S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 673–689 (2017) УДК 517.9

DOI 10.17377/semi.2017.14.058 MSC 39A70

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Г.В. ГАРКАВЕНКО, Н.Б. УСКОВА

Abstract. We study a difference operator with a general growing potential. We obtain asymptotic formulas for the eigenvalues, eigenvectors, and the spectral projections of such operators. We also obtain estimates for the equiconvergence of spectral decompositions. For an invertible difference operator, we estimate off-diagonal decay of the matrix of the inverse operator and the Fourier coefficients of the eigenvectors.

Keywords: difference operator, similar operator method, eigenvalue, eigenvector, spectral projector.

1. Введение

Рассмотрим гильбертово пространство двусторонних комплексных последовательностей $l_2(\mathbb{Z})$ со скалярным произведением $(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\overline{y(n)}$, $x,y \in l_2(\mathbb{Z})$, и нормой $\|x\| = \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^2\big)^{\frac{1}{2}}$, порожденной этим скалярным произведением. Пусть в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ задан линейный оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ формулой

$$(\mathcal{E}x)(n) = a(n)x(n) + 2x(n) - x(n-1) - x(n+1),\ n \in \mathbb{Z}, x \in D(\mathcal{E}) \quad (1)$$

с областью определения $D(\mathcal{E})$ вида

$$D(\mathcal{E}) = \{x \in l_2(\mathbb{Z}) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)|^2|x(n)|^2 < \infty\}. \quad (2)$$

Garkavenko, G.V., Uskova, N.B., Method of similar operators in research of spectral properties of difference operators with growthing potential.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00197).

Поступила 14 июля 2016, опубликована 20 июля 2017.

Всюду считается, что последовательность $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ обладает свойствами:

$$\lim_{|n|\to\infty}|a(n)|=\infty;\quad 0<d_n=\inf_{j\neq n}|a(n)-a(j)|\to\infty, \tag{3}$$

Из (3) следует, что $a(n)\neq a(m)$ при $n\neq m$.

Такие разностные операторы соответствуют операторам Штурма-Лиувилля при их дискретизации (см. [1], [2]).

В стандартном базисе $\{e_k\}$, $k\in\mathbb{Z}$, пространства $l_2(\mathbb{Z})$, где $e_k(n)=\delta_{n,k}$, $n,k\in\mathbb{Z}$ ($\delta_{n,k}$ — символ Кронекера), матрица оператора $\mathcal{E}$ трехдиагональна и имеет вид

$$\begin{pmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & -1 & a(-2)+2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & 0 & -1 & a(-1)+2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & 0 & -1 & a(0)+2 & -1 & 0 & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & 0 & -1 & a(1)+2 & -1 & 0 & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & a(2)+2 & -1 & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}.$$

В работе [1] изучались разностные самосопряженные операторы указанного вида в конечномерном пространстве, приводилась двусторонняя оценка наименьшего собственного значения вариационным методом.

В данной статье получены асимптотические оценки собственных значений, собственных векторов и спектральных проекторов оператора $\mathcal{E}$, заданного формулой (1) с областью определения (2) при выполнении условия (3). Рассмотрены оценки скорости убывания внедиагональных элементов матрицы оператора $\mathcal{E}^{-1}$ (при условии обратимости $\mathcal{E}$) и оценки коэффициентов Фурье собственных векторов оператора $\mathcal{E}$ с использованием оценок элементов матрицы оператора $\mathcal{E}^{-1}$.

Одним из основных результатов является

Теорема 1. *Существует такое целое число $k\geqslant 0$, что спектр $\sigma(\mathcal{E})$ оператора $\mathcal{E}$ представим в виде*

$$\sigma(\mathcal{E})=\sigma_{(k)}\cup(\cup_{|i|>k}\sigma_i), \tag{4}$$

где $\sigma_{(k)}$ содержат не более $2k+1$ собственных значений, $\sigma_i=\{\mu_i\}$, $|i|>k$, — одноточечные множества и имеют место следующие асимптотические формулы

$$\mu_i=a(i)+2+O(d_i^{-1}), \tag{5}$$

$$\mu_i=a(i)+2-\frac{a(i+1)-2a(i)+a(i-1)}{(a(i+1)-a(i))(a(i-1)-a(i))}+O(d_i^{-2}),\quad |i|>k, \tag{6}$$

и числа d_i, $i\in\mathbb{Z}$, определены формулой (3).

Для соответствующих собственных векторов $\widetilde{e}_i$, $|i|>k$, имеют место оценки:

$$\|\widetilde{e}_i-\widetilde{y}_i\|\leqslant Cd_i^{-2},\ |i|>k, \tag{7}$$

где

$$\widetilde{y}_i(j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ (a(i\pm1)-a(i))^{-1}, & j=i\pm1,\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

и $C > 0$ некоторая постоянная величина.

Спектральному анализу соответствующих дифференциальных операторов с растущим потенциалом посвящены монографии [3, гл. V, § 2] и [4, гл. VII, § 24].

Статья организована следующим образом. В §2 приведен метод подобных операторов в адаптированном к рассматриваемому оператору виде. В §3 построены две различные допустимые тройки метода подобных операторов для оператора, близкого к исследуемому. В четвертом параграфе доказана приведенная во введении теорема 1. В §5 получены асимптотические формулы для спектральных проекторов разностного оператора $\mathcal{E}$ и оценки равносходимости спектральных разложений (теорема 4). В следующем параграфе на последовательность $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ставится условие суммируемости последовательности d_i^{-2}, $i \in \mathbb{Z}$. В этом случае оценки теоремы 1 можно улучшить (см. теорему 6). Кроме того, иногда удобнее спектральные проекторы оценивать не по норме операторов с суммируемыми диагоналями, а по норме операторов Гильберта — Шмидта. Соответствующие оценки также приведены в § 6. Но в этом случае приходится производить предварительное преобразование подобия (теорема 5). И, наконец, в последнем параграфе рассматриваются следующие вопросы: оценки нормы обратного к $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \to l_2(\mathbb{Z})$ оператора $\mathcal{E}^{-1} : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$, оценки скорости убывания внедиагональных элементов у матрицы оператора $\mathcal{E}^{-1}$ (как оператора, действующего из $l_2(\mathbb{Z})$ в $D(\mathcal{E})$). Также получены оценки коэффициентов Фурье собственных векторов оператора $\mathcal{E}$ с учетом идеологии статей [5], [6]. Заметим, что оценки элементов обратных матриц важны при доказательстве сходимости интерполяционных или иных аппроксимационных процессов [7]. Норма обратного оператора используется при получении коэрцитивных оценок [2].

2. О методе подобных операторов

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство. Символом $\operatorname{End}\mathcal{H}$ обозначена банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$.

Пусть $\{P_k\}, k \in \mathbb{Z}$ — система ортопроекторов таких, что $P_iP_j = 0$ при $i \neq j$; $\sum\limits_k P_k = I$; ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} P_k x$ безусловно сходится к $x \in \mathcal{H}$ для любого $x \in \mathcal{H}$; из того, что $P_i x = 0$ для любого $i \in \mathbb{Z}$ следует, что $x = 0$. Любому оператору $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ поставим в соответствие матрицу $X \sim (X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, составленную из операторных блоков $X_{ij} = P_i X P_j \in \operatorname{End}\mathcal{H}$. Введем, согласно [5], [6] понятие диагонали матрицы (X_{ij}) оператора X. А именно, p-ой диагональю матрицы (X_{ij}) назовем оператор $X_p \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, определяемый формулой

$$X_p = \sum_{i-j=p} X_{ij}.$$

Определим двустороннюю числовую последовательность $d_X : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, положив

$$d_X(p) = \|X_p\|_\infty = \sup_{i-j=p} \|X_{ij}\|.$$

Последовательность $d_X : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ является важной характеристикой убывания элементов матрицы оператора X, лежащих вне главной диагонали.

Если для некоторого оператора X из $\operatorname{End}\mathcal{H}$ выполнено условие

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} d_X(p) < \infty,$$

то оператор X будем называть оператором с суммируемыми диагоналями. Таким образом, этот оператор $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ представим в виде

$$X = \sum_{p\in\mathbb{Z}} X_p.$$

Операторы с суммируемыми диагоналями образуют подалгебру $\operatorname{End}_1\mathcal{H}$ из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$ [5, 6]. Если положить

$$\|X\|_1 = \sum_{p\in\mathbb{Z}} d_X(p),$$

то $\operatorname{End}_1\mathcal{H}$ становится банаховой алгеброй. Очевидно также, что $\|X\|_1 \geqslant \|X\|_\infty$.

Введем в рассмотрение двусторонний идеал операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$. Далее систематически используются результаты об идеале $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ из монографии [8]. Символом $\|X\|_2$ будем обозначать норму оператора Гильберта-Шмидта $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, т. е. $\|X\|_2 = \operatorname{tr}\big(XX^*\big)^{\frac{1}{2}}$. Здесь $\operatorname{tr} XX^*$ — след оператора XX^*, принадлежащего двустороннему идеалу $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов из $\operatorname{End}\mathcal{H}$ с нормой $\|X\|_1 = \operatorname{tr} XX^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n$, где (s_n) — последовательность s-чисел оператора X. Также далее будут использованы матрицы Гильберта-Шмидта $A = (a_{ij}), i,j \in \mathbb{Z}$, с нормой $\|A\|_2 = \big(\sum\limits_{i,j\in\mathbb{Z}} |a_{ij}|^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ его норма совпадает с нормой матрицы Гильберта-Шмидта $\widetilde{X} = (Xe_i, e_j) = (x_{ij})$, $i,j \in \mathbb{Z}$, где $\{e_i\}, i \in \mathbb{Z}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Также отметим, что оператор X из $\operatorname{End}\mathcal{H}$ является оператором Гильберта-Шмидта тогда и только тогда, когда его матрица $\widetilde{X}$ есть матрица Гильберта-Шмидта для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\}, i \in \mathbb{Z}$ и $\|X\|_2 = \|\widetilde{X}\|_2$. Более того, для введенной системы проекторов $\{P_k\}, k \in \mathbb{Z}$ $\|X\|_2^2 = \sum\limits_{i,j\in\mathbb{Z}} \|P_i X P_j\|_2^2$. Наконец, отметим еще одно свойство идеала $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, используемое в § 3: если $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $XY \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Определение 1 ([13])**.** *Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 U x = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в оператор A_2.*

Всюду в этом параграфе через $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ обозначается линейный замкнутый оператор, действующий в $\mathcal{H}$, имеющий область определения $D(A)$, спектр $\sigma(A)$ и непустое резольвентное множество $\rho(A)$. Оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ играет роль невозмущенного оператора с известными спектральными свойствами. Возмутим оператор A некоторым оператором $B \in \operatorname{End}\mathcal{H}$. Методом исследования спектральных свойств возмущенного оператора $A - B$ будет служить предложенный А.Г. Баскаковым метод подобных операторов, основные положения которого изложены в работах [9] – [16]. Так как метод подобных операторов постоянно развивается, то подходы в [9] и в [13], например, несколько различаются. В данной статье мы будем придерживаться работы [13] в изложении метода.

Заметим, что метод подобных операторов обычно используется в спектральном анализе различных дифференциальных операторов. В качестве примера приведем недавно вышедшие работы [17] – [22].

Основная идея метода подобных операторов состоит в преобразовании подобия возмущенного оператора $A - B : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, где оператор B мал по сравнению с A, в более просто устроенный оператор. В данном случае — в оператор, матрица которого имеет блочно-диагональную структуру. Спектральные свойства такого оператора легко изучить, так как они близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора.

Далее оператор, действующий в пространстве операторов, будем называть *трансформатором*, согласно терминологии М.Г. Крейна [8].

Одним из важных понятий метода подобных операторов является понятие допустимой тройки, которая для применимости метода должна удовлетворять ряду условий. Обозначим символом $\mathfrak{A}$ пространство $\operatorname{End}_1 \mathcal{H}$ (с введенной в нем нормой) или пространство $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ (со своей нормой). Для любого оператора $X \in \mathfrak{A}$ его норма в $\mathfrak{A}$ обозначается символом $\|X\|_*$.

Определение 2 ([13])**.** *Пусть $J : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ и $\Gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ — трансформаторы. Тройку $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ назовем допустимой для невозмущенного оператора A тройкой, а $\mathfrak{A}$ — допустимым пространством возмущений, если:*

1) J и Γ — непрерывные трансформаторы и J — проектор, т. е. $J^2 = J$;

2) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$, при этом

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX, \quad X \in \mathfrak{A}, \tag{8}$$

и $Y = \Gamma X \in \mathfrak{A}$ — единственное решение уравнения, удовлетворяющее условию $JY = 0$;

3) существует такая постоянная $\gamma > 0$, что

$$\max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma Y)X\|_*\} \leqslant \gamma \|X\|_* \|Y\|_*,$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{A}$;

4) для любого $X \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty < \varepsilon$.

Замечание 1. *В определении допустимой тройки из* [13] *есть еще одно предположение: $\mathfrak{A}$ — банахово пространство со своей нормой, непрерывно вложенное в пространство операторов, подчиненных оператору A, которое у нас выполняет автоматически из-за ограниченности возмущения B и его принадлежности пространству $\operatorname{End}_1 \mathcal{H}$ или $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Зафиксируем некоторую допустимую для оператора A тройку $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ и возмутим оператор A некоторым оператором $B \in \mathfrak{A}$.

Теорема 2 ([13])**.** *Пусть выполнено условие*

$$4\|B\|_* \gamma < 1, \tag{9}$$

тогда операторы $A - B$ и $A - JX_*$ подобны. Имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - JX_*),$$

где $X_* \in \mathfrak{A}$ есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B, \tag{10}$$

и оно может быть найдено методом последовательных приближений, используя в качестве первого приближения оператор B.

3. Построение допустимых троек

Пусть $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z})$. В качестве невозмущенного оператора рассмотрим оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, где $D(A) = D(\mathcal{E})$, действующий по формуле $(Ax)(n) = (a(n) + 2)x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in D(A)$. Пусть для последовательностей $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ выполняется условие (3). Заметим, что сопряженный к A оператор A^* имеет область определения $D(A^*)$, совпадающую с $D(A)$, и $(A^*x)(n) = \overline{a(n)}x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для $x \in D(A)$. Поэтому согласно [23, гл. 13] он является нормальным оператором. В стандартном базисе пространства $l_2(\mathbb{Z})$ матрица оператора A диагональна и векторы стандартного базиса $\{e_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ являются его собственными векторами. Из (3) следует, что его спектр $\sigma(A)$ состоит из простых изолированных собственных значений $\sigma(A) = \{a(n) + 2, n \in \mathbb{Z}\}$. Определим проекторы $P_n, n \in \mathbb{Z}$ следующим образом $P_n x = (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{H}$. Таким образом, все проекторы имеют ранг 1.

Отметим, что $P_i B P_j x = (Be_j, e_i)(x, e_j)e_i = b_{ij}(x, e_j)e_i$, где $b_{ij} = (Be_j, e_i)$, причем $\|P_i B P_j\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|P_i B P_j x\| = |b_{ij}|$.

Основная схема построения используемых далее допустимых троек состоит в следующем. В рассматриваемых тройках $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ трансформатор $J : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ определяется формулой

$$JX = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X P_i, \quad X \in \mathfrak{A}. \tag{11}$$

Конкретный выбор пространства допустимых возмущений (оно совпадает с одним из пространств $\operatorname{End}_1 \mathcal{H}$ или $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$) гарантирует сходимость ряда (11) в сильной операторной топологии, если $\mathfrak{A} = \operatorname{End}_1 \mathcal{H}$ и по норме $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, если $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Обозначим оператор ΓX через Y и введем в рассмотрение числовую матрицу $(y_{ij}), i, j \in \mathbb{Z}$, этого оператора. Перепишем уравнение (8) для этих матричных элементов:

$$a(i)y_{ij} - y_{ij}a(j) = x_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Здесь через $x_{ij}, i, j \in \mathbb{Z}$, обозначены элементы числовой матрицы оператора $X \in \mathfrak{A}$ и учтено, что $A|\mathcal{H}_i = (a(i) + 2)I_i$, $\mathcal{H}_i = \operatorname{Im} P_i$, где I_i — тождественный оператор в $\mathcal{H}_i$. При конкретном выборе пространства допустимых возмущений придется получать оценки величины γ.

Лемма 1. *Тройки* $(\operatorname{End}_1 \mathcal{H}, J, \Gamma)$ *и* $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J, \Gamma)$ *являются допустимыми тройками для оператора* A.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \operatorname{End}_1 \mathcal{H}$. Выполнение условий 1, 2 определения 2 следует из построения операторов J и Γ.

Проверим выполнение условия 3) и определим константу γ из определения 2. Из (12) следует оценка модуля матричных элементов оператора Y:

$$|y_{lm}| = \frac{|x_{lm}|}{|a(l) - a(m)|}, \quad l \neq m, \quad l, m \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

и $y_{ll} = 0$ для всех $l \in \mathbb{Z}$. Так как $a(l) \neq a(m)$, $l \neq m$, то формула (13) корректна. Тогда

$$\|Y_p\| \leqslant \Big(\min_{\substack{i-j=p \\ p\neq 0}} |a(i) - a(j)| \Big)^{-1} \|X\|_p,$$

$$\|Y\|_1 = \sum_p \|Y_p\| \leqslant \Big(\min_{i\neq j} |a(i) - a(j)| \Big)^{-1} \|X\|_1,$$

т. е. $Y \in \mathrm{End}_1 \mathcal{H}$ и $\|\Gamma X\|_1 \leqslant \big(\min\limits_{i\neq j} |a(i) - a(j)|\big)^{-1} \|X\|_1$. Остальные условия пункта 3) определения 2 очевидны, и в качестве γ берем величину

$$\gamma = \big(\min_{\substack{i\neq j \\ i,j\in\mathbb{Z}}} |a(i) - a(j)|\big)^{-1}.$$

Доказательство включения $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ аналогично доказательству соответствующего утверждения из [13], [19].

И, наконец, условие 4) выполняется автоматически так как величину

$$\|(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|$$

можно сделать сколь угодно малой за счет подходящего выбора числа $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$. Утверждение леммы 1 для первой тройки доказано.

Пусть теперь $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. В этом случае

$$\|Y\|_2^2 = \sum_p \sum_{\substack{i-j=p \\ i\neq j}} \frac{|x_{ij}|^2}{|a(i) - a(j)|^2} \leqslant \big(\min_{i\neq j} |a(i) - a(j)|\big)^{-2} \|X\|_2^2.$$

Все остальные оценки проверяются аналогично предыдущему случаю и

$$\gamma = \big(\min_{\substack{i\neq j \\ i,j\in\mathbb{Z}}} |a(i) - a(j)|\big)^{-1}.$$

Лемма доказана. □

Пусть $Q_k = \sum\limits_{|i|\leqslant k} P_i$. Наряду с трансформаторами J и Γ рассмотрим семейства трансформаторов J_k и Γ_k, $k \geqslant 0$, задаваемых формулами

$$J_k X = Q_k X Q_k + \sum_{|i|>k} P_i X P_i,\ X \in \mathfrak{A}, \tag{14}$$

$$\Gamma_k X = \Gamma X - \Gamma(Q_k X Q_k) = \Gamma X - Q_k(\Gamma X) Q_k,\ X \in \mathfrak{A}. \tag{15}$$

Ясно, что $J_0 X = JX$, $\Gamma_0 X = \Gamma X$, $X \in \mathfrak{A}$.

Следствие 1. *Тройки* $(\mathrm{End}_1 \mathcal{H}, J_k, \Gamma_k)$, $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J_k, \Gamma_k)$ *являются допустимыми для оператора* A *тройками при любом* $k \geqslant 0$.

Доказательство. Так как операторы $J_k X$, $\Gamma_k X$, $k \geqslant 1$, отличаются от соответствующих операторов JX и ΓX на оператор конечного ранга, то все свойства, доказанные в лемме 1, остаются в силе. Более того,

$$\gamma_k = \big(\min_{|i|\leqslant k, |j|>k} |a(i) - a(j)|\big)^{-1} \leqslant d_k^{-1},\ k \geqslant 0. \tag{16}$$

Отметим, что $\gamma_0 = \gamma$, где величина γ была определена при доказательстве леммы 1. □

Напомним, что символом $\mathfrak{A}$ обозначено одно из следующих пространств: $\operatorname{End}_1 \mathcal{H}$ и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Из следствия 1 леммы 1 и теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Существует такое $k \geqslant 0$, что оператор $A - B$, $B \in \mathfrak{A}$, подобен оператору блочно-диагонального вида $A - J_k X_*$, и имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \Gamma_k X_*) = (I + \Gamma_k X_*)(A - J_k X_*),$$

где оператор $X_* \in \mathfrak{A}$ есть решение уравнения (10) с Γ_k и J_k, которые определены формулами (11), (12), (14), (15).

Заметим, что условие (9) теоремы 2 выполнено для достаточно большого k, так как $d_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и имеет место формула (16).

4. Доказательство теоремы 1

Представим оператор $\mathcal{E}$, задаваемый формулой (1) с областью определения (2) в виде $(\mathcal{E}x)(n) = (Ax)(n) - (Bx)(n)$, где $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}, D(A) = D(\mathcal{E})$, $B \in \operatorname{End} \mathcal{H}$,

$$(Ax)(n) = (a(n) + 2)x(n), \tag{17}$$

$$(Bx)(n) = x(n+1) + x(n-1). \tag{18}$$

Оператор B, являющийся возмущением оператора A, имеет две ненулевые диагонали: -1 и 1, т. е. $b_{ij} = 1$, при $|i - j| = 1$ и $b_{ij} = 0$ в остальных случаях.

Поскольку оператор B принадлежит алгебре $\operatorname{End}_1 \mathcal{H}$, то будет использоваться последовательность допустимых троек $(\operatorname{End}_1 \mathcal{H}, J_k, \Gamma_k), k \geqslant 0$, где J_k, Γ_k определяются формулами (14), (15). Применим к операторам A и B, задаными формулами (17) и (18), теорему 3 и получим, что справедлива

Лемма 2. *Существует такое $k \geqslant 0$, что оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, определенный формулой (1) с областью определения (2), подобен оператору блочно-диагонального вида $A - J_k X_*$, т. е. имеет место равенство*

$$\mathcal{E}(I + \Gamma_k X_*) = (I + \Gamma_k X_*)(A - J_k X_*),$$

где J_k и Γ_k определены формулами (11), (12), (14), (15), оператор A задается формулой (17) и X_* есть решение уравнения

$$X = B\Gamma_k X - (\Gamma_k X)J_k B - \Gamma_k X J_k (B\Gamma_k X) + B,$$

рассматриваемого в пространстве $\operatorname{End}_1 \mathcal{H}$.

Из подобия операторов $\mathcal{E} = A - B$ и $A - J_k X_*$ следует, что спектр оператора $\mathcal{E}$ (и $A - J_k X_*$) представляется в виде

$$\sigma(\mathcal{E}) = \sigma_{(k)} \cup \Big(\bigcup_{|j|>k} \sigma_j \Big),$$

где множество $\sigma_{(k)}$ содержит не более чем $2k+1$ собственных значений, $\sigma_{(k)} = \sigma((A - J_k X_*)|\mathcal{H}_{(k)})$, $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} Q_k$, $\sigma_j = \sigma(A_j)$, где $A_j = ((a(j)+2)I - P_j X_*)|\mathcal{H}_j$, $\mathcal{H}_j = \operatorname{Im} P_j$. Таким образом, для асимптотической оценки собственных значений оператора $\mathcal{E}$ нам нужен оператор $P_j X_* | \mathcal{H}_j$. Но нам известен не оператор X_*, а последовательные приближения к нему. Причем первым приближением является оператор B, вторым приближением является оператор

$$B\Gamma_k B - (\Gamma_k B)J_k B - (\Gamma_k B)J_k(B\Gamma_k B) + B,$$

и т. д. Представим оператор $P_j X_*|\mathcal{H}_j$, $|j|>k$, в виде $(P_jB+P_j(X_*-B))|\mathcal{H}_j$, при этом отметим, что $P_jB|\mathcal{H}_j=0$, $|j|>k$. Оценим норму оператора $P_j(X_*-B)|\mathcal{H}_j$, $|j|>k$, который представим в виде

$$P_j(X_*-B)|\mathcal{H}_j = P_j(B\Gamma_k X_*)|\mathcal{H}_j - P_j((\Gamma_k X_*)J_kB)|\mathcal{H}_j - P_j((\Gamma_k X_*)J_k(B\Gamma_k X_*))|\mathcal{H}_j.$$

Так как два последних оператора равны нулю, то

$$\|P_j(X_*-B)|\mathcal{H}_j\| = \|P_j(B\Gamma_k X_*)|\mathcal{H}_j\| = O(d_j^{-1}).$$

Таким образом, оценка (5) установлена. Оценка (6) получается аналогично, но в качестве X_* берем второе приближение к нему и учитываем, что

$$P_j(B\Gamma_k B)|\mathcal{H}_j = \left(\frac{1}{a(j-1)-a(j)} + \frac{1}{a(j+1)-a(j)}\right) I_j, \quad |j|>k.$$

Перейдем к рассмотрению собственных векторов. Опять же из подобия операторов $\mathcal{E}$ и $A-J_kX_*$ следует равенство

$$\widetilde{e}_i = (I+\Gamma_k X_*)e_i = e_i + (\Gamma_k B)e_i + (\Gamma_k(X_*-B))e_i, \quad |i|>k,$$

где $\widetilde{e}_i$ — собственный вектор оператора $A-B$, отвечающий собственному значению μ_i, определенному формулой (5). Вектор e_i — собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению $\widetilde{\lambda}_i = a(i)+2$, является вектором стандартного базиса $\{e_j, j\in\mathbb{Z}\}$ в пространстве $\mathcal{H}=l_2(\mathbb{Z})$. Так как $(\Gamma_kB)e_i$ есть i-ый столбец матрицы Γ_kB, то

$$(\Gamma_kB)e_i = \{0,\dots,0,\frac{1}{a(i)-a(i-1)},0,\frac{1}{a(i+1)-a(i)},0,\dots\}.$$

Введем вектор $\widetilde{y}_i$ в соответствие с формулой из теоремы 1. В связи с этим очевидно выполнение неравенства (7). Теорема доказана.

5. Оценки для проекторов

В этом параграфе исследования проводятся в условиях теорем 1 и 3. Символом $\widetilde{P}_i = P(\{\mu_i\},\mathcal{E})$ обозначим проектор Рисса (спектральный проектор), построенный по одноточечному спектральному множеству $\sigma_i=\{\mu_i\}$, $|i|>k$, оператора $\mathcal{E}$. Символом X_* обозначается решение нелинейного уравнения (10) (см. теорему 3). Далее используются обозначения из этих теорем.

Теорема 4. *Для спектральных проекторов $\widetilde{P}_i = P(\{\mu_i\},\mathcal{E})$, $|i|>k$, и $\widetilde{Q}_k = \sum\limits_{|i|\leqslant k}\widetilde{P}_i$ имеют место представления вида*

$$\widetilde{P}_i = P_iU^{-1} + (\Gamma X_*P_i)U^{-1}, \quad |i|>k, \tag{19}$$

$$\widetilde{Q}_k = Q_kU^{-1} + (\Gamma X_*Q_k)U^{-1}, \tag{20}$$

$$\widetilde{P}_i - P_i = (\Gamma_kX_*P_i - P_i\Gamma_kX_*)U^{-1}, \quad |i|>k, \tag{21}$$

$$\widetilde{Q}_k - Q_k = (\Gamma_kX_*Q_k - Q_k\Gamma_kX_*)U^{-1}, \tag{22}$$

причем

$$\|\widetilde{P}_i - P_i\|_\infty \leqslant \|\widetilde{P}_i - P_i\|_* \leqslant c_1\, d_i^{-1}, \quad |i|>k, \tag{23}$$

и

(24)
$$\Big\| \sum_{|i|\geqslant m}^{N} \widetilde{P}_i - \sum_{|i|\geqslant m}^{N} P_i \Big\|_\infty \leqslant \Big\| \sum_{|i|\geqslant m}^{N} \widetilde{P}_i - \sum_{|i|\geqslant m}^{N} P_i \Big\|_* \leqslant c_2 \big(\min_{\substack{|p|,|l|\geqslant m \\ p\neq l}} |a(p)-a(l)|^{-1} \big),\ m > k,$$

для некоторых постоянных $c_1, c_2 > 0$.

Доказательство. Из подобия операторов $A - B$ и $A - J_k X_*$ следует, что спектральные проекторы P_i, $|i| > k$, оператора A и спектральные проекторы $\widetilde{P}_i = P(\sigma_i, A - B), |i| > k$, связаны равенствами
$$\widetilde{P}_i = (I + \Gamma_k X_*) P_i (I + \Gamma_k X_*)^{-1},\ |i| > k.$$
Поэтому $\|\widetilde{P}_i - P_i\| \leqslant c_1 (\|\Gamma_k X_* P_i\| + \|P_i \Gamma_k X_*\|)$, $c_1 > 0$, откуда с учетом оценок каждого из слагаемых и получается (23). Так как проекторы $\sum\limits_{|i|\geqslant m}^{N} \widetilde{P}_i$, $\sum\limits_{|i|\geqslant m}^{N} P_i$ также подобны, то оценка (24) получается аналогично. Теорема доказана. □

Следствие 2. *В условиях теоремы 1 имеет место оценка*
$$\|\widetilde{P}_i - P_i - (\Gamma_k B) P_i + P_i (\Gamma_k B)\| \leqslant c_4\, d_i^{-2}, \quad |i| > k,\ c_4 > 0.$$

Из следствия 2 вытекает, что проекторы $\widetilde{P}_i$, $|i| > k$, удобно иногда приближать операторами, не являющимися проекторами.

Определение 3 ([24])**.** *Пусть* $C : D(C) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *— линейный оператор, спектр которого представим в виде объединения*

(25)
$$\sigma(C) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \sigma_j$$

взаимно непересекающихся компактных подмножеств из $\sigma(C)$, $j \in \mathbb{Z}$, *и* P_j *— проектор Рисса, построенный по множеству* σ_j. *Оператор* C *называется спектральным относительно разложения (25) или обобщенно спектральным, если ряд* $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} P_j x$ *сходится для любого вектора* $x \in \mathcal{H}$. *Если* $\sigma_j = \{\lambda_j\}$ *— одноточечные множества, а проекторы* P_j, $j \in \mathbb{Z}$, *обладают свойством* $CP_j = \lambda_j P_j$, $j \in \mathbb{Z}$, *то оператор* C *является спектральным по Данфорду. Причем* C *является оператором скалярного типа, если* $CP_j = \lambda_j P_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Следствие 3. *Оператор* $\mathcal{E}$ *является спектральным относительно разложения (4).*

6. Оценки собственных значений и проекторов для случая $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$

Всюду в этом параграфе считается выполненным более сильное, чем (3) условие

(26)
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} d_i^{-2} < \infty.$$

Оно позволяет заключить, что после предварительного преобразования подобия оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \in \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ подобен оператору $A - B_0 : D(\mathcal{E}) \in \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, где B_0 элемент идеала Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тем самым возникает возможность рассмотрения тройки $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J, \Gamma)$ и использование того факта, что

$\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — гильбертово пространство. Более того, в этом случае можно улучшить результаты теорем 1 и 4.

Так как возмущение B не принадлежит пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то вначале делается предварительное преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$, где $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Такое преобразование возможно в условиях следующего предположения.

Предположение 1 ([13]). *Операторы $\Gamma_l B$, $J_l B$, B удовлетворяют условиям:*

1) $\Gamma_l B \in \mathrm{End}_1 \mathcal{H} \subset \mathrm{End}\, \mathcal{H}$, $\|\Gamma_l B\|_* < 1$;

2) $B\Gamma_l B$, $(\Gamma_l B)J_l B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;

3) $A(\Gamma_l B)x - (\Gamma_l B)Ax = Bx - (J_l B)x$, $x \in D(A)$;

4) для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|B(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty < \varepsilon$.

Заметим, что так как $B \in \mathrm{End}_1 \mathcal{H}$, то операторы $\Gamma_l B$ и $J_l B$ определены в предыдущем параграфе.

Теорема 5 ([13]). *При выполнении условий предположения 1 оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_l B - B_0$, где $B_0 = (I + \Gamma_l B)^{-1}(B\Gamma_l B - (\Gamma_l B)J_l B)$, т. е.*

$$(A - B)(I + \Gamma_l B) = (I + \Gamma_l B)(A - J_l B - B_0).$$

Лемма 3. *Существует такое число l, что для операторов $\Gamma_l B$, $J_l B$, B выполнены условия предположения 1.*

Доказательство. В предыдущем параграфе доказано выполнение условия 1). Покажем сначала, что ΓB, $B\Gamma B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ (так как $JB = 0$, то $(\Gamma B)JB = 0$). Действительно, из определения элементов матрицы ΓB следует, что

$$\|\Gamma B\|_2^2 = \|(\Gamma B)_{-1}\|_2^2 + \|(\Gamma B)_1\|_2^2 \leqslant \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|a(i+1) - a(i)|^2} + \\ + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|a(i) - a(i-1)|^2} \leqslant 2\sum_i d_i^{-2} < \infty;$$

$$\|B\Gamma B\|_2^2 = \|(B\Gamma B)_{-2}\|_2^2 + \|(B\Gamma B)_0\|_2^2 + \|(B\Gamma B)_2\|_2^2 \leqslant \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Bigg(\frac{1}{|a(i+1) - a(i)|^2} + \\ + \left(\frac{1}{|a(i+1) - a(i)|} + \frac{1}{|a(i-1) - a(i)|} \right)^2 + \frac{1}{|a(i-1) - a(i)|^2} \Bigg) \leqslant 4\sum_{i\in\mathbb{Z}} d_i^{-2} < \infty.$$

Операторы $\Gamma_l B$, $B\Gamma_l B$, $(\Gamma_l B)J_l B$ отличаются от рассмотренных выше на оператор конечного ранга, поэтому они также являются элементами пространства $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Условие 3) выполняется по построению, а проверка условия 4) аналогична проверке такого же условия в §3. Лемма доказана. □

Следствие 4. *Существует такое число $l > 0$, что оператор $A - B$ подобен оператору*

$$A - B_0 = A - (I + \Gamma_l B)^{-1}(B\Gamma_l B - (\Gamma_l B)J_l B - Q_l B Q_l).$$

Оператором преобразования оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$ является оператор $I + \Gamma_l B$.

Теперь в качестве невозмущенного оператора мы будем использовать оператор A, а в качестве возмущения — оператор $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Применим к оператору $A - B_0$ теорему 3 и получим, что имеет место

Лемма 4. *Пусть имеют место условия (3) и (26). Тогда существуют такие числа $k, l > 0$, что оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \in \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, задаваемый формулой (1) с областью определения (2), подобен оператору $A - J_k X_*$, где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (10) с возмущением B_0 из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. При этом J_k и Γ_k определены формулами (14), (15). Оператором преобразования оператора $\mathcal{E}$ в оператор $A - J_k X_*$ служит оператор*

$$U_1 = (I + \Gamma_l B)(I + \Gamma_k X_*) = I + Y_{lk},$$

где $Y_{lk} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), U_1 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие (26). Тогда существуют такие числа l и $k \geqslant l$, что спектр $\sigma(\mathcal{E})$ оператора $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \in \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ представим в виде (4). При этом для $i \in \mathbb{Z}$, $|i| > k$, имеют место асимптотические представления и оценки собственных значений, собственных векторов и проекторов оператора $\mathcal{E}$:*

$$\mu_i = a(i) + 2 + \alpha_i, \quad \{\alpha_i\} \in l_2, \tag{27}$$

$$\mu_i = a(i) + 2 + \frac{a(i+1) - 2a(i) + a(i-1)}{(a(i+1) - a(i))(a(i-1) - a(i))} + \beta_i, \quad \{\beta_i\} \in l_1, \tag{28}$$

$$\|\widetilde{e}_i - y_i\| = \frac{\delta_i}{d_i}, \quad \{\delta_i\} \in l_2,$$

$$\|\widetilde{P}_i - P_i\|_2 = \kappa_i, \quad \{\kappa_i\} \in l_2, \tag{29}$$

$$\Bigg\| \sum_{|i| \geqslant m_0}^{N} \widetilde{P}_i - \sum_{|i| \geqslant m_0}^{N} P_i \Bigg\|_2 \leqslant c_5\, d_i^{-1}, \quad m_0 > k, \tag{30}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \|\widetilde{P}_i - P_i\|_2^2 < \infty, \tag{31}$$

где $c_5 > 0$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Очевидно, что $P_i B_0 | \mathcal{H}_i = T_i | \mathcal{H}_i$, где

$$T_i = P_i(B\Gamma_l B) + P_i\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (\Gamma_l B)^j\Bigg)(B\Gamma_l B - (\Gamma_l B) J_l B) = P_i(B\Gamma_l B) + P_i C,$$

при этом $B\Gamma_l B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $C = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (-1)^j (\Gamma_l B)^j (B\Gamma_l B - (\Gamma_l B) J_l B) \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Следовательно, формулы (27) и (28) имеют место.

Собственный вектор $\widetilde{e}_i$ оператора $\mathcal{E}$ теперь выражается формулой

$$\widetilde{e}_i = (I + Y_{lk}) e_i = e_i + (\Gamma_l B) e_i + (\Gamma_k X_*) e_i + (\Gamma_l B)(\Gamma_k X_*) e_i,$$

где $\Gamma_k X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\|(\Gamma_k X_*) e_i\|_2 \leqslant \delta_i d_i^{-1}$, $\delta_i \in l_2$.

Оценки (29) – (31) получаются аналогично оценкам теоремы 4 с учетом того, что операторы $\Gamma_k X_*$, $\Gamma_l B$ и U_1 принадлежат пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. $\square$

7. Оценки элементов матрицы оператора $\mathcal{E}^{-1}$ и коэффициентов Фурье собственных векторов оператора $\mathcal{E}$

В этом параграфе всюду считается, что оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является самосопряженным и выполняется условие

$$a(n) \geqslant \varepsilon > 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{32}$$

Исследования в §7, ведутся в русле исследований, проводимых в статьях [4], [5], [24-27], и знаменитая теорема Н. Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье [28], распространялась на ограниченные операторы, действующие в банаховых пространствах. Также отметим, что результаты из цитированных выше работ [4,5, 24-27] существенным образом улучшают соответствующие результаты из [29]. Мы будем опираться на работу [5].

Для оценок коэффициентов Фурье собственных векторов оператора $\mathcal{E}$ используются результаты из [5]. Для операторов, имеющих трехдиагональную матрицу, сначала докажем теорему, аналогичную теореме 10 из [5], и на ее основе получим оценку типа оценки (28) из [5].

Приведем вначале без доказательства результаты из [5], на которые будем опираться.

Пусть X, Y — гильбертовы пространства, $A : X \to Y$, $A_{ij} = Q_i A P_j$, $A \sim (A_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, где (P_k) и (Q_k) — две дизъюнктные последовательности проекторов в X и Y соответственно. Пусть также оператор A обратим и $A^{-1} = B$.

Теорема 7 ([5]). *Для норм элементов матрицы (B_{ij}) оператора $B = A^{-1}$ имеют место оценки:*

$$\|B_{ij}\| \leqslant 2\|A^{-1}\| \left(\frac{4\kappa(A)}{1 + 4\kappa(A)} \right)^{|i-j|}, \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

$$\|B_{ii}\| \leqslant \|A^{-1}\|, \quad i \in \mathbb{Z},$$

где $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ — число обусловленности оператора A.

Символом $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов, определенных на X со значениями в Y, а символом $\mathrm{Hom}_0(X, Y)$ — линейное подпространство операторов из $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$, для которых имеют место оценки

$$\sup_{|i-j|=k} |C_{ij}| < M\nu^{|k|}, \quad C = (C_{ij}) \in \mathrm{Hom}_0\,(X, Y),$$

для некоторых постоянных $M = M(C) > 0$ и $\nu = \nu(C) \in (0, 1)$.

Из теоремы 7 следует, что оператор $B = A^{-1} \in \mathrm{Hom}_0\,(Y, X)$ и оператор $AR(\alpha, A) \in \mathrm{Hom}_0\,(Y, Y)$ для любого $\alpha \in \rho(A)$. Из теоремы 1 из [5] следует, что обратный к любому оператору из $\mathrm{Hom}_0\,(X, Y)$ также принадлежит $H_0(Y, X)$.

Заметим также, что согласно [7] матрицы класса $\mathrm{Hom}_0\,(X, Y)$ относятся к псевдоразреженным матрицам с экспоненциальным убыванием.

Пусть теперь $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный оператор и $D(A)$ рассматривается как гильбертово пространство со своим скалярным произведением. Пусть (e_n) и (f_n) — ортонормированные базисы в $D(A)$ и $\mathcal{H}$ соответственно, относительно которых матрица $A = (a_{ij}) = (Ae_j, f_i)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет условию $a_{ij} \neq 0$ при $|i - j| \leqslant 1$; и $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$.

Теорема 8. *Пусть* λ_0 *— простое изолированное собственное значение оператора* A, $g \in D(A)$, $h \in D(A^*)$ *— собственные векторы, отвечающие оператору* A *и его сопряженному* A^* *и собственным значениям* λ_0, $\bar{\lambda}_0$ *соответственно, причем* $(g,h) = 1$. *Тогда имеют место оценки*

$$|(g, f_i)(f_j, h)| \leqslant C\nu^{|i-j|}, \tag{33}$$

где $0 < \nu < 1$, $i, j \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Тогда оператор $B = AR(\alpha, A)$ ограничен и вектор a является собственным вектором для оператора B, отвечающий собственному значению $\lambda_* = \lambda_0(\alpha - \lambda_0)^{-1}$. Пусть $P = P(\{\lambda_*\}, B)$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\{\lambda_*\}$ оператора B, $Px = (x,h)g$ и $BP = \lambda_* P$. Проектор P представим в виде

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int R(\lambda, B)\,\mathrm{d}\lambda,$$

где $S(\lambda_*, r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_*| = r\}$ и $0 < r < \operatorname{dist}(\lambda_*, \sigma(B) \setminus \{\lambda_*\})$. Поскольку оператор A трехдиагональный, то $B = AR(\alpha, A) \in \mathrm{Hom}_0\,(Y,Y)$, $B^{-1} \in \mathrm{Hom}_0\,(Y,Y)$. Поэтому оператор P также имеет экспоненциальное убывание элементов и его матричные элементы $p_{ij} = (Pf_j, f_i) = (f_j, h)(g, f_i)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, допускают оценку (33). Теорема доказана. □

Вернемся к рассмотрению оператора $\mathcal{E}$, определенному формулой (1) с областью определения (2). Напомним, что в этом параграфе оператор $\mathcal{E}_0 : D(\mathcal{E}) \to l_2(\mathbb{Z})$, $(\mathcal{E}_0 x)(n) = a(n)x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l_2(\mathbb{Z})$, является самосопряженным оператором (а, значит, $\mathcal{E}$ тоже самосопряжен) и выполнено условие (32).

Перейдем к оценке нормы оператора $\mathcal{E}^{-1} : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$. На области определения $D(\mathcal{E})$ введем скалярное произведение формулой:

$$(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a^2(n) x(n) \overline{y(n)}.$$

Тогда порожденная им норма имеет вид

$$\|x\|_a = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a^2(n) |x(n)| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, область определения $D(\mathcal{E})$ оператора $\mathcal{E}$ стала гильбертовым весовым пространством последовательностей, которые обозначим через $l_{2,a}(\mathbb{Z})$. Так как

$$\|\mathcal{E}_0\| = \sup_{\|x\|_a \leqslant 1} \|\mathcal{E}_0 x\| = \sup_{\|x\|_a \leqslant 1} \left(\sum_n a^2(n) |x(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

то $\mathcal{E}_0$ является изометрическим изоморфизмом.

Посчитаем норму оператора $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$, где

$$(\mathcal{E}_1 x)(n) = 2x(n) - x(n-1) - x(n+1).$$

Имеют место равенства

$$\|\mathcal{E}_1\| \leqslant \sup_{\|x\|_a=1}\left(\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}4|x(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|x(n-1)|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|x(n-1)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|_a=1}\left[2\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{a^2(n)|x(n)|^2}{a^2(n)}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{a^2(n-1)|x(n-1)|^2}{a^2(n-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{a^2(n+1)|x(n+1)|^2}{a^2(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\leqslant\frac{4}{\varepsilon},$$

где число $\varepsilon > 0$ определено условием (32). Таким образом, норма оператора $\mathcal{E}$ как оператора, действующего из $l_{2,a}(\mathbb{Z})$ в $l_2(\mathbb{Z})$ ограничена и не превосходит $4\varepsilon^{-1}$. Оператор $\mathcal{E}$ является обратимым оператором и норма оператора $\mathcal{E}^{-1}$: $l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ легко считается. Посчитаем ее. Заметим, что оператор $\mathcal{E}$ есть сумма оператора сдвига $S(1)$, где $S(l)x(n) = x(n+l), l \in (Z)$, обратного к нему $S^{-1}(1) = S(-1)$ и оператора $2I$. Так как спектр оператора сдвига состоит из точек единичной окружности, то $\sigma(\mathcal{E}_1) = \{2 - e^{i\lambda} - e^{-i\lambda},\ \lambda \in [0, 2\pi]\} = \{2 - 2\cos\lambda, \lambda \in [0, 2\pi]\}$ и $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset [0, 4]$. Очевидно, что $\sigma(\mathcal{E}_0) \subset [\varepsilon, \infty)$. Следовательно, $\sigma(\mathcal{E}) \subset [\varepsilon, \infty)$. По теореме об отображении спектра [30] получаем, что $\sigma(\mathcal{E}^{-1}) \subset (0, \varepsilon^{-1}]$. Так как норма оператора в $\operatorname{End}\mathcal{H}$ не превосходит его спектрального радиуса, то $\|\mathcal{E}^{-1}\|_\infty < \varepsilon^{-1}$. Таким образом, доказана

Теорема 9. *Пусть оператор $\mathcal{E}$ самосопряжен и выполнено условие (32). Тогда для оператора $\mathcal{E}^{-1} : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ имеет место оценка*

$$\|\mathcal{E}^{-1}\| < \varepsilon^{-1}.$$

Теперь применим теорему 7 к оператору $\mathcal{E}$. Имеет место

Теорема 10. *Пусть оператор $\mathcal{E}$ самосопряжен и выполнено условие (32). Оператор $\mathcal{E}^{-1}$ принадлежит линейному пространству $\mathrm{Hom}_0\,(l_{2,\alpha}(\mathbb{Z}), l_2(\mathbb{Z}))$, т. е. для модулей элементов $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, его обратной матрицы имеют место оценки*

$$|\widetilde{\varepsilon}_{ij}| \leqslant M\gamma^{|i-j|},$$

где $M > 0$ — константа и $0 < \gamma < 1$.

Из теорем 8 и 10 вытекает

Теорема 11. *Коэффициенты Фурье $\widehat{\varepsilon}(m), m \in \mathbb{Z}$, любого собственного вектора $\widetilde{e}$ самосопряженного оператора $\mathcal{E}$ такого, что выполнено условие (32), допускают оценку вида*

$$|\widehat{\varepsilon}(n)\widehat{\varepsilon}(m)| \leqslant C\gamma^{|n-m|}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad C > 0, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Экспоненциальное убывание элементов матрицы обратного оператора можно вывести из статьи [29]. Оценки же теоремы 11 не выводятся из указанной статьи.

References

[1] B. Musilimov, M. Otelbaev, *Estimation of the least eigenvalues to the matrix class corresponding to the Sturm-Liouville difference operators*, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, **21**:1 (1981), 68–83. MR0644123

[2] M. Otelbaev, *Coercive estimates for the solution of the difference equation*, Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, **181** (1989), 265–274. Zbl 0692.39004

[3] A.G. Kostyuchenko, I.S. Sargsyan, *Distribution of eigenvalues (self-adjoint ordinary differential operators)*, Mosckow, Nauka, 1970 [in Russian].

[4] M.A. Naimark, *Linear differential operators. Volume II*, New York, 1968. Zbl 0227.34020

[5] A.G. Baskakov, *Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators*, Izvestiya: Mathematics, **61**:6 (1997), 1113–1135. MR1609144

[6] A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, *Memory estimation of inverse operators*, J. Funct. Anal., **267**:8 (2014), 2551–2605. MR3255468

[7] I.A. Blatov, *On algebras and applications of operators with pseudosparse matrices*, Siberian Math. Journal, **37**:1 (1996), 32–52, Zbl. 0874. 65034.

[8] I.Ts. Gohberg, M.G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969. MR0246142

[9] A.G. Baskakov, *Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators*, Siberian Math. Journal, **24**:1 (1983), 17–32. MR0688589

[10] A.G. Baskakov, *A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **28**:3 (1987), 421–444. Zbl. 0636.47019.

[11] A.G. Baskakov, *Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators*, Izvestiya: Mathematics, **45**:1 (1995), 1–31. Zbl. 0851.47024.

[12] A.G. Baskakov, *Spectral analysis with respect to finite-dimensional perturbations of spectral operators*, Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **35**:1 (1991), 1–11. Zbl. 0759.47011.

[13] A.G. Baskakov, A.V. Derbushev, A.O. Shcherbakov, *The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials*, Izvestiya: Mathematics, **75**:3 (2011), 445–469. Zbl. 1219.47024.

[14] N.B. Uskova, *On a result of R. Terner*, Mathematical Notes, **76**:6 (2004), 844–854. Zbl. 1081.47014.

[15] N.B. Uskova, *On the method of similar operators in Banach algebras*, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **49**:3 (2005), 75–81. Zbl. 1131.46034.

[16] G.V. Garkavenko, *On diagonalization of certain classes of linear operators*, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **38**:11 (1994), 11–16. Zbl. 0867.47029.

[17] A.G. Baskakov, *Estimates for the Green's function and parameters of exponential dichotomy of a hyperbolic operator semigroup and linear relations*, Sbornik: Mathematics, **206**:8 (2015), 1049–1086. Zbl. 06513857.

[18] N.B. Uskova, *On spectral properties of second order differential operator with matrix potential*, Differential Equations, **52**:5 (2016), 557–567. MR3541452

[19] N.B. Uskova, *On spectral properties of second order differential operator with matrix potential*, Ufa Math. Journal, **7**:3 (2015), 88–99. MR3430694

[20] D.M. Polyakov, *Spectral analysis of a fourth-order nonselfadjoint operator with nonsmooth coefficients*, Siberian Mathematical Journal, **56**:1 (2015), 138–154. Zbl. 06455461.

[21] A.G. Baskakov, D.M. Polyakov, *Spectral Properties of the Hill Operator*, Mathematical Notes, **99**:4 (2016), 598–602. MR3507425

[22] A.O. Shcherbakov, *Regularized Trace of the Dirac Operator*, Mathematical Notes, **98**:1 (2015), 168–179. MR3399164

[23] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill book, 1973. MR0365062

[24] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear operators. Spectral operators. Part III*, Pure and Applied Mathematics. VII, Wiley-Interscience, New York, 1971. MR0412888

[25] A.G. Baskakov, *Wiener's theorem and the asymptotic estimates of the elements of inverse matrices*, Functional Analysis and Its Applications, **24**:3 (1990), 222–224. Zbl. 0728.47021

[26] A.G. Baskakov, *Abstract harmonic analysis and asymptotic estimates of elements of inverse matrices*, Mathematical Notes, **52**:2 (1992), 764–771. Zbl. 0805.43002.

[27] A.G. Baskakov, *Asymptotic estimates for elements of matrices of inverse operators, and harmonic analysis*, Siberian Mathematical Journal, **38**:1 (1997), 10–22. Zbl. 0870.43003.
[28] J.-P. Kahane, *Series de Fourier absolument convergence*, New York, 1970. MR0275043
[29] M.A. Shubin, *Pseudodifference operators and their Green's function*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **26**:3 (1986), 605–622. Zbl. 0595.39008 / 0574.39006.
[30] A.G. Baskakov, *Haromic analysis of linear operators*, Voronezh University Press, Voronezh, 1987 (in Russian). MR1607000

Galina Valerievna Garkavenko
Voronezh State Pedagogical University,
Lenina st., 86,
394043, Voronezh, Russia
E-mail address: g.garkavenko@mail.ru

Natalia Borisovna Uskova
Voronezh State Technical University,
Moskovsky pr., 14,
394026, Voronezh, Russia
E-mail address: nat-uskova@mail.ru