S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 752–764 (2017) УДК 517.946

DOI 10.17377/semi.2017.14.064 MSC 35J46

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ФАКТОРИЗАЦИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Д.А. ЖУРАЕВ

Abstract. In the paper it is considered the problem of regularization of the Cauchy problem for systems of elliptic type equations of the first order with constant coefficients factorisable Helmholtz operator in three-dimensional unbounded domain. Using the results of [1-6], is constructed explicitly Carleman matrix and, based on the regularized solution of the Cauchy problem.

Keywords: The Cauchy problem, regularization, factorization, regular solution, fundamental solution.

1. Введение

Рассматриваемая задача относится к некорректным задачам, т.е. она неустойчива. В некорректных задачах теорема существования не доказывается, существование предполагается заданным априори. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному. Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена [8]. Условная устойчивость задачи следует из работы А.Н. Тихонова [7], если сузить класс возможных решений до компакта.

В данной работе строится семейство вектор-функций $U_{\sigma\delta}(x) = U(x, f_\delta)$ зависящих от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ в точке $x \in G$.

Juraev, D.A., The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain.

Поступила 7 мая 2017 г., опубликована 3 августа 2017 г.

Следуя А.Н. Тихонову [7], семейство вектор-функций $U_{\sigma\delta}(x)$ назовем регуляризованным решением задачи. Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближенного решения задачи. Для специальных областей задача продолжения ограниченных аналитических функций в случае, когда данные задаются только на части границы, была рассмотрена Т. Карлеманом [2]. Исследования Т. Карлемана были продолжены Г.М. Голузиным и В.И. Крыловым [6]. В работе [5] построен многомерный аналог формулы Карлемана для аналитических функций многих переменных. Использование классической формулы Грина для построения регуляризованного решения задачи Коши для уравнения Лапласа было предложено академиком М.М. Лаврентьевым, в его известной монографии [3]. Используя идеи М.М. Лаврентьева, Ш. Ярмухамедовым было построено в явном виде регуляризованное решение задачи Коши для уравнения Лапласа [4]. В работе [1] доказана интегральная формула для систем уравнений эллиптического типа первого порядка, с постоянными коэффициентами в ограниченной области. Задача Коши для многомерной системы Ламе рассмотрены О.И. Махмудовым и И.Э. Ниёзовым ([10]-[11]).

Для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизующие оператор Гельмгольца, в работе [10] доказана справедливость интегральной формулы в трехмерной неограниченной области.

Построением матрицы Карлемана для эллиптических систем занимались: Ш. Ярмухамедов, Н.Н. Тарханов, О.И. Махмудов, И.Э. Ниёзов и другие. Система, рассматриваемая в данной работе, была введена Н.Н. Тархановым. Для этой системы им были изучены корректные граничные задачи и найден аналог интегральной формулы Коши в ограниченной области.

Во многих корректных задачах для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизующие оператор Гельмгольца, недоступно вычисление значений вектор-функции на всей границе. Поэтому, задача восстановления решения систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизующие оператор Гельмгольца ([12]-[15]), является одной из актуальных задач теории дифференциальных уравнений.

Пусть $\mathbb{R}^3-$трехмерное вещественное евклидово пространство,

$$x = (x_1,\, x_2,\, x_3)\in \mathbb{R}^3,\;\; y = (y_1,\, y_2,\, y_3)\in \mathbb{R}^3,$$

$$x' = (x_1,\, x_2)\in \mathbb{R}^2,\;\; y' = (y_1,\, y_2)\in \mathbb{R}^2.$$

$G \subset \mathbb{R}^3-$неограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей, состоящей из плоскости T: $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$, т.е. $\partial G = S\bigcup T$.

Введем следующие обозначения:

$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}-$транспонированный вектор x, $r = |y - x|\,$, $\;\alpha = |y' - x'|$,

$$w = i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3,\;\; u \geq 0,\;\; \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\, \frac{\partial}{\partial x_2},\, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T,$$

$$U(x) = (U_1(x),\, \dots,\, U_n(x))^T,\; u^0 = (1,\, \dots,\, 1) \in \mathbb{R}^n,\; n = 2^m,\;\; m = 3,$$

$$E(z)=\left\| \begin{matrix} z_1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots. \\ 0 \ldots z_n \end{matrix} \right\| -\text{диагональная матрица, } z=(z_1,\, \ldots,\, z_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Пусть $D(x^T)$, $(n\times n)-$матрица с элементами, состоящими из множества линейных функций с постоянными коэффициентами комплексной плоскости, для которых выполняется условие:

$$D^*(x^T)D(x^T)=E((|x|^2+\lambda^2)u^0),$$

где $D^*(x^T)-$эрмитово сопряженная матрица $D(x^T)$, $\lambda-$вещественное число.

Рассмотрим в области G систему дифференциальных уравнений

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x)=0, \tag{1}$$

где $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)-$матрица дифференциальных операторов первого порядка.

Обозначим через $H(G)-$класс вектор-функций в области G, непрерывных на $\overline{G}=G\bigcup\partial G$ и удовлетворяющих системе (1).

Если $G-$ограничена и $U(y)\in H(G)$, то верна следующая интегральная формула типа Коши [15]

$$U(x)=\int_{\partial G}M(y,\,x)U(y)ds_y,\quad x\in G, \tag{2}$$

где

$$M(y,\,x)=\left(E\left(-\frac{e^{i\lambda r}}{4\pi r}u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T).$$

Здесь $t=(t_1,\,t_2,\,t_3)-$единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y, поверхности ∂G, $-\frac{e^{i\lambda r}}{4\pi r}-$фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$ [9].

Обозначим, через $K(w)$, $w=\xi+i\eta-$целую функцию, принимающую вещественные значения при вещественном w ($\xi,\,\eta-$действительные числа) и удовлетворяющую условиям:

$$K(\xi)\neq 0,\ \sup_{\eta\geq 1}|\xi^pK^p(w)|=\mathrm{M}(\xi,\,p)<\infty,\ \ -\infty<\xi<\infty,\ \ p=0,\,1,\,2. \tag{3}$$

Функцию $\Phi(y,\,x)$ при $y\neq x$ определим следующим равенством:

$$\Phi(y,\,x)=-\frac{1}{2\pi^2K(x_3)}\int_0^\infty Im\frac{K(w)}{w-x_3}\frac{\cos\lambda u}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}du. \tag{4}$$

Формула (2) верна, если вместо $-\frac{e^{i\lambda r}}{4\pi r}$ подставим функцию

$$\Phi(y,\,x)=-\frac{e^{i\lambda r}}{4\pi r}+g(y,\,x), \tag{5}$$

где $g_\sigma(y,\,x)-$регулярное решение уравнения Гельмгольца по переменной y, включая и точку $y=x$.

Тогда формула (2) имеет следующий вид

$$U(x)=\int_{\partial G}M(y,\,x)U(y)ds_y,\quad x\in G, \tag{6}$$

где

$$M(y,\,x)=\left(E\left(\Phi(y,\,x)u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T).$$

Формулу (6) обобщим для случая, когда $G-$неограниченная область.

Пусть, $G \subset \mathbb{R}^3-$неограниченная область, с кусочно-гладкой границей ∂G ($\partial G-$простирается до бесконечности).

Обозначим через G_R часть G, лежащую внутри круга радиуса R с центром в нуле:

$$G_R = \{y : y \in G, \ |y| < R\}, G_R^\infty = G \backslash G_R, R > 0.$$

Теорема 1. *Пусть $U(y) \in H(G)$, $G-$конечно-связная неограниченная область в $\mathbb{R}^3$, с кусочно-гладкой границей ∂G.*

Если при каждом фиксированном $x \in G$ имеет место равенство

$$\lim_{R \to \infty} \int_{G_R^\infty} M(y, x) U(y) ds_y = 0, \tag{7}$$

то верна формула (6).

Доказательство. Действительно, при фиксированном $x \in G$ $(|x| < R)$ и учитывая (6), имеем

$$\begin{gathered}\int_{\partial G} M(y, x) U(y) ds_y = \int_{\partial G_R} M(y, x) U(y) ds_y + \\ + \int_{\partial G_R^\infty} M(y, x) U(y) ds_y = U(x) + \int_{\partial G_R^\infty} M(y, x) U(y) ds_y, \ \ x \in G_R.\end{gathered}$$

Учитывая условие (7), при $R \to \infty$, получаем (6).

Пусть, неограниченная область G лежит внутри слоя наименьшей ширины, определяемого неравенством

$$0 < y_3 < h, \ h = \frac{\pi}{\rho}, \ \ \rho > 0,$$

причем ∂G простирается до бесконечности.

Предположим, что для некоторого $b_0 > 0$ площадь ∂G удовлетворяет условию роста

$$\int_{\partial G} \exp\left[-b_0 \operatorname{ch} \rho_0 |y'|\right] ds_y < \infty, \ \ 0 < \rho_0 < \rho. \tag{8}$$

Пусть, $U(y) \in H(G)$ удовлетворяет граничному условию роста

$$|U(y)| \leq \exp\left[\exp \rho_2 |y'|\right], \ \ \rho_2 < \rho, \ y \in G. \tag{9}$$

В равенство (4) положим

$$\begin{gathered}K(w) = \exp\left[-b \operatorname{ch} i\rho_1 \left(w - \tfrac{h}{2}\right) - b_1 \operatorname{ch} i\rho_0 \left(w - \tfrac{h}{2}\right)\right], \\ K(x_3) = \exp\left[b \cos \rho_1 \left(x_3 - \tfrac{h}{2}\right) + b_1 \cos i\rho_0 \left(x_3 - \tfrac{h}{2}\right)\right], \\ 0 < \rho_1 < \rho, \ 0 < x_3 < h,\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$b = 2a \exp\left(\rho_1 |x'|\right), \ \ b_1 > \frac{b_0}{\cos\left(\rho_0 \frac{h}{2}\right)}, \ a \geq 0, \ b > 0.$$

Тогда верно интегральное представление (6).

При фиксированном $x \in G$ и $y \to \infty$, оценим функцию $\Phi(y, x)$ и ее производные $\frac{\partial \Phi(y,x)}{\partial y_j}$, $j = 1, 2$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y_3}(y, x)$. Для оценки $\frac{\partial \Phi(y,x)}{\partial y_j}$ воспользуемся равенством

$$\frac{\partial \Phi(y, x)}{\partial y_j} = \frac{\partial \Phi(y, x)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y_j} = 2(y_j - x_j) \frac{\partial \Phi(y, x)}{\partial s}, \ \ j = 1, 2. \tag{11}$$

Действительно,

$$\begin{gathered}\left|\exp\left[-b \operatorname{ch} i\rho_1 \left(w - \tfrac{h}{2}\right) - b_1 \operatorname{ch} i\rho_0 \left(w - \tfrac{h}{2}\right)\right]\right| \\ = \exp Re \left[-b \operatorname{ch} i\rho_1 \left(w - \tfrac{h}{2}\right) - b_1 \operatorname{ch} i\rho_0 \left(w - \tfrac{h}{2}\right)\right] \\ = \exp\left[-b \operatorname{ch} \rho_1 \sqrt{u^2 + \alpha^2} \cos \rho_1 \left(y_3 - \tfrac{h}{2}\right) - b_1 \operatorname{ch} \rho_0 \sqrt{u^2 + \alpha^2} \cos \rho_0 \left(y_3 - \tfrac{h}{2}\right)\right].\end{gathered}$$

Так как

$$-\tfrac{\pi}{2} \le -\tfrac{\rho_1}{\rho}\cdot\tfrac{\pi}{2} \le \tfrac{\rho_1}{\rho}\cdot\tfrac{\pi}{2} < \tfrac{\pi}{2},$$
$$-\tfrac{\pi}{2} \le -\tfrac{\rho_1}{\rho}\cdot\tfrac{\pi}{2} \le \rho_0\left(y_3-\tfrac{h}{2}\right) \le \tfrac{\rho_1}{\rho}\cdot\tfrac{\pi}{2} < \tfrac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\cos\rho\left(y_3-\frac{h}{2}\right) > 0, \cos\rho_0\left(y_3-\frac{h}{2}\right) \ge \cos\frac{h\rho_0}{2} > \delta_0 > 0,$$

не обращается в нуль в области G и

$$|\Phi(y,x)| = \mathrm{O}\left[\exp\left(-\varepsilon\ \mathrm{ch}\,\rho_1\,|y'|\right)\right],\ \ \varepsilon>0,\ \ y\to\infty,\ \ y\in G\bigcup\partial G,$$
$$\left|\frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial y_j}\right| = \mathrm{O}\left[\exp\left(-\varepsilon\ \mathrm{ch}\,\rho_1\,|y'|\right)\right],\ \ \varepsilon>0,\ \ y\to\infty,\ \ y\in G\bigcup\partial G,$$
$$\left|\frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial y_3}\right| = \mathrm{O}\left[\exp\left(-\varepsilon\ \mathrm{ch}\,\rho_1\,|y'|\right)\right],\ \ \varepsilon>0,\ \ y\to\infty,\ \ y\in G\bigcup\partial G.$$

Выберем теперь ρ_1 с условием $\rho_2 < \rho_1 < \rho$. Тогда выполняется условие (8) и верна интегральная формула (6). Теорема 1 доказана. $\square$

Условие (10) можно ослабить.

Обозначим через $H_\rho(G)-$класс функций из $H(G)$, удовлетворяющих следующему словию роста:

$$H_\rho(G) = \left\{U(y):\ U(y)\in H(G),\ \ |U(y)| \le \exp\left[\mathrm{o}\left(\exp\rho\,|y'|\right)\right],\ y\to\infty,\ y\in G\right\}. \tag{12}$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $U(y)\in H_\rho(G)$, удовлетворяет условию роста*

$$\begin{gathered}|U(y)| \le C\exp\left[a\cos\rho_1\left(y_3-\tfrac{h}{2}\right)\exp\left(\rho_1\,|y'|\right)\right],\\ a\ge 0,\ \ 0<\rho_1<\rho,\ y\in\partial G,\end{gathered} \tag{13}$$

где $C-$некоторая константа. Тогда справедлива формула (6).

Доказательство. Рассечем область G линией $y_3=\frac{h}{2}$ на две области

$$G_1 = \left\{y:\ 0<y_3<\tfrac{h}{2}\right\} \text{ и } G_2 = \left\{y:\ \tfrac{h}{2}<y_3<h\right\}.$$

Рассмотрим область G_1. В формуле (4) вместе $K(w)$ поставим $K_1(w)$

$$\begin{gathered}K_1(w) = K(w)\exp\left[-\delta\ \mathrm{ch}\,i\tau\left(w-\tfrac{h}{2}\right)-\delta_1\,\mathrm{ch}\,i\rho(w-\tfrac{h}{2})\right],\\ \rho<\tau<2\rho,\ \delta>0,\ \delta_1>o,\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь $K(w)$ определяется из (10). При этих обозначениях верна оценка (8).

Действительно,

$$\begin{gathered}\left|\exp\left[-\,\mathrm{ch}\,i\tau\left(w-\tfrac{h}{4}\right)-\delta_1\,\mathrm{ch}\,i\rho\left(w-\tfrac{h}{4}\right)\right]\right|\\ =\exp\left[-\delta\ \mathrm{ch}\,\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}\cos\tau\left(y_3-\tfrac{h}{4}\right)\right]\\ =\exp\left[-\delta\ \mathrm{ch}\,\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}\right] \le \exp\left[-\delta\exp\tau\,|y_1|\right],\end{gathered}$$

так как

$-\frac{\pi}{2} \le -\tau\frac{\pi}{4} \le \tau\left(y_3-\frac{h}{4}\right) \le \tau\frac{\pi}{2} < \frac{h}{2}$ и $\cos\tau\left(y_3-\frac{h}{4}\right) \ge \cos\tau\frac{h}{4} \ge \delta_0 > 0.$

Соответствующую $\Phi(y,x)$ обозначим через $\Phi^+(y,x)$.

Так как

$$\cos\tau\left(y_3-\frac{h}{4}\right) \ge \delta_0,\ y\in G_1\bigcup\partial G_1,$$

то при фиксированных $x \in G_1,\ \ y \in G_1 \bigcup \partial G_1$, для $\Phi^+(y,\, x)$ и ее производных верны асимптотические оценки

$$\begin{aligned}
|\Phi^+(y,\, x)| &= \mathrm{O}\left[\exp(-\delta_0\, \exp\left(\tau\, |y'|\right)\right], \quad y \to \infty, \quad \rho < \tau < 2\rho, \\
\left|\tfrac{\partial \Phi^+(y,\, x)}{\partial y_j}\right| &= \mathrm{O}\left[\exp(-\delta_0\, \exp\left(\tau\, |y'|\right)\right], \quad y \to \infty, \quad \rho < \tau < 2\rho, \\
\left|\tfrac{\partial \Phi^+(y,\, x)}{\partial y_3}\right| &= \mathrm{O}\left[\exp(-\delta_0\, \exp\left(\tau\, |y'|\right)\right], \quad y \to \infty, \quad \rho < \tau < 2\rho.
\end{aligned}$$

Пусть $U(y) \in H(G_1)$ в области G_1 удовлетворяет условию роста

$$|U(y)| \leq C \exp\left[\exp\left(2\rho - \varepsilon\right) |y'|\right], \quad \varepsilon > 0. \tag{15}$$

Выберем τ в (14) из неравенства $2\rho - \varepsilon < \tau < 2\rho$.

Тогда для области G_1 выполняется условие (14), следовательно, верна следующая интегральная формула

$$U(x) = \int_{\partial G_1} M(y, x) U(y) ds_y, \quad x \in G_1. \tag{16}$$

где

$$M(y,\, x) = \left(E\left(\Phi^+(y,\, x) u^0\right) D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) D(t^T).$$

Если $U(y) \in H(G_2)$ удовлетворяет в G_2 условию роста (13), то при $2\rho - \varepsilon < \tau < 2\rho$ аналогично получим следующую интегральную формулу

$$U(x) = \int_{\partial G_2} M(y, x) U(y) ds_y, \quad x \in G_2. \tag{17}$$

где

$$M(y,\, x) = \left(E\left(\Phi^-(y,\, x) u^0\right) D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) D(t^T).$$

Здесь $\Phi^-(y,\, x)$ определяется формулой (4), в которой $K(w)$ заменяется функцией $K_2(w)$:

$$K_2(w) = K(w) \exp\left[-\delta\ \mathrm{ch}\, i\tau\,(w - h_1) - \delta_1\, \mathrm{ch}\, i\rho(w - \frac{h}{2})\right], \tag{18}$$

где

$$h_1 = \frac{h}{2} + \frac{h}{4}, \quad \frac{h}{2} < y_3 < h, \quad \frac{h}{2} < x_3 < h_1, \quad \delta > 0, \quad \delta_1 > 0.$$

В полученных при этом формулах интегралы (согласно 9)) равномерно сходятся при $\delta \geq 0$, когда $U(y) \in H_\rho(G)$. Положим в этих формулах $\delta = 0$ и, объединяя полученные формулы, найдем

$$U(x) = \int_{\partial G} M(y,\, x) U(y) ds_y, \qquad x \in G, \quad x_3 \neq \frac{h}{2}, \tag{19}$$

где

$$M(y,\, x) = \left(E\left(\tilde{\Phi}(y,\, x) u^0\right) D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) D(t^T).$$

(интегралы по сечению $y_3 = \frac{h}{2}$ взаимно уничтожаются)

$$\tilde{\Phi}(y,\, x) = (\Phi^+(y,\, x))_{\delta=0} = (\Phi^-(y,\, x))_{\delta=0}.$$

Здесь $\tilde{\Phi}_\sigma(y,\, x)$определяется формулой (4), в которой $K(w)$ определяется из (14), где положено $\delta = 0$. Согласно принципу продолжения, формула (19) верна для $\forall x \in G$. При условии (15) формула (19) верна для $\forall \delta_1 \geq 0$. Полагая $\delta_1 = 0$ получим доказательство теоремы. Теорема 2 доказана. □

В формуле (4), выбирая

$$K(w) = \frac{1}{(w-x_3+3h)^2}\exp(\sigma w),$$
$$K(x_3) = \frac{1}{(3h)^2}\exp(\sigma x_3),\ \ 0 < x_3 < h,\ h = \frac{\pi}{\rho}, \tag{20}$$

получим

$$\Phi_\sigma(y,\, x) = -\frac{e^{-\sigma x_3}}{2\pi^2 (3h)^2}\int_0^\infty Im\frac{\exp(\sigma w)}{(w-x_3+3h)^2(w-x_3)}\frac{\cos\lambda u}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}du. \tag{21}$$

Тогда интегральная формула (6) имеет следующий вид:

$$U(x) = \int_{\partial G} N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y, \qquad x \in G, \tag{22}$$

где

$$N_\sigma(y,\, x) = \left(E\left(\Phi_\sigma(y,\, x)u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T).$$

Пусть, граница области G состоит из гиперплоскости $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S, простирающейся до бесконечности и лежащей в слое

$$0 < y_3 < h,\ \ h = \frac{\pi}{\rho},\ \ \rho > 0.$$

Будем предполагать, что S задана уравнением

$$y_3 = \psi(y_1,\, y_2),\ \ -\infty < y_1 < \infty,\ \ -\infty < y_2 < \infty,$$

где $\psi(y')$ удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial\psi(y')}{\partial y_j}\right| \le M < \infty,\ \ y' \in \mathbb{R}^2,\ \ j = 1,\, 2.$$

2. Постановка задачи

Пусть $U(y) \in H_\rho(G)$ и

$$U(y)|_S = f(y),\ \ y \in S. \tag{23}$$

Здесь, $f(y)$−заданная непрерывная вектор-функция на S.

Требуется восстановить вектор-функцию $U(y)$ в области G, исходя из её значений $f(y)$ на S.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $U(y) \in H_\rho(G)$ удовлетворяет неравенству*

$$|U(y)| \le 1,\ \ y \in T. \tag{24}$$

Если

$$U_\sigma(x) = \int_S N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y, \qquad x \in G. \tag{25}$$

то справедлива оценка

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \le C_\rho(x)\sigma\, e^{-\sigma\, x_3},\ \ \sigma > 1,\ \ x \in G. \tag{26}$$

Здесь и ниже функции, зависящие от x и ρ, обозначим через $C_\rho(x)$. Причем в различных неравенствах они различные.

Доказательство. Используя интегральную формулу (22) и равенство (25), получим

$$U(x) = U_\sigma(x) + \int_T N_\sigma(y,\, x) U(y) ds_y, \quad x \in G.$$

Учитывая неравенство (24), оценим следующее

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \le \int_T |U(y)|\, |N_\sigma(y,\, x)|\, ds_y \le \int_T |N_\sigma(y,\, x)|\, ds_y, \quad x \in G.$$

Для этого оценим интегралы $\int_T |\Phi_\sigma(y,\, x)|\, ds_y$, $\int_T \left|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_j}\right| ds_y$, $(j = 1,\, 2)$ и $\int_T \left|\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_3}(y,\, x)\right| ds_y$ на части T плоскости $y_3 = 0$.

Пусть $\sigma > o$. Отделяя мнимую часть равенства (21), получим

$$\begin{gathered}\Phi_\sigma(y,\, x) = \tfrac{e^{\sigma(y_3 - x_3)}}{2\pi^2 (3h)^2} \left[\int_0^\infty \left(\tfrac{\left(-\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 2\beta_1 \beta\right) \cos \sigma\alpha_1}{\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2\right)^2 \left(\alpha_1^2 + \beta^2\right)} \right.\right. \\ \left.\left. + \tfrac{\left(2\alpha_1^2 \beta_1 + \alpha_1^2 \beta - \beta_1^2 \beta\right)}{\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2\right)^2 \left(\alpha_1^2 + \beta^2\right)} \tfrac{\sin \sigma\alpha_1}{\alpha_1} \right) \cos \lambda u\, du \right],\end{gathered} \tag{27}$$

где

$$\alpha_1^2 = u^2 + \alpha^2, \ \ \beta = y_3 - x_3, \ \ \beta_1 = y_3 - x_3 + 3h.$$

Будем пользоваться легко проверяемыми неравенствами

$$\begin{gathered}\left|\tfrac{d^k}{ds^k} \tfrac{\sin \sigma\alpha_1}{\alpha_1}\right| \le C_k \tfrac{\sigma^k}{\alpha_1^{k+1}}, \ \ \alpha_1 \ge 1, \ \ k = 0,\, 1,\, \ldots, \\ \left|\tfrac{d^k}{ds^k} \tfrac{\sin \sigma\alpha_1}{\alpha_1}\right| \le C_k \tfrac{\sigma^k}{\alpha_1^{2k}}, \ \ 0 < \alpha_1 \le 1, \\ \left|\tfrac{d^k}{ds^k} \cos \sigma\alpha_1\right| \le C_k \tfrac{\sigma^k}{\alpha_1^k}, \ \ \alpha_1 \ge 1, \ \ k = 0,\, 1,\, \ldots, \\ \left|\tfrac{d^k}{ds^k} \cos \sigma\alpha_1\right| \le C_k \tfrac{\sigma^k}{\alpha_1^{2(k-1)}}, \ \ 0 < \alpha_1 \le 1, \ \ k = 2,\, \ldots, \\ \left|\tfrac{d}{ds} \cos \sigma\alpha_1\right| \le \tfrac{\sigma}{\alpha_1}, \ \ \sigma > 0.\end{gathered} \tag{28}$$

Оценим сначала $\int_{y_3=0} |\Phi_\sigma(y,\, x)|\, ds_y$. Учитывая равенство (27) и неравенство (28), при $\alpha_1 \ge 1$ и $0 < \alpha_1 \le 1$, имеем

$$\int_{y_3=0} |\Phi_\sigma(y,\, x)|\, ds_y \le C_\rho(x) \sigma\, e^{-\sigma x_3}, \quad \sigma > 1, \ \ x \in G, \tag{29}$$

$$\int_{y_3=0} |\Phi_\sigma(y,\, x)|\, ds_y \le C_\rho(x) \sigma\, e^{-\sigma x_3}, \quad \sigma > 1, \ \ x \in G. \tag{30}$$

Объединяя неравенства (29)-(30), получим

$$\int_{y_3=0} |\Phi_\sigma(y,\, x)|\, ds_y \le C_\rho(x) \sigma\, e^{-\sigma x_3}, \ \ \sigma > 1, \ \ x \in G. \tag{31}$$

Для оценки второго интеграла воспользуемся равенством

$$\frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_j} = \frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y_j} = 2(y_j - x_j) \frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial s}, \ \ j = 1,\, 2. \tag{32}$$

где

$$\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial s}=\frac{e^{\sigma(y_3-x_3)}}{2\pi^2}\left[\int_0^\infty\left(\frac{\cos\sigma\alpha_1}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2(\alpha_1^2+\beta^2)}-\frac{\sigma(-\alpha_1^2+\beta_1^2+2\beta_1\beta)}{2(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2(\alpha_1^2+\beta^2)}\frac{\sin\sigma\alpha_1}{\alpha_1}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{(-\alpha_1^2+\beta_1^2+2\beta_1\beta)\cos\sigma\alpha_1}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^3(\alpha_1^2+\beta^2)}-\frac{(-\alpha_1^2+\beta_1^2+2\beta_1\beta)\cos\sigma\alpha_1}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2(\alpha_1^2+\beta^2)}\right)\cos\lambda u\,du$$
$$+\int_0^\infty\left(\frac{(2\beta_1+\beta)\sin\sigma\alpha_1}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2(\alpha_1^2+\beta^2)}\frac{\sin\sigma\alpha}{\alpha_1}+\frac{\sigma(2\beta_1\alpha_1^2+\alpha_1^2\beta-\beta_1^2\beta)\cos\sigma\alpha_1}{2\alpha_1^2(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2(\alpha_1^2+\beta^2)}\right.$$
$$-\frac{(2\beta_1\alpha_1^2+\alpha_1^2\beta-\beta_1^2\beta)}{2\alpha_1^2(\alpha_1^2+\beta_1^2)^3(\alpha_1^2+\beta^2)}\frac{\sin\sigma\alpha}{\alpha_1}-\frac{2(2\beta_1\alpha_1^2+\alpha_1^2\beta-\beta_1^2\beta)}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^3(\alpha_1^2+\beta^2)^2}\frac{\sin\sigma\alpha}{\alpha_1}$$
$$\left.\left.-\frac{(2\beta_1\alpha_1^2+\alpha_1^2\beta-\beta_1^2\beta)}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2(\alpha_1^2+\beta^2)}\frac{\sin\sigma\alpha}{\alpha_1}\right)\cos\lambda u\,du\right],\quad s=\alpha^2.$$

Теперь, оценим интегралы $\int_T\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_j}\right|ds_y,\ j\ =\ 1,2.$ Сначала оценим $\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}\right|ds_y$. Учитывая равенство (32) и неравенство (28), при $\alpha_1\geq 1$ и $0<\alpha_1\leq 1$, имеем

$$\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_1}\right|ds_y\leq C_\rho(x)\sigma\,e^{-\sigma x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G, \tag{33}$$

$$\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_1}\right|ds_y\leq C_\rho(x)\sigma\,e^{-\sigma x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{34}$$

Объединяя неравенства (33) и (34), получим

$$\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_1}\right|ds_y\leq C_\rho(x)\sigma\,e^{-\sigma x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{35}$$

Теперь, аналогично оценим $\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}\right|ds_y$. Учитывая равенство (32) и неравенство (28), при $\alpha_1\geq 1$ и $0<\alpha_1\leq 1$, имеем

$$\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_2}\right|ds_y\leq C_\rho(x)\sigma\,e^{-\sigma x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G, \tag{36}$$

$$\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_2}\right|ds_y\leq C_\rho(x)\sigma\,e^{-\sigma x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{37}$$

Объединяя неравенства (36) и (37), получим

$$\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_2}\right|ds_y\leq C_\rho(x)\sigma\,e^{-\sigma x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{38}$$

Для оценки интеграла $\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}\right|ds_y$ воспользуемся равенством

$$\frac{\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}=\frac{e^{\sigma\beta}}{2\pi^2(3h)^2}\left[\int_0^\infty\left(\frac{\sigma(-\alpha_1^2+\beta_1^2+2\beta_1\beta)+(4\beta_1+2\beta)}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2(\alpha_1^2+\beta^2)}\cos\sigma\alpha_1-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{4\beta_1(-\alpha_1^2+\beta_1^2+2\beta_1\beta)\cos\sigma\alpha_1}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^3(\alpha_1^2+\beta^2)}-\frac{2\beta(-\alpha_1^2+\beta_1^2+2\beta_1\beta)\cos\sigma\alpha_1}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2(\alpha_1^2+\beta^2)^2}\right)\cos\lambda u\,du-$$
$$-\int_0^\infty\left(\frac{\sigma(\beta_1^2\beta-2\alpha_1^2\beta_1-\alpha_1^2\beta)+(2\beta_1\beta+\beta_1^2-3\alpha_1^2)}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2(\alpha_1^2+\beta^2)}\frac{\sin\sigma\alpha_1}{\alpha_1}-\right.$$
$$-\frac{4\beta_1(\beta_1^2\beta-2\alpha_1^2\beta_1-\alpha_1^2\beta)}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^3(\alpha_1^2+\beta^2)}\frac{\sin\sigma\alpha_1}{\alpha_1}-$$
$$\left.\left.-\frac{2\beta(\beta_1^2\beta-2\alpha_1^2\beta_1-\alpha_1^2\beta)}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2(\alpha_1^2+\beta^2)^2}\frac{\sin\sigma\alpha_1}{\alpha_1}\right)\cos\lambda u\,du\right]. \tag{39}$$

Учитывая равенство (39) и неравенство (28), при $\alpha_1\geq 1$ и $0<\alpha_1\leq 1$, имеем

$$\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_3}\right|ds_y\leq C_\rho(x)\sigma\,e^{-\sigma x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G, \tag{40}$$

$$\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_3}\right|ds_y \le C_\rho(x)\sigma\, e^{-\sigma x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{41}$$

Аналогично, объединяя неравенства (40)-(41), получим

$$\int_{y_3=0}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_3}\right|ds_y \le C_\rho(x)\sigma\, e^{-\sigma x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{42}$$

Из неравенств (31), (35), (38) и (42), получим

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le C_\rho(x)\sigma\, e^{-\sigma x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G.$$

Теорема 3 доказана. □

Следствие 1. *Предельное равенство*

$$\lim_{\sigma\to\infty} U_\sigma(x)=U(x),$$

имеет место равномерно на каждом компакте из области G.

Теорема 4. *Пусть $U(y)\in H(G)$ удовлетворяет на части плоскости $y_3=0$ условию (24), а на гладкой поверхности S неравенству*

$$|U(y)|\le\delta,\ \ 0<\delta<1. \tag{43}$$

Тогда верна оценка

$$|U(x)|\le C_\rho(x)\sigma\delta^{\frac{x_3}{h}},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{44}$$

Доказательство. Используя интегральную формулу (22), имеем

$$U(x)=\int_{\partial G} N_\sigma(y,\,x)U(y)ds_y$$
$$=\int_S N_\sigma(y,\,x)U(y)ds_y+\int_T N_\sigma(y,\,x)U(y)ds_y,\ \ x\in G.$$

Учитывая, граничное условие (24) и неравенство (43), получим оценку

$$\begin{aligned}|U(x)|&\le\int_S|U(y)|\,|N_\sigma(y,\,x)|\,ds_y+\int_T|U(y)|\,|N_\sigma(y,\,x)|\,ds_y\\&\le\delta\int_S|N_\sigma(y,\,x)|\,ds_y+\int_T|N_\sigma(y,\,x)|\,ds_y,\ \ x\in G.\end{aligned} \tag{45}$$

Сначала оценим, первый интеграл неравенства (45). Для этого оценим интегралы $\delta\int_S|\Phi_\sigma(y,\,x)|\,ds_y$, $\delta\int_S\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_j}\right|ds_y$, $(j=1,\,2)$ и $\delta\int_S\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_3}\right|ds_y$ на гладкой поверхности S.

Оценим сначала $\int_S|\Phi_\sigma(y,\,x)|\,ds_y$. Учитывая равенство (27) и неравенство (28), при $\alpha_1\ge1$ и $0<\alpha_1\le1$, имеем

$$\delta\int_S|\Phi_\sigma(y,\,x)|\,ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\, e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G, \tag{46}$$

$$\delta\int_S|\Phi_\sigma(y,\,x)|\,ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\, e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{47}$$

Объединяя неравенства (46) и (47), получим

$$\delta\int_S|\Phi_\sigma(y,\,x)|\,ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\, e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{48}$$

Теперь, оценим интегралы $\delta\int_S\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_j}\right|ds_y$, $j=1,2$. Сначала оценим $\delta\int_S\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_1}\right|ds_y$. Учитывая равенство (32) и неравенство (28), при $\alpha_1\ge1$ и $0<\alpha_1\le1$, имеем

$$\delta\int_S\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_1}\right|ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\, e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G, \tag{49}$$

$$\delta\int_S\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_1}\right|ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\,e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{50}$$

Объединяя неравенства (49) и (50), получим

$$\delta\int_S\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_1}\right|ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\,e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{51}$$

Теперь, аналогично оценим $\delta\int_S\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_2}\right|ds_y$. Учитывая равенство (32) и неравенство (28), при $\alpha_1\ge 1$ и $0<\alpha_1\le 1$, имеем

$$\delta\int_S\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_2}\right|ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\,e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G, \tag{52}$$

$$\delta\int_S\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_2}\right|ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\,e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{53}$$

Объединяя неравенства (52) и (53), получим

$$\delta\int_S\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_2}\right|ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\,e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{54}$$

Теперь оцениваем интеграл $\delta\int_S\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_3}\right|ds_y$. Учитывая равенство (39) и неравенство (28), при $\alpha_1\ge 1$ и $0<\alpha_1\le 1$, имеем

$$\delta\int_S\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_3}\right|ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\,e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G, \tag{55}$$

$$\delta\int_S\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_3}\right|ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\,e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{56}$$

Аналогично, объединяя неравенства (55) и (56), получим

$$\delta\int_S\left|\frac{\Phi_\sigma(y,\,x)}{\partial y_3}\right|ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\,e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{57}$$

Из неравенств (48), (51), (54) и (57), получим

$$\delta\int_S|N_\sigma(y,\,x)|\,ds_y\le C_\rho(x)\sigma\delta\,e^{\sigma(h-x_3)},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{58}$$

Известно следующее

$$\int_T|N_\sigma(y,\,x)|\,ds_y\le C_\rho(x)\sigma\,e^{-\sigma x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G. \tag{59}$$

Теперь учитывая (58)-(59), имеем

$$|U(x)|\le\frac{C_\rho(x)\sigma}{2}(\delta\,e^{\sigma\,h}+1)e^{-\sigma\,x_3},\ \ \sigma>1,\ \ x\in G.$$

Выбирая σ из равенства

$$\sigma=\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\delta}, \tag{60}$$

получим неравенство (44).

Теорема 4 доказана. □

Пусть $U(y) \in H_\rho(G)$ и вместе с $U(y)$ на S задано ее приближение $f_\delta(y)$, соответственно, с погрешностью $0 < \delta < 1$, $\max\limits_S |U(y) - f_\delta(y)| \le \delta$.

Положим

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S N_\sigma(y, x) f_\delta(y) ds_y, \;\; x \in G. \tag{61}$$

Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть $U(y) \in H_\rho(G)$ удовлетворяет на части плоскости $y_3 = 0$ условию (24).*

Тогда справедлива оценка

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \le C_\rho(x) \sigma \delta^{\frac{x_3}{h}}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \tag{62}$$

Доказательство. Из интегральной формулы (22) и (61), имеем

$$\begin{aligned} U(x) - U_{\sigma\delta}(x) = \textstyle\int_S N_\sigma(y, x) \{ U(y) - f_\delta(y) \} \, ds_y \\ + \textstyle\int_T N_\sigma(y, x) U(y) ds_y, \;\; x \in G. \end{aligned}$$

Теперь, повторяя доказательства теорем 1 и 2, получим

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \le \frac{C_\rho(x)\sigma}{2} (\delta \, e^{\sigma\, h} + 1) e^{-\sigma\, x_3}, \quad \sigma > 1, \;\; x \in G.$$

Отсюда, выбирая σ из равенства (60), получим (62). Теорема 5 доказана. □

Следствие 2. *Предельное равенство*

$$\lim_{\delta \to 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x),$$

имеет место равномерно на каждом компакте из области G.

Таким образом, функционал $U_{\sigma\delta}(x)$ является регуляризацией решения задачи (1), (23).

В заключение автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за полезные советы.

References

[1] Tarkhanov N.N., *Ob integralnom predstavlenii resheniy sistem lineynykh differensialnyx uravneniy 1-go poryadka v chastnykh proizvodnykh i nekotoryx yego prilojeniyakh*, Nekotorye voprosy mnogomernogo kompleksnogo analiza, Institut fiziki AN SSSR, Krasnoyarsk, **269** (1980), 147–160.

[2] Carleman T., *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, Gautier-Villars et Cie, 1926. JFM 52.0255.02

[3] Lavrent'ev M.M., *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki*, Novosibirsk: Nauka, 1962. Zbl 0114.29703

[4] Yarmukhamedov Sh., *Funksiya Karlemana i zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasa*, Sib. mat. zhurnal., **45**:3 (2004), 702–719. MR2078727

[5] Ayzenberg L.A., *Formuly Karlemana v kompleksnom analize*, Novosibirsk: Nauka, 1990.

[6] Goluzin G.M., Krylov V.M., *Obobshennaya formula Karlemana i yeyo prilozheniye k analiticheskomu prodolzheniyu funksiy*, Mat. sb., **40**:2 (1993), 144–149.

[7] Tikhonov A.N., *O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii*, Dokl. AN SSSR., **151**:3 (1963), 501–504. MR0162377

[8] Bers A., Dzhon F., Shekhter M., *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*, M.: Mir, 1966. MR0208121

[9] Aleksidze M.A., *Fundamentalnye funksii v priblizhennykh resheniyakh granichnykh zadach*, M.: Nauka, 1991. MR1154556

[10] Makhmudov O.I., Niyozov I.E., *O zadache Koshi dlya mnogomernoy sistemy uravneniy Lame*, Izv. vuzov. Matem., **4** (2006), 41–50. MR2241417

[11] Niyozov I.E., Makhmudov O.I., *Zadacha Koshi dlya sistemy uravneniy momentnoy teorii uprugosti v $\mathbb{R}^m$*, Izv. vuzov. Matem., **2** (2014), 30–37. MR3254457

[12] Juraev D.A., *Integralnaya formula dlya sistem uravneniy ellipticheskogo tipa*, II Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya studentov i aspirantov "Matematika i yeyo prilozheniya v sovremennoy nauke i praktike", Kursk, (2012), 33–38.

[13] Juraev D.A., *Integralnaya formula dlya sistem uravneniy ellipticheskogo tipa v ogranichennoy oblasti*, "Aktualnye problemy mexaniki, matematiki, informatiki-2012", Mezhdunarodnaya konferentsiya posvyashyennoy 100-letiyu so dnya rozhdeniya professorov S.N. Chernikova, I.F. Vereshagina, L.I. Volkovysskogo. Perm, (2012), 43.

[14] Juraev D.A., *Konstruktsiya fundamentalnogo resheniya uravneniya Gelmgoltsa*, Doklady Akademii nauk Respubliki Uzbekistan, **4** (2012), 14–17.

[15] Juraev D.A., *Regulyarizatsiya zadacha Koshi dlya sistem uravneniy ellipticheskogo tipa pervogo poryadka*, Uzbekskiy Matematicheskiy zhurnal, **2** (2016), 61–71.

Davron Aslonqulovich Juraev
Karshi State University,
Karshi city, Kuchabog-17,
180100, Republic of Uzbekistan, Kashkadarya region
E-mail address: juraev_davron@list.ru