

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 14, стр. 703–709 (2017)

УДК 519.172.3

DOI 10.17377/semi.2017.14.060

MSC 05C20

ОРИЕНТАЦИОННЫЕ СПЕКТРЫ КУБИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Т.Е. КИРЕЕВА

ABSTRACT. Orientation spectrum of oriented graph is distribution of number of vertices by indegree. In this article we obtained complete description of all orientation spectra of connected cubic graph in terms of extremal pairs of disjoint independent sets.

Keywords: cubic graph, directed graph.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интенсивные исследования совершенных раскрасок графов [1, 2, 4, 6], ведущиеся в последнее время, имеют целью изучение понятия гомоморфизма в широком смысле этого слова [3]. Попытки перенесения результатов из данной области на случай ориентированных графов сталкиваются с рядом сложностей, аналогичных тем, которые встречаются в тематике правильных ориентированных раскрасок [5]. В частности, не всегда нужные естественные определения могут быть даны однозначно. Что касается ориентированных совершенных раскрасок, то одно кажется несомненным – при гомоморфизмах вершина и ее образ должны иметь одинаковые полустепени исхода (что для однородных графов влечет и совпадение полустепеней захода). Кажется логичным начать изучение данной темы со случая кубических графов и их произвольных ориентаций. Нас интересует вопрос, какие в принципе могут быть распределения полустепеней исхода в произвольной ориентации какого-либо фиксированного графа? Несмотря на простоту формулировки, этот вопрос оказался нетривиальным даже для однородных графов степени три.

KIREEVA, T.E., ORIENTATION SPECTRA OF CUBIC GRAPHS.

© 2017 КИРЕЕВА Т.Е.

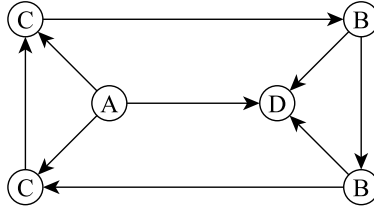
Работа поддержана РФФ (грант 16-11-10054).

Поступила 31 октября 2016 г., опубликована 26 июля 2017 г.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть G — произвольный кубический граф. *Ориентацией* графа G называется приписывание ориентации каждому его ребру. Обозначим через G' граф G с заданной на нем ориентацией. *Ориентационным спектром* орграфа G' назовем упорядоченный набор (a_0, a_1, a_2, a_3) , где компонента a_i соответствует количеству вершин в графе G' с i входящими дугами. Легко понять, что замена ориентации на противоположную меняет спектр (a_0, a_1, a_2, a_3) на (a_3, a_2, a_1, a_0) , поэтому в дальнейшем будем рассматривать лишь те спектры, в которых $a_0 \geq a_3$.

Для удобства будем обозначать компоненты спектра буквами (a, b, c, d) . Множество вершин графа разобьем на подмножества A, B, C, D , в соответствии с числом входящих дуг. Если вершина графа принадлежит подмножеству $F \in \{A, B, C, D\}$, то будем говорить, что эта вершина соответствует типу F . Заметим, что подмножества A и D являются независимыми в G .

Рис. 1. Спектр $(1, 2, 2, 1)$

На рис. 1 изображен ориентированный граф три-призмы. Его ориентационный спектр равен $(1, 2, 2, 1)$.

Выведем несколько условий, которым удовлетворяет спектр произвольного ориентированного кубического графа G .

Все компоненты спектра — это неотрицательные целые числа, то есть

$$a, b, c, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Сумма компонент спектра равна количеству вершин графа:

$$(1) \quad a + b + c + d = n.$$

В любом ориентированном кубическом графе общее число всех входящих дуг равно числу всех исходящих дуг, значит, $3a + 2b + c = 3d + 2c + b$. Отсюда получаем

$$(2) \quad 3a + b = c + 3d.$$

Никакие две вершины типа A не могут быть смежными, следовательно,

$$a \leq \alpha(G),$$

где $\alpha(G)$ есть размер наибольшего независимого множества графа G .

Из первых двух равенств, исключив c и b , с учетом условия $a \geq d$ можно получить неравенство, связывающее a и d :

$$(3) \quad 2a - \frac{n}{2} \leq d \leq a.$$

Заметим, что в силу (1) и (2) пара (a, d) однозначно задает весь спектр (a, b, c, d) .

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Пару чисел (a, d) назовем *допустимой* для графа G , если существует ориентация графа G , имеющая спектр (a, b, c, d) . Соответствующую ориентацию мы будем называть (a, d) -ориентацией графа G .

Пару чисел (a, d) назовем *экстремальной* для графа G , если:

1. $a \geq d$;
2. В графе G есть пара непересекающихся независимых множеств мощностей a и d соответственно;
3. Каждая из пар $(a, d+1)$ и $(a+1, d)$ не обладает по крайней мере одним из свойств 1 и 2, приведенных выше.

Заметим, что если пара (a, d) экстремальна для графа G , то можно построить ориентацию, реализующую спектр (a, b, c, d) , где b и c определяются из построения ориентации. Действительно, ребра, инцидентные вершинам независимого множества мощности a , ориентируем так, чтобы они были исходящими для вершин этого множества, а ребра, инцидентные вершинам независимого множества мощности d , так, чтобы они были входящими. Остальные ребра ориентируем произвольно. Если в случае такой ориентации возникли новые вершины типа A или D , то пара (a, d) не была экстремальной.

Будем говорить, что пара (a', d') *мажорирует* пару (a, d) , если $a' \geq a$ и $d' \geq d$.

Мы собираемся доказать, что всякая пара (a, d) , мажорируемая какой-либо экстремальной парой и удовлетворяющая условию (3), является допустимой, а именно, верна следующая теорема:

Теорема 1. Пусть G — связный кубический граф. Пара чисел (a, d) таких, что $a, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a \geq d$, допустима для графа G , если и только если выполнены следующие условия:

1. Существует экстремальная пара (a', d') , мажорирующая (a, d) ;
2. $2a - \frac{n}{2} \leq d$.

Для доказательства теоремы необходимо сначала доказать несколько лемм.

Лемма 1. Если пара (a, d) допустима для связного кубического графа G , и $a > d \geq 0$, то пара $(a-1, d)$ также допустима для графа G .

Доказательство.

Рассмотрим произвольную (a, d) -ориентацию графа G . Назовем вершину $x \notin A$ *достижимой*, если существует ориентированный путь из A в x , все промежуточные вершины которого (если они есть) принадлежат B . Если в G есть достижимая вершина $c \in C$, то инвертирование ребер соответствующего (A, c) -пути приводит к нужному результату. Пусть в G нет достижимых вершин типа C . Обозначим множества достижимых вершин типа B и D через B_1 и D_1 соответственно. Так как для вершин множества $A \cup B_1$ сумма их полустепеней исхода равна $3a + 2|B_1|$, а сумма полустепеней захода равна $|B_1|$, то в G имеется не менее $(3a + 2|B_1|) - |B_1| \geq 3a$ дуг, ведущих из $A \cup B_1$ в D_1 . Отсюда следует неравенство $d \geq d_1 \geq 3a : 3 = a$, которое противоречит условию $a > d$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если пара (a, d) допустима для связного кубического графа G , и $d > \max(0, 2a - \frac{n}{2})$, то пара $(a, d-1)$ также допустима для графа G .

Доказательство.

В каждой (a, d) -ориентации графа G найдется вершина типа B , так как если $b = 0$, то $d = 2a - \frac{n}{2}$, что противоречит условию леммы.

Рассмотрим в G простую цепь (без учета ориентации ребер) между двумя произвольными вершинами. Назовем вершину типа C транзитивной для цепи, если она в цепи имеет одно входящее и одно исходящее ребро, и нетранзитивной, если она в цепи имеет два входящих ребра. Будем обозначать множества транзитивных и нетранзитивных вершин типа C через C_t и C_n соответственно.

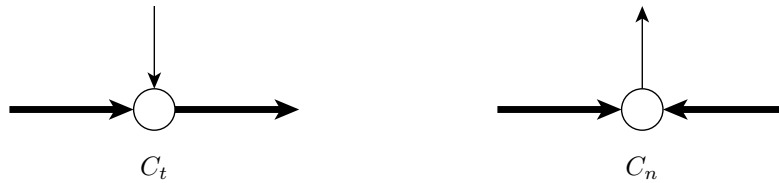


Рис. 2

Рассмотрим произвольную (a, d) -ориентацию, и среди всех неориентированных цепей, соединяющих вершины типа B и вершины типа D , выберем цепь p минимальной длины. Очевидно, что p не содержит других вершин типа B и типа D . Так как направление дуг цепи может меняться только в вершинах типа A или нетранзитивных вершинах типа C , то между парой соседних вершин типа A находится ровно одна вершина типа C_n . Ближайшей к B вершиной не из C_t может быть вершина типа A , если дуга при B — входящая, либо вершина типа C_n или типа D , если дуга при B — исходящая. Ближайшей к D вершиной не из C_t может быть либо вершина типа A , либо вершина типа B .

При инвертировании всех дуг цепи от D до B тип вершин C_t не изменится, вершина типа D и вершины типа A станут вершинами типа C , вершины типа C_n — вершинами типа A . Изменение вершины типа B зависит от типа ближайшей к ней вершины не из C_t : если это A , то B станет вершиной типа A , а если это C_n или D , то B станет вершиной типа C . В обоих случаях параметр a не изменится, а d уменьшится на единицу. Лемма доказана.

Лемма 3. Если пара (a, d) допустима для связного кубического графа G , и $a \geq d > 0$, то пара $(a - 1, d - 1)$ также допустима для графа G .

Доказательство.

Среди всех (a, d) -ориентаций графа G выберем такую, при которой длина кратчайшей (A, D) -цепи минимальна (где цепь рассматривается без учета ориентации ребер). Если вершина типа A смежна с вершиной типа D (цепь состоит из одного ребра), либо на цепи вершина A смежна с C , а D смежна с B , то инвертирование, в первом случае, дуги AD , во втором, дуг AC и BD приведет к уменьшению параметров a и d на единицу. В иных случаях вершина типа A смежна с вершиной типа B или вершина типа D смежна с вершиной типа C . В этой ситуации инвертирование дуг AB и CD , соответственно, приводит к уменьшению длины (A, D) -цепи на единицу, что противоречит ее минимальности. Лемма доказана.

Лемма 4. Если пара (a, d) допустима для связного кубического графа G , и $a \geq d \geq 2$, то пара $(a - 1, d - 2)$ также допустима для графа G .

Доказательство.

Рассмотрим произвольную (a, d) -ориентацию графа G . Если эта ориентация содержит вершину типа B , то применив по одному разу леммы 2 и 3, получим $(a - 1, d - 2)$ -ориентацию.

Если $b = 0$, то выберем минимальную цепь (без учета ориентации ребер), соединяющую две вершины типа D . Внутри этой цепи располагаются только вершины типа A и типа C , причем между двумя соседними вершинами типа A есть ровно одна вершина типа C_n . Значит, если в цепи имеется ровно k вершин типа A , то число вершин типа C_n в цепи равно $k - 1$. При инвертировании всей цепи вершина типа A станет вершиной типа C , а вершина типа C_n — вершиной типа A , что приведет к $(a - 1, d - 2)$ -ориентации. Лемма доказана.

Доказательство теоремы.

« \Rightarrow » Условие 1 выполняется, так как для любой (a, d) -ориентации графа G пара независимых множеств A, D дополняется до некоторой экстремальной пары A', D' . Следовательно, допустимая пара чисел (a, d) мажорируется экстремальной парой (a', d') .

Неравенство $2a - \frac{n}{2} \leq d$ получено выше из (1) и (2).

« \Leftarrow » Рассмотрим произвольную (a', d') -ориентацию графа G . Применяя вышеприведенные леммы, получим ориентацию, реализующую пару (a, d) . При этом будем действовать следующим образом.

Обозначим число $a' - a$ через δ_a , а $d' - d$ через δ_d . Возможны три случая.

Если $\delta_a = \delta_d = \delta$, то применим δ раз лемму 3.

Если $\delta_a > \delta_d$, то применим $\delta_a - \delta_d$ раз лемму 1 и δ_d раз лемму 3.

Если $\delta_a < \delta_d$, то дополнительно рассмотрим еще три случая.

1. $\delta_d = 2\delta_a$: применим δ_a раз лемму 4.

2. $\delta_d < 2\delta_a$: если δ_d четно, то применим $\frac{\delta_d}{2}$ раз лемму 4 и $\delta_a - \frac{\delta_d}{2}$ раз лемму 1; если δ_d нечетно, то $\frac{\delta_d - 1}{2}$ раз лемму 4, один раз лемму 3 и $\delta_a - \frac{\delta_d - 1}{2} - 1$ раз лемму 1.

3. $\delta_d > 2\delta_a$: применим $\delta_d - 2\delta_a$ раз лемму 2 и δ_a раз лемму 4.

Теорема доказана.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В теореме 1 использовалось понятие экстремальной пары непересекающихся независимых множеств графа, ни одно из которых нельзя увеличить без уменьшения второго. В графе Фрухта (см. рис.3) экстремальная пара единственна и равна (5,4). На рисунке вершины первого независимого множества изображены черным цветом, а второго - серым.

Разорвав одно ребро во внешнем цикле данного графа и соединив k копий полученного графа по циклу, мы получим обобщенный граф Фрухта, в котором разница внутри экстремальной пары и количество экстремальных пар растут с ростом k . На рис.4 приведен пример графа, составленного из двух копий графа Фрухта. Он имеет две экстремальные пары, равные (10,8) и (9,9). В

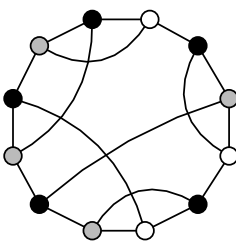
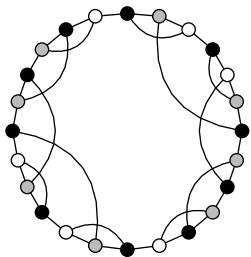
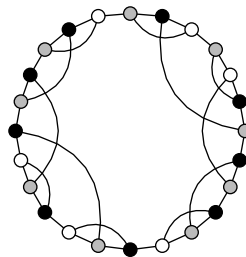


Рис. 3. Граф Фрухта

графе, состоящем из k копий графа Фрухта, экстремальными парами будут: $(5k, 4k), (5k - 1, 4k + 1), \dots, (5k - \lfloor k/2 \rfloor, 4k + \lfloor k/2 \rfloor)$, их число равно $\lfloor k/2 \rfloor + 1$.



a)



b)

Рис. 4. Экстремальные пары дублированного графа Фрухта

Автор благодарен своему научному руководителю Августиновичу С. В. за полезные обсуждения и советы при написании данной работы. Также автор благодарит Глебова А.Н. за ценные замечания.

REFERENCES

- [1] S. V. Avgustinovich, A. Yu. Vasil'eva, I. V. Sergeeva, *Distance regular colorings of the infinite rectangular grid*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:3 (2011), 3–10. MR2883263
- [2] S. V. Avgustinovich, M. A. Lisitsyna, *Perfect 2-colorings of transitive cubic graphs*, J. Appl. Industr. Math., **5**:4 (2011), 519–528. MR2841697
- [3] D.M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Application*, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980. MR0572262
- [4] M.A. Lisitsyna, S.V. Avgustinovich, *Perfect colorings of the prism graph*, Sibirskie Elektronnyye Matematicheskie Izvestiya, **13** (2016), 1116–1128. MR3592225
- [5] O. G. Parshina, *Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **21**:2 (2014), 76–83. MR3241789
- [6] Sopena, É., *Homomorphisms and colourings of oriented graphs: An updated survey*, Discrete Math., **339**:7 (2016), 1993–2005. MR3488937

TATIANA EVGENYEVNA KIREVA
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. КОПТУГА, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: tatyanakireeva17@gmail.com