$

Далее полученные уравнения делим на коэффициенты перед производной F'_θ:

$$X'_{1x_i} - \frac{x_j X'_{2x_i}}{y_j} + \frac{X_2(j)}{y_j} = F'_\theta,$$

$$X'_{1x_j} + \frac{X_2(i)}{y_i} - \frac{x_i X'_{2x_j}}{y_i} = F'_\theta,$$

$$-\frac{y_j X'_{1y_i}}{x_j} + \frac{X_1(j)}{x_j} + X'_{2y_i} = F'_\theta,$$

$$\frac{X_1(i)}{x_i} - \frac{y_i X'_{1y_j}}{x_i} + X'_{2y_j} = F'_\theta.$$

приравниваем левые части данных уравнений:

$$(14) \qquad \begin{cases} X'_{1x_i} - \dfrac{x_j X'_{2x_i}}{y_j} + \dfrac{X_2(j)}{y_j} = X'_{1x_j} + \dfrac{X_2(i)}{y_i} - \dfrac{x_i X'_{2x_j}}{y_i}, \\ X'_{1x_j} + \dfrac{X_2(i)}{y_i} - \dfrac{x_i X'_{2x_j}}{y_i} = -\dfrac{y_j X'_{1y_i}}{x_j} + \dfrac{X_1(j)}{x_j} + X'_{2y_i}, \\ -\dfrac{y_j X'_{1y_i}}{x_j} + \dfrac{X_1(j)}{x_j} + X'_{2y_i} = \dfrac{X_1(i)}{x_i} - \dfrac{y_i X'_{1y_j}}{x_i} + X'_{2y_j}. \end{cases}$$

Затем первое уравнение дифференцируем по x_i и x_j, второе — по x_i и y_j, а третье — по y_i и y_j:

$$\frac{X'_{2x_ix_i}}{y_j} = \frac{X'_{2x_jx_j}}{y_i}, \ \frac{X'_{1x_iy_i}}{x_j} = \frac{X'_{2x_jy_j}}{y_i}, \ \frac{X'_{1y_jy_j}}{x_i} = \frac{X'_{1y_iy_i}}{x_j}.$$

Потом приравниваем и разделяем переменные:

$$yX'_{2xx} = \alpha = \mathrm{const}, \ xX'_{2xy} = \beta = \mathrm{const}, \ yX'_{1xy} = \beta, \ xX'_{1yy} = \gamma = \mathrm{const}.$$

Интегрируя эти уравнения, имеем $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Тогда

$$X'_{2xx} = X'_{2xy} = X'_{1xy} = X'_{1yy} = 0, \ X'_{2x} = p_1(z), \ X'_{1y} = q_2(z).$$

С учетом последнего, система (14) примет вид:

$$(15) \qquad \begin{cases} X'_{1x_i} - \dfrac{x_j p_1(z_i)}{y_j} + \dfrac{X_2(j)}{y_j} = X'_{1x_j} + \dfrac{X_2(i)}{y_i} - \dfrac{x_i p_1(z_j)}{y_i}, \\ -\dfrac{y_j q_2(z_i)}{x_j} + \dfrac{X_1(j)}{x_j} + X'_{2y_i} = X'_{1x_j} + \dfrac{X_2(i)}{y_i} - \dfrac{x_i p_1(z_j)}{y_i}, \\ \dfrac{X_1(i)}{x_i} - \dfrac{y_i q_2(z_j)}{x_i} + X'_{2y_j} = -\dfrac{y_j q_2(z_i)}{x_j} + \dfrac{X_1(j)}{x_j} + X'_{2y_i}. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение этой системы по x_i, а второе уравнение по y_i, потом разделим переменные:

$$X'_{1xx} = 0, \ X'_{2yy} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$X_1 = q_1(z)x + q_2(z)y + q(z), \ X_2 = p_1(z)x + p_2(z)y + p(z).$$

Далее найденное подставляем в систему (15):

$$q_1(z_i)+\frac{p_1(z_j)x_j+p_2(z_j)y_j+p(z_j)}{y_j}-\frac{x_jp_1(z_i)}{y_j}$$
$$=q_1(z_j)+\frac{p_1(z_i)x_i+p_2(z_i)y_i+p(z_i)}{y_i}-\frac{x_ip_1(z_j)}{y_i},$$

$$-\frac{y_jq_2(z_i)}{x_j}+\frac{q_1(z_j)x_j+q_2(z_j)y_j+q(z_j)}{x_j}+p_2(z_i)$$
$$=q_1(z_j)+\frac{p_1(z_i)x_i+p_2(z_i)y_i+p(z_i)}{y_i}-\frac{x_ip_1(z_j)}{y_i},$$

$$-\frac{y_iq_2(z_j)}{x_i}+\frac{q_1(z_i)x_i+q_2(z_i)y_i+q(z_i)}{x_i}+p_2(z_j)$$
$$=-\frac{y_jq_2(z_i)}{x_j}+\frac{q_1(z_j)x_j+q_2(z_j)y_j+q(z_j)}{x_j}+p_2(z_i).$$

Из новой системы следует, что

$$p=q=0,\ q_1(z)=2\alpha+p_2(z),\ p_1=\mathrm{const},\ q_2=\mathrm{const},\ p_2(z)=P(z)-\alpha.$$

Тогда

$$X_1=(\alpha+P(z))x+q_2y,\ X_2=p_1x+(P(z)-\alpha)y.$$

Найденное выражение подставляем в (13) и приводим подобные:

$$y_jX_1(i)-y_iX_1(j)-x_jX_2(i)+x_iX_2(j)=(P(z_i)+P(z_j))\theta.$$

Поэтому уравнение (10) принимает вид:

$$(P(z_i)+P(z_j))\theta\frac{\partial f(i,j)}{\partial\theta}+X_3(z_i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_i}+X_3(z_j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j}=0.$$

Решая это уравнение, получаем [11]

$$f(i,j)=f(e^{\Psi(z_i)+\Psi(z_j)},\kappa(z_i)-\kappa(z_j)).$$

Далее вводим замену координат $xe^{\Psi(z)}=\overline{x}$, $ye^{\Psi(z)}=\overline{y}$, $\kappa(z)=\overline{z}$ и переписываем метрическую функцию:

$$f=f(\overline{\theta},\overline{z}_i-\overline{z}_j),\ \overline{\theta}=\overline{x}_i\overline{y}_j-\overline{x}_j\overline{y}_i.$$

В новых координатах тождество (13) принимает вид:

$$\overline{y}_jX_1(i)-\overline{y}_iX_1(j)-\overline{x}_jX_2(i)+\overline{x}_iX_2(j)=(X_3(\overline{z}_i)-X_3(\overline{z}_j))\overline{F}(\overline{\theta},w),\ w=\overline{z}_i-\overline{z}_j,$$

где введено обозначение

$$\overline{F}(\overline{\theta},w)=-\frac{\partial f(i,j)}{\partial w}\Big/\frac{\partial f(i,j)}{\partial\overline{\theta}}.$$

В силу леммы 1, очевидно, $X_3'\neq 0$. Тогда имеем тождество

$$\frac{\overline{y}_jX_1(i)-\overline{y}_iX_1(j)-\overline{x}_jX_2(i)+\overline{x}_iX_2(j)}{X_3(\overline{z}_i)-X_3(\overline{z}_j)}=\overline{F}(\overline{\theta},w). \tag{16}$$

Рассуждая далее как и выше, получаем

$$X_1=(\alpha+P(\overline{z}))\overline{x}+q_2\overline{y},\ X_2=p_1\overline{x}+(P(\overline{z})-\alpha)\overline{y}.$$

Найденное выражение подставляем в уравнение (16):

$$\frac{P(\overline{z}_i)+P(\overline{z}_j)}{X_3(\overline{z}_i)-X_3(\overline{z}_j)}=\overline{F}(\overline{\theta},w)/\overline{\theta}. \tag{17}$$

Далее полученное дифференцируем по $\overline{z}_i$ и $\overline{z}_j$, а затем складываем:

$$(P'(\overline{z}_i)-P'(\overline{z}_j))(X_3(\overline{z}_i)-X_3(\overline{z}_j))-(P(\overline{z}_i)+P(\overline{z}_j))(X_3'(\overline{z}_i)+X_3'(\overline{z}_j))=0.$$

Дифференцируем теперь найденное тождество по $\overline{z}_i$ и по $\overline{z}_j$:

$$P''(\overline{z}_i)X_3'(\overline{z}_j)+P''(\overline{z}_j)X_3'(\overline{z}_i)+P'(\overline{z}_i)X_3''(\overline{z}_j)+P'(\overline{z}_j)X_3''(\overline{z}_i)=0. \tag{18}$$

Так как $X_3'\neq 0$, то последнее тождество делим на произведение $X_3'(\overline{z}_i)X_3'(\overline{z}_j)$ и дифференцируем по переменным $\overline{z}_i$ и $\overline{z}_j$:

$$\frac{P'(\overline{z}_i)}{X_3'(\overline{z}_i)}\frac{X_3''(\overline{z}_j)}{X_3'(\overline{z}_j)}+\frac{P'(\overline{z}_j)}{X_3'(\overline{z}_j)}\frac{X_3''(\overline{z}_i)}{X_3'(\overline{z}_i)}=0.$$

Далее возможны два случая: $X_3''=0$ и $X_3''\neq 0$.

Если $X_3''=0$, т.е. $X_3=a_1\overline{z}+b_1$, $a_1\neq 0$, то в тождестве (18) разделяем переменные и получаем $P''=0$ или $P=a_2\overline{z}+b_2$. Подставляя это в (17), получаем $P'=0$.

Если же $X_3''\neq 0$, то в тождестве (18) разделяем переменные и снова получаем $P'=0$.

Таким образом, $P=\mathrm{const}$ и тогда из (17) будет следовать

$$\overline{F}(\overline{\theta},w)=\frac{\alpha\overline{\theta}}{w}=-\frac{\partial f(i,j)}{\partial w}/\frac{\partial f(i,j)}{\partial\overline{\theta}}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем дифференциальное уравнение:

$$\alpha\overline{\theta}\frac{\partial f(i,j)}{\partial\overline{\theta}}+w\frac{\partial f(i,j)}{\partial w}=0.$$

Интегрируя полученное уравнение [11], имеем метрическую функцию:

$$f(i,j)=\phi((\overline{x}_i\overline{y}_j-\overline{x}_j\overline{y}_i)/(\overline{z}_i-\overline{z}_j)^{\alpha}).$$

Несложно проверить, что полученная метрическая функция не является инвариантом шестипараметрической группы движений. Противоречие. $\square$

Функциональное уравнение (10) удобно переписать в виде:

$$y_jX_1(i)-y_iX_1(j)-x_jX_2(i)+x_iX_2(j)+X_3(i)F_1+X_3(j)F_2=0, \tag{19}$$

где введены обозначения

$$F_1(\theta,z_i,z_j)=\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}/\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta},\ F_2(\theta,z_i,z_j)=\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}/\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta}. \tag{20}$$

Из (6) и (8), очевидно, следуют аналитичность функций (20) и справедливость неравенств $F_1\neq 0$, $F_2\neq 0$. Тогда имеем разложения в ряд Тейлора [10]:

$$\begin{cases} F_1=f_1(z_i,z_j)+D_1(f_1)(z_i,z_j)\theta+1/2D_{1,1}(f_1)(z_i,z_j)\theta^2+\cdots, \\ F_2=f_2(z_i,z_j)+D_1(f_2)(z_i,z_j)\theta+1/2D_{1,1}(f_2)(z_i,z_j)\theta^2+\cdots. \end{cases} \tag{21}$$

Потом найденные разложения (7) и (21) подставляем в тождество (10) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j. Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 15 [12].

Сравниваем коэффициенты перед степенью 0:

$$X_3(z_i)f_1(z_i,z_j)+X_3(z_j)f_2(z_i,z_j)=0.$$

Сравниваем коэффициенты перед степенями 1:

$$\begin{cases} D_1(X_3)(z_i)f_1(z_i,z_j)+X_2(z_j)=0,\\ D_2(X_3)(z_i)f_1(z_i,z_j)-X_1(z_j)=0,\\ D_1(X_3)(z_j)f_2(z_i,z_j)-X_2(z_i)=0,\\ D_2(X_3)(z_j)f_2(z_i,z_j)+X_1(z_i)=0. \end{cases} \tag{22}$$

Затем сравниваем все коэффициенты перед степенями 2:

$$D_1(X_1)(z_i)+D_2(X_2)(z_j)+X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i,z_j)+X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i,z_j)=0,$$

$$D_1(X_1)(z_j)+D_2(X_2)(z_i)+X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i,z_j)+X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i,z_j)=0,$$

$$D_1(X_2)(z_j)-D_1(X_2)(z_i)=0,$$

$$-D_2(X_1)(z_j)+D_2(X_1)(z_i)=0,$$

$$D_{1,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i,z_j)=0,\ D_{1,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i,z_j)=0,$$

$$D_{1,1}(X_3)(z_i)f_1(z_i,z_j)=0,\ D_{1,1}(X_3)(z_j)f_2(z_i,z_j)=0,$$

$$D_{2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i,z_j)=0,\ D_{2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i,z_j)=0.$$

Разделяя переменные в третьем и четвертом уравнениях, получаем

$$D_1(X_2)=a=\mathrm{const},\ D_2(X_1)=b=\mathrm{const}.$$

Далее вычитаем из первого уравнения второе:

$$D_1(X_1)(z_i)+D_2(X_2)(z_j)=D_1(X_1)(z_j)+D_2(X_2)(z_i),$$

после разделения переменных, имеем

$$D_1(X_1)=D_2(X_2)+d,\ d=\mathrm{const}.$$

Таким образом, получается результат:

$$\begin{cases} D_1(X_2)=a=\mathrm{const},\ D_2(X_1)=b=\mathrm{const},\\ D_{1,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i,z_j)=0,\ D_{1,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i,z_j)=0,\\ D_{1,1}(X_3)(z_i)f_1(z_i,z_j)=0,\ D_{1,1}(X_3)(z_j)f_2(z_i,z_j)=0,\\ D_1(X_1)=D_2(X_2)+d,\ d=\mathrm{const},\\ D_2(X_2)(z_j)+D_2(X_2)(z_i)+d+X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i,z_j)+X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i,z_j)=0. \end{cases} \tag{23}$$

Сравниваем коэффициенты перед степенями 3:

$$
\left\{
\begin{array}{c}
D_{1,1}(X_1)(z_i) + 2D_1(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{1,1}(X_1)(z_j) + 2D_1(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{1,2}(X_2)(z_i) + D_1(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{1,2}(X_2)(z_j) + D_1(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{1,2}(X_1)(z_i) + D_2(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{1,2}(X_1)(z_j) + D_2(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{2,2}(X_2)(z_i) + 2D_2(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{2,2}(X_2)(z_j) + 2D_2(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{1,1}(X_2) = 0,\ D_{2,2}(X_1) = 0,\\
D_{1,1,1}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0,\ D_{1,1,1}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0,\\
D_{1,1,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0,\ D_{1,1,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0,\\
D_{1,2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0,\ D_{1,2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0,\\
D_{2,2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0,\ D_{2,2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0.
\end{array}
\right.
\tag{24}
$$

Далее аналогично поступаем с более высокими степенями.

Полученные результаты можно просуммировать и записать компактно, для чего вводятся сокращающие обозначения:

$$
\overline{F_1} = (D_{1,1}(f_1), D_{1,1,1}(f_1), D_{1,1,1,1}(f_1), \ldots),
$$
$$
\overline{F_2} = (D_{1,1}(f_2), D_{1,1,1}(f_2), D_{1,1,1,1}(f_2), \ldots).
$$

Тогда

$$
\left\{
\begin{array}{c}
D_{1,\beta_1,\ldots,\beta_s}(X_1)(z_i)+\\
+(2s - \beta_1 - \cdots - \beta_s + 1)D_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{1,\beta_1,\ldots,\beta_s}(X_1)(z_j)+\\
+(2s - \beta_1 - \cdots - \beta_s + 1)D_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{\beta_1,\ldots,\beta_s,2}(X_2)(z_i)+\\
+(\beta_1 + \cdots + \beta_s - s + 1)D_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{\beta_1,\ldots,\beta_s,2}(X_2)(z_j)+\\
+(\beta_1 + \cdots + \beta_s - s + 1)D_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = 0,\\
D_{1,\ldots,1}(X_2) = 0, D_{2,\ldots,2}(X_1) = 0,
\end{array}
\right.
\tag{25}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{c}
D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0,\ D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0,\\
D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i)\overline{F_1}(z_i, z_j) = 0,\ D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j)\overline{F_2}(z_i, z_j) = 0,\\
D_1(X_3)(z_i)\overline{F_1}(z_i, z_j) = 0,\ D_1(X_3)(z_j)\overline{F_2}(z_i, z_j) = 0,\\
D_2(X_3)(z_i)\overline{F_1}(z_i, z_j) = 0,\ D_2(X_3)(z_j)\overline{F_2}(z_i, z_j) = 0,
\end{array}
\right.
\tag{26}
$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, $\beta_m = 1, 2$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

Лемма 4. *Система дифференциальных уравнений*

$$
\frac{\partial f}{\partial z_i} = \varphi(z_i)\theta\frac{\partial f}{\partial \theta},\ \frac{\partial f}{\partial z_j} = \varphi(z_j)\theta\frac{\partial f}{\partial \theta},
$$

где $f = f(\theta, z_i, z_j)$, *имеет решение*

$$
f(i, j) = \psi(ln\theta + K(z_i) + K(z_j)),
$$

причем K — аналитическая функция.

Доказательство. Записываем уравнение характеристик по первому дифференциальному уравнению [11]: $d\theta/\theta = -\varphi(z_i)dz_i$, следовательно $f(i,j) = \mu(ln\theta + K(z_i), z_j)$. Найденное подставляем во второе уравнение системы и интегрируем, в результате приходим к утверждению леммы. □

Далее рассмотрим два случая: $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 = 0$ и $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 \neq 0$.

1. Предположим сначала, что $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 = 0$. Тогда по лемме 3 хотя бы одно из выражений $D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)$, причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, отлично от нуля. Поэтому из (26) вытекает $f_1(z_i, z_j) = 0$, $f_2(z_i, z_j) = 0$, $\overline{F_1}(z_i, z_j) = 0$, $\overline{F_2}(z_i, z_j) = 0$, а из (25) следует $D_1(f_1)(z_i, z_j) = D_1(f_1)(z_i) \neq 0$, $D_1(f_2)(z_i, z_j) = D_1(f_2)(z_j) \neq 0$. Из равенств (25) тогда будем иметь $D_1(f_1)(z) = D_1(f_2)(z)$. Поэтому выражения (20) примут вид:

$$D_1(f_1)(z_i)\theta = \frac{\partial f(i,j)}{\partial z_i} / \frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta},\ D_1(f_1)(z_j)\theta = \frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j} / \frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}. \tag{27}$$

Приводя к общему знаменателю, приходим к уравнениям [11]:

$$\theta\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} - \frac{1}{D_1(f_1)(z_i)}\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_i} = 0,\ \theta\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} - \frac{1}{D_1(f_1)(z_j)}\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j} = 0.$$

Затем применяем лемму 4:

$$f(i,j) = \psi\left(ln\theta + K(z_i) + K(z_j)\right) = \psi\left(\theta e^{K'(z_i)+K'(z_j)}\right),\ K' = \exp K.$$

Получена явно вырожденная метрическая функция, которая не задает феноменологически симметричную геометрию.

2. Рассмотрим второй случай: $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 \neq 0$. Из (24), очевидно, следует $D_1(f_1)(z) = D_1(f_2)(z)$. Для определенности далее можно считать $D_1(X_3) \neq 0$, иначе $D_2(X_3) \neq 0$. Тогда из (22) и (24) следует

$$f_1(z_i, z_j) = -\frac{X_2(z_j)}{D_1(X_3)(z_i)},\ f_2(z_i, z_j) = \frac{X_2(z_i)}{D_1(X_3)(z_j)},$$

$$D_1(f_1)(z) = -\frac{D_{11}(X_1)(z)}{2D_1(X_3)(z)} = D_1(f_2)(z).$$

Найденное подставляем в (20) и приводим к общему знаменателю:

$$D_1(X_3)(z_i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} = \left(-X_2(z_j) - \frac{D_{11}(X_1)(z_i)}{2}\theta\right)\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta},$$

$$D_1(X_3)(z_j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j} = \left(X_2(z_i) - \frac{D_{11}(X_1)(z_j)}{2}\theta\right)\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}.$$

Далее вводим замену координат: $\int dz/D_1(X_3)(z) = \overline{z}$. Тогда в новых координатах будем иметь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{z}_i} = \left(-X_2(\overline{z}_j) - \dfrac{D_{11}(X_1)(z_i)}{2}\theta\right)\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}, \\ \dfrac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{z}_j} = \left(X_2(\overline{z}_i) - \dfrac{D_{11}(X_1)(\overline{z}_j)}{2}\theta\right)\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}. \end{cases} \tag{28}$$

Если $X_2 = 0$, то приходим к лемме 4, которая дает вырожденную метрическую функцию. Если же $X_2 \neq 0$, то первое уравнение умножаем на $X_2(\overline{z}_i)$, а второе на $X_2(\overline{z}_j)$ и складываем результаты:

$$\left\{ \begin{array}{c} X_2(z_i)\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{z}_i} + X_2(\overline{z}_j)\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{z}_j} = \\ = -\left(\dfrac{D_{11}(X_1)(\overline{z}_i)}{2}X_2(\overline{z}_i) + \dfrac{D_{11}(X_1)(\overline{z}_j)}{2}X_2(\overline{z}_j)\right)\theta\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}. \end{array} \right. \tag{29}$$

Далее рассматриваем случаи: $D_{11}(X_1) = 0$ и $D_{11}(X_1) \neq 0$.

В первом случае ($D_{11}(X_1) = 0$) уравнение (29) имеет решение

$$f(i,j) = \psi\left(M(\overline{z}_i) - M(\overline{z}_j), \theta\right),$$

где $M' = 1/X_2$. Подставляем найденное в систему (28):

$$\frac{1}{X_2(\overline{z}_i)}\frac{\partial \psi}{\partial w} = -X_2(\overline{z}_j)\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{1}{X_2(\overline{z}_j)}\frac{\partial \psi}{\partial w} = X_2(\overline{z}_i)\frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

где $w = M(\overline{z}_i) - M(\overline{z}_j)$, или

$$\frac{\partial \psi}{\partial w} = -X_2(\overline{z}_i)X_2(\overline{z}_j)\frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Полученное соотношение разрешаем относительно произведения $X_2(\overline{z}_i)X_2(\overline{z}_j)$:

$$X_2(\overline{z}_i)X_2(\overline{z}_j) = \tau(w,\theta) = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}/\frac{\partial \psi}{\partial w}.$$

Далее в найденное выражение сначала дифференцируем по $\overline{z}_i$, а затем по $\overline{z}_j$:

$$X_2'(\overline{z}_i)X_2(\overline{z}_j) = \frac{1}{X_2(\overline{z}_i)}\tau_w', \; X_2(\overline{z}_i)X_2'(\overline{z}_j) = -\frac{1}{X_2(\overline{z}_j)}\tau_w'.$$

Потом приводим к общему знаменателю и складываем:

$$X_2'(\overline{z}_i)X_2(\overline{z}_i)X_2(\overline{z}_j) + X_2(\overline{z}_i)X_2(\overline{z}_j)X_2'(\overline{z}_j) = 0.$$

Сокращая на общий множитель, разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$X_2 = a = \mathrm{const} \neq 0.$$

Тогда уравнения из системы (28) приводятся к виду

$$\frac{\partial \psi}{\partial w} = -a^2\frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Решением последнего уравнения [11] будет метрическая функция:

$$f = \chi\left(x_iy_j - x_jy_i + a^2(M(\overline{z}_i) - M(\overline{z}_j))\right).$$

Если ввести переобозначение координаты $\overline{z}$: $a^2M(\overline{z}) = z$, а также масштабное преобразование $\chi^{-1}(f) \to f$, то получим каноническую метрическую функцию (9).

Во втором случае ($D_{11}(X_1) \neq 0$) уравнение (29) решено в лемме 3:

$$f(i,j) = \psi\left(M(z_i) - M(z_j), ln\theta + T(z_i) + T(z_j)\right),$$

где $M' = 1/X_2$, $T' = -D_{11}(X_1)/2$. Подставляем найденное в систему (28), затем группируем, в результате получаем одно независимое выражение:

$$\frac{\partial \psi}{\partial w} = -X_2(z_i)X_2(z_j)\frac{1}{\theta}\frac{\partial \psi}{\partial u}, \; w = M(z_i) - M(z_j), \; u = ln\theta + T(z_i) + T(z_j).$$

Из данного выражения следует:

$$X_2(z_i)X_2(z_j)\frac{1}{\theta} = \phi(w,u) = -\frac{\partial\psi}{\partial u}/\frac{\partial\psi}{\partial w}.$$

Данная комбинация возможна в единственном случае:

$$X_2(z_i)X_2(z_j)\frac{1}{\theta} = \phi(w,u) = e^{-u}.$$

Тогда имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial w} + e^{-u}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0,$$

решая которое [11], получаем метрическую фунцию:

$$f(i,j) = \chi\left(x_iy_j - x_jy_i - M(z_i) + M(z_j) + e^{T(z_i)+T(z_j)}\right),\ T \neq \text{const}.$$

Если ввести переобозначения $M(z) = \overline{z}$, $e^{T(z)} = Q(\overline{z})$ и масштабное преобразование $\chi^{-1}(f) \to f$, то метрическую функцию можно упростить:

$$f(i,j) = x_iy_j - x_jy_i - \overline{z}_i + \overline{z}_j + Q(\overline{z}_i)Q(\overline{z}_j),\ Q \neq \text{const}. \tag{30}$$

Выясним, при каком значении функции Q метрическая функция (30) задает феноменологически симметричную геометрию, то есть имеет шестипараметрическую группу движений. Для этого найдем операторы алгебры Ли группы движений. Воспользуемся тождеством (10):

$$y_jX_1(i) - y_iX_1(j) - x_jX_2(i) + x_iX_2(j) +$$
$$+X_3(i)(Q'(\overline{z}_i)Q(\overline{z}_j) - 1) + X_3(j)(Q(\overline{z}_i)Q'(\overline{z}_j) + 1) = 0.$$

Осуществим в этом равенстве переобозначение точек $i \leftrightarrow j$, в результате имеем:

$$y_iX_1(j) - y_jX_1(i) - x_iX_2(j) + x_jX_2(i) +$$
$$+X_3(j)(Q'(\overline{z}_j)Q(\overline{z}_i) - 1) + X_3(i)(Q(\overline{z}_j)Q'(\overline{z}_i) + 1) = 0.$$

Складывая полученный уравнения, будем иметь:

$$(X_3(i) + X_3(j))(Q'(\overline{z}_i)Q(\overline{z}_j) + Q'(\overline{z}_j)Q(\overline{z}_i)) = 0.$$

Так как $X_3 \neq 0$, то

$$Q'(\overline{z}_i)Q(\overline{z}_j) + Q'(\overline{z}_j)Q(\overline{z}_i) = 0.$$

Разделяя в данном тождестве переменные, получаем $Q' = 0$, то есть $Q = \text{const}$. Таким образом, метрическая функция (30) не задает феноменологически симметричную геометрию.

Теорема доказана полностью.

4. Заключение

Итак, поставленная выше задача об аналитическом вложении симплектической двумерной геометрии полностью решена. В результате получилась трехмерная симплектическая геометрия максимальной подвижности. Аналогично решается задача об аналитическом вложении симплициальной двумерной геометрии, т.е. задача о нахождении всех трехмерных геометрий максимальной подвижности с метрической функцией вида:

$$f(i,j) = f\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, z_i, z_j\right).$$

References

[1] G.G. Mikhailichenko, *On group and phenomenological symmetry in geometry*, Siberian Mathematical Journal, **25**:5 (1984), 99–113. MR0762243

[2] G.G. Mikhailichenko, *Polymetric geometries*, NGU, Novosib., 2001.

[3] L.V. Ovsyannikov, *A group analysis of differential equation*, Nauka, M., 1978. MR0511921

[4] G.G. Mikhailichenko, *Two-dimensional geometry*, Soviet Math. Doklady, **24**:2 (1981), 346–348. MR0631804

[5] V.H. Lev, *Three-dimensional geometries in the theory of physical structures*, Vychisl. Sistemy, **125** (1988), 90–103. MR1002931

[6] G.G. Mikhailichenko, *The mathematical basics and results of the theory of physical structires*, GAGU, Gorno-Altaisk, 2016.

[7] V.A. Kyrov, *Functional equations in pseudo-Euclidean geometry*, Sib. Zn. Ind. Mat, **13**:4 (2010), 38–51 (in Russian). MR2841212

[8] V.A. Kyrov, *Functional equations in simplicial geometry*, Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk, **16**:2 (2010), 149–153 (in Russian).

[9] V.A. Kyrov, *On some class jf functional-differential equation*, Vestn. Samar. Thech. Univ. Mat. Phys. Nauki, **26**:1 (2010), 31–38 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu986

[10] G.M. Fichtengolz, *A course of differential and integral calculus. T. 2*, M.: Phismhatgis, 1963.

[11] L.E. Elsgoltz, *Differential equations and calculus of variations*, M.:Nauka, 1969.

[12] V. Dyakonov, *Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations*, DMS, M., 2014.

Vladimir Alexandrovich Kyrov
Gorno-Altaiisk State University,
st. Lenkina, 1,
649000, r. Altai, Gorno-Altaiisk, Russia
E-mail address: kyrovVA@yandex.ru

Gennadii Grigorevich Mikhailichenko
Gorno-Altaiisk State University,
st. Lenkina, 1,
649000, r. Altai, Gorno-Altaiisk, Russia
E-mail address: mikhailichenko@gasu.ru