S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 765–773 (2017) УДК 515.124.2

DOI 10.17377/semi.2017.14.065 MSC 30L99, 53C23, 54D10

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ РАССТОЯНИЯ И АКСИОМЫ ОТДЕЛИМОСТИ НА (q_1, q_2)-КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.В. ГРЕШНОВ

Abstract. We get some estimates for interior of arbitrary (q_1, q_2)-quasimetric ball. We prove theorem of regularization of (q_1, q_2)-quasimetric that generalizes corresponding results of R. Alvarado and M. Mitrea. We introduce a notion of $\underline{\lim}$-weak symmetric (q_1, q_2)-quasimetric space and prove that every $\underline{\lim}$-weak symmetric (q_1, q_2)-quasimetric space satisfies T_3-axiom.

Keywords: distance function, (q_1, q_2)-quasimetric, open set, interior of (q_1, q_2)-quasimetric ball, $\underline{\lim}$-weak symmetry, separation axioms, regularization of a (q_1, q_2)-quasimetric .

1. Введение

Пусть X — некоторое множество, содержащее не менее двух точек. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ называется *функцией расстояния* на X, если она удовлетворяет *аксиоме тождества*: $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Несложно проверить, что $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow \rho(y, x) = 0$.

Определение 1 ([1]). *Функция расстояния ρ, определенная на X, называется f-квазиметрикой, если имеет место следующее f-неравенство треугольника*

$$\rho(x, z) \le f(\rho(x, y), \rho(y, z)) \quad \forall x, y, z \in X,$$

Greshnov, A.V., Regularization of distance functions and separation axioms on (q_1, q_2)-quasimetric spaces.

Публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Проект № 1.3087.2017/4.6).

Поступила 11 июля 2017 г., опубликована 4 августа 2017 г.

где $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *— некоторая функция такая, что* $f(t_1, t_2) \to 0$ *при* $(t_1, t_2) \to (0, 0)$. *Пара* (X, ρ) *в этом случае называется* f*-квазиметрическим пространством.*

В случае $f(t_1, t_2) = t_1 + t_2$ функция ρ называется *квазиметрикой*, а (X, ρ) — *квазиметрическим пространством* [2].

Определение 2 ([1], [3]–[5]). *Пара* (X, ρ), *где функция расстояния* ρ *удовлетворяет* (q_1, q_2)*-обобщенному неравенству треугольника*

$$\rho(x, z) \le q_1 \rho(x, y) + q_2 \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X,$$

где $q_1, q_2 > 0$ *— некоторые константы, называется* (q_1, q_2)*-квазиметрическим пространством, а функция расстояния* ρ *—* (q_1, q_2)*-квазиметрикой. Если* (q_1, q_2)*-квазиметрика* ρ *удовлетворяет условию* q_0*-симметричности, т. е.*

$$\rho(x, y) \le q_0 \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

для некоторой константы $q_0 > 0$, *то будем называть ее* q_0*-симметрической (симметрической в случае* $q_0 = 1$*).*

Несложно проверить, что всегда $q_2, q_1, q_0 \ge 1$. Если в определении 2 положить $q_1 = q_2 = 1$, то мы получим определение квазиметрики, данного выше. В ряде работ, связанных с функциональным анализом, квазиметрикой называют q_0-симметрическую [6], [7] (симметрическую [8]–[10]) (q, q)-квазиметрику.

В дальнейшем, если специально не оговаривается, в работе мы будем рассматривать (q_1, q_2)-квазиметрические пространства (X, ρ) (q_0-симметричность для ρ не предполагается).

Множество

$$B^{\mathrm{o}}(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

будем называть *шаром* с центром в точке x радиуса r. Множество $U \in X$ будем называть *открытым*, если для любой точки $x \in U$ найдется число r_x такое, что $B^{\mathrm{o}}(x, r_x) \subset U$. Открытые множества формируют топологию τ_ρ на X. При этом сами шары $\{B^{\mathrm{o}}(x, r)\}$ могут и не быть открытыми даже в случае симметрических (q_1, q_2)-квазиметрических пространств (см. примеры в [1, 4]). Достаточным условием того, что (q_1, q_2)-квазиметрический шар является открытым множеством, является полунепрерывность сверху по первому аргументу (q_1, q_2)-квазиметрики $\rho(x, y)$ (ср. с [6]), в частности, когда $q_1 = 1$ (см. [1], [3], [4]).

Окрестностью множества $A \subset X$ мы назовем любое подмножество из X, содержащее открытое множество U такое, что $A \subseteq U$. Точку x_0 назовем *предельной точкой* множества $A \subset X$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\big(A \cap B^{\mathrm{o}}(x_0, \varepsilon)\big) \setminus \{x_0\} \ne \emptyset.$$

Совокупность всех предельных точек множества A обозначаем как $Lim(A)$. Множество $A \in X$ будем называть *замкнутым*, если множество $X \setminus A$ открыто. Несложно показать, что: A — замкнуто $\Leftrightarrow$ множество A содержит все свои предельные точки. Говорим, что последовательность $\{x_n\} \subset X$ *сходится* к точке $x_0 \in X$, если выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) = 0$.

В работе [1] была получена следующая оценка «массивности» внутренности f -квазиметрического шара.

Теорема 1 ([1], Lemma 1.4). *Пусть* (X, ρ) *—* f*-квазиметрическое пространство. Тогда* $B^o(x, \theta(r)) \subset \mathrm{int} B^o(x, r)$, *где* $\theta(r) = \{t_1 \ge 0 \mid \overline{\lim}_{t_2 \to 0+} f(t_1, t_2) \ge r\}$.

Из теоремы 1 вытекает (см. [1]), что в случае (q_1, q_2)-квазиметрических пространств имеет место включение

$$B^{\mathrm{o}}(x, \frac{r}{q_1}) \subset \mathrm{int} B^{\mathrm{o}}(x, r). \tag{1}$$

Одним из главных результатов работы [1] является следующая квазиметризационная

Теорема 2 ([1], Theorem 3.1). *Любое f-квазиметрическое пространство квазиметризуемо, а любое слабо симметрическое f-квазиметрическое пространство метризуемо.*

Определение 3 ([1]). *f-квазиметрическое пространство является слабо симметрическим, если выполняется* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a, x_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$.

Примером слабо симметрического f-квазиметрического пространства является q_0-симметрическое (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство.

Перечислим основные результаты работы.

В § 2 мы изучаем свойства (q_1, q_2)-квазиметрических шаров, связанных с «массивностью» их внутренности: в свойстве 1 мы приводим другое (по сравнению с работой [1]) доказательство включения (1), а в свойстве 3 «уточняем» это включение. В теореме 3 получена более тонкая, по сравнению с (1), оценка «массивности» внутренности (q_1, q_2)-квазиметрического шара в терминах принадлежности шару открытого множества. Идея доказательства теоремы 3 принадлежит К. В. Сторожуку. В теоремах 4, 5 мы доказали следующее утверждение о регуляризации (q_1, q_2)-квазиметрики: *для любой (q_1, q_2)-квазиметрики ρ существует билипшицево эквивалентная ей (q_1', q_2')-квазиметрика ρ' такая, что любой шар $\{y \in X \mid \rho'(x, y) < r\}$ является открытым множеством в топологии $\tau_{\rho'}$*. Отметим, что свойство (q_1, q_2)-квазиметрических шаров быть открытыми в соответствующей топологии важно для построения теории функциональных пространств. Теоремы 4, 5 обобщают на случай (q_1, q_2)-квазиметрических пространств соответствующие утверждения, доказанные для симметрических [8] и для q_0-симметрических [7] (q, q)-квазиметрических пространств. Метод доказательства теорем 4, 5 основан на использовании теоремы 3 и является новым (по сравнению методами работ [7], [8]).

В § 2 мы изучаем некоторые топологические аксиомы отделимости в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах.

Определение 4. *Назовем (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство $\underline{\lim}$-слабо симметрическим, если выполняется* $\lim\limits_{i\to\infty} \rho(a, x_i) = 0 \Rightarrow \liminf\limits_{i\to\infty} \rho(x_i, a) = 0$.

Очевидно, что любое слабо симметрическое (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство является $\underline{\lim}$-слабо симметрическим. В § 2 мы приводим пример $\underline{\lim}$-слабо симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства, не являющегося слабо симметрическим. Известно [1], что f-квазиметрическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_2 тогда и только тогда, когда любая сходящаяся в нем последовательность имеет единственный предел. Несложно видеть, что любая сходящаяся в $\underline{\lim}$-слабо симметрическом (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве имеет единственный предел. В § 2 в свойствах 4 и 5, используя теорему 3, мы приводим несложную проверку аксиомы отделимости T_2 для q_0-симметрических и $\underline{\lim}$-слабо симметрических (q_1, q_2)-квазиметрических пространств соответственно. Выполнение аксиом отделимости T_3, T_4 для слабо симметрических (q_1, q_2)-квазиметрических пространств вытекает из теоремы 2. Однако теорема о метризации для $\underline{\lim}$-слабо симметрических (q_1, q_2)-квазиметрических пространств не известна. В § 2 мы доказываем выполнение аксиомы отделимости T_3 для $\underline{\lim}$-слабо симметрических (q_1, q_2)-квазиметрических пространств (теорема 6).

Автор выражает глубокую благодарность А. В. Арутюнову, Л. В. Локуциевскому, К. В. Сторожуку за полезные дискуссии.

2. «Массивность» внутренности шара и регуляризация функций расстояния в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах

Свойство 1. *Для любого (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, ρ) выполняется включение*

$$B^o(x, \frac{r}{q_1}) \subset \operatorname{int} B^o(x, r) \quad \forall r > 0 \quad \forall x \in (X, \rho).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $y \in B^{\rm o}(x, \frac{r}{q_1})$, тогда

$$\rho(x, y) = \frac{r}{q_1} - \varepsilon$$

для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Рассмотрим любую точку $z \in X$ такую, что $\rho(y, z) < \frac{q_1 \varepsilon}{2q_2}$. Тогда

$$\rho(x, z) \leq q_1 \rho(x, y) + q_2 \rho(y, z) < r - q_1 \varepsilon + \frac{q_1 \varepsilon}{2} = r - \frac{q_1 \varepsilon}{2} < r$$
$$\Rightarrow B^{\rm o}\big(y, \frac{q_1 \varepsilon}{2q_2}\big) \subset B^{\rm o}(x, r) \Rightarrow y \in \operatorname{int} B^{\rm o}(x, r).$$

□

Для (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, ρ) через $Q = Q(\rho)$ обозначим множество таких точек $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$, что для ρ выполняется (q_1, q_2)-обобщенное неравенство треугольника. Непосредственно из определения множества Q вытекает следующее

Свойство 2 ([3], [4])**.** 1^0 *Множество $Q = Q(\rho)$ выпукло замкнуто, и при этом $Q \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \geq 1\}$;* 2^0 *условие $(1, 1) \in Q$ равносильно тому, что ρ — квазиметрика;* 3^0 *если (q_1, q_2)-квазиметрика является симметрической, то множество Q симметрично относительно биссектрисы правого верхнего координатного угла евклидовой плоскости.*

Обозначим $q_\rho = \inf\{q_1 \mid (q_1, q_2) \in Q(\rho)\}$.

Свойство 3. *Для любого (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, ρ) выполняется включение*

$$B^o(x, \frac{r}{q_\rho}) \subset \operatorname{int} B^o(x, r) \quad \forall r > 0 \quad \forall x \in (X, \rho).$$

Доказательство. Если найдется точка $(q_1, q_2) \in Q$ такая, что $q_1 = q_\rho$, то этот случай доказан в свойстве 1. Рассмотрим оставшуюся возможность. Рассмотрим произвольную точку $y \in B^{\rm o}(x, \frac{r}{q_\rho})$, тогда $\rho(x, y) = \frac{r}{q_\rho} - \varepsilon$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Пусть $(q_1, q_2) \in Q$, тогда $q_\rho = q_1 - \delta$ для некоторого числа $\delta > 0$.

Пусть $\alpha > 0$ — некоторое достаточно малое число. Рассмотрим точку $z \in X$ такую, что $\rho(y,z) < \alpha$. Тогда

$$\rho(x,z) \leq q_1\rho(x,y) + q_2\rho(y,z) < (q_\rho + \delta)\big(\frac{r}{q_\rho} - \varepsilon\big) + q_2\alpha = r - q_\rho\varepsilon + \delta\big(\frac{r}{q_\rho} - \varepsilon\big) + q_2\alpha.$$

Из определения числа q_ρ следует, что для любого достаточно малого числа δ найдется число q_1 такое, что $(q_1, q_2) \in Q$. Выберем δ так, чтобы $\delta\big(\frac{r}{q_\rho} - \varepsilon\big) < \frac{q_\rho\varepsilon}{2}$. После этого выберем число α так, чтобы $q_2\alpha < \frac{q_\rho\varepsilon}{4}$. Тогда мы будем иметь

$$\rho(x,z) \leq r - \frac{q_\rho\varepsilon}{4} < r \Rightarrow B^{\mathrm{o}}\big(y, \frac{q_\rho\varepsilon}{4q_2}\big) \subset B^{\mathrm{o}}(x,r) \Rightarrow y \in \operatorname{int} B^{\mathrm{o}}(x,r).$$

□

Введем в рассмотрение множества $U_n(x,\varepsilon,\delta)$, которые определяются по индукции следующим образом

$$U_1(x,\varepsilon,\delta) = B^o(x,\varepsilon), \quad U_n(x,\varepsilon,\delta) = \bigcup_{y \in U_{n-1}(x,\varepsilon,\delta)} B^o(y, \varepsilon\delta^{n-1}).$$

Из построения вытекает, что множество $B_\delta(x,\varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(x,\varepsilon,\delta)$ открыто.

Теорема 3. $B^o(x,\varepsilon) \subset B_\delta(x,\varepsilon) \subset B^o(x, \frac{q_1\varepsilon}{1-q_2\delta})$ *при условии, что* $q_2\delta < 1$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $y \in B_\delta(x,\varepsilon)$. Тогда найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $y \in U_n(x,\varepsilon,\delta)$. Для удобства обозначим $x = x_1$, $y = x_n$. Из определения множества $U_n(x,\varepsilon,\delta)$ следует, что найдется шар $B^o(x_{n-1}, \varepsilon\delta^{n-1})$ такой, что

1^0 $x_n \in B^o(x_{n-1}, \varepsilon\delta^{n-1})$,

2^0 $x_{n-1} \in U_{n-1}(x,\varepsilon,\delta)$.

Из определения множества $U_{n-1}(x,\varepsilon,\delta)$ следует, что найдется шар $B^o(x_{n-2}, \varepsilon\delta^{n-2})$ такой, что

1^0 $x_{n-1} \in B^o(x_{n-2}, \varepsilon\delta^{n-1})$,

2^0 $x_{n-2} \in U_{n-2}(x,\varepsilon,\delta)$,

и т. д. В результате мы получим набор точек $x_1, \dots, x_n$, обладающий свойством $\rho_X(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon\delta^{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Оценим расстояние $\rho_X(x_1, x_n)$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\rho_X(x_1,x_n) &\leq q_1\rho_X(x_1,x_2) + q_2\rho_X(x_2,x_n) \leq q_1\varepsilon + q_2(q_1\rho_X(x_2,x_3) + q_2\rho_X(x_3,x_n)) \\ &\leq q_1\varepsilon + q_2q_1\varepsilon\delta + q_2^2(q_1\rho_X(x_3,x_4) + q_2\rho_X(x_4,x_n)) \\ &\leq q_1\varepsilon + q_2q_1\varepsilon\delta + q_2^2q_1\varepsilon\delta^2 + q_3^2(q_1\rho_X(x_4,x_5) + q_2\rho_X(x_5,x_n)) \\ &\leq q_1\varepsilon + q_2q_1\varepsilon\delta + q_2^2q_1\varepsilon\delta^2 + \dots + q_2^{n-3}q_1\varepsilon\delta^{n-3} + q_2^{n-2}\varepsilon\delta^{n-2} = q_1\varepsilon\frac{1-(q_2\delta)^{n-2}}{1-q_2\delta} + q_2^{n-2}\varepsilon\delta^{n-2} \\ &\leq \frac{q_1\varepsilon}{1-q_2\delta}.\end{aligned}$$

□

Из теоремы 3 вытекает свойство 1. Действительно, пусть $\frac{q_1\varepsilon}{1-q_2\delta} = r \Rightarrow \varepsilon = \frac{r}{q_1} - \frac{q_2\delta r}{q_1} = \frac{r}{q_1} - \epsilon$. Так как множество $B_\delta(x,\varepsilon)$ открыто, то из теоремы 3 мы получаем

$$B^{\mathrm{o}}\big(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon\big) \subset \operatorname{int} B^{\mathrm{o}}(x,r)$$

для всех достаточно малых чисел $\epsilon > 0$. Но тогда $B^{\circ}(x, \frac{r}{q_1}) \subset \operatorname{int} B^{\circ}(x,r)$; действительно, возьмем произвольную точку $y \in B^{\circ}(x, \frac{r}{q_1})$, тогда всегда найдется число $\epsilon_y > 0$ такое, что $y \in B^{\circ}\big(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon_y\big)$.

Рассмотрим множества $B_\delta(x,\varepsilon)$ из теоремы 3. Несложно видеть, что

(i) если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $B_\delta(x,\varepsilon_1) \subseteq B_\delta(x,\varepsilon_2)$,

(ii) $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} B_\delta(x,\varepsilon) = \{x\}\ \forall x \in X$,

(iii) $\bigcup\limits_{\varepsilon>0} B_\delta(x,\varepsilon) = X\ \forall x \in X$.

На X определим следующую функцию

$$d_\delta(x,y) = \inf\{r > 0 \mid y \in B_\delta(x,r)\}.$$

Тогда $B_\delta(x,r) = \{y \in X \mid d_\delta(x,y) < r\}$.

Теорема 4. *Функция d_δ является (q_1', q_2')-квазиметрикой для некоторых констант $q_1', q_2' \geq 1$, билипшицево эквивалентной (q_1,q_2)-квазиметрике ρ.*

Доказательство. Аксиома тождества для d_δ следует из (ii).

Из теоремы 3 вытекает, что

$$d_\delta(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \frac{d_\delta(x,y)}{1 - q_2\delta},$$

откуда

$$d_\delta(x,z) \leq \frac{q_1^2}{1-q_2\delta} d_\delta(x,y) + \frac{q_1 q_2}{1-q_2\delta} d_\delta(y,z).$$

□

Теорема 5. *Любой шар $B_\delta(x,r)$ является открытым множеством в топологии τ_{d_δ}.*

Доказательство. Напомним, что множество $B_\delta(x,r)$ открыто в топологии τ_ρ для любых $x \in X$ $r > 0$. Тогда теорема 5 вытекает из теоремы 3. □

3. Аксиомы отделимости в (q_1,q_2)-квазиметрических пространствах

Пример. Пусть $X = \{x_i\}$, $i = 0, 1, \dots,$ — счетное множество точек, принадлежащих отрезку $[0,1]$ такое, что $x_0 = 0$, $x_i = \frac{1}{2^{i-1}}$, $i \in \mathbb{N}$. Определим на множестве X функцию расстояния $\rho(x,y)$ следующим образом:

1^0 если $x = x_{2k}$, $y = x_{2n}$, где $k, n = 0, 1, \dots,$ то $\rho(x,y) = |x-y|$;

2^0 $\rho(x_{2k}, x_{2n-1}) = \frac{1}{2^{2n-1}}$, где $k, n \in \mathbb{N}$;

3^0 $\rho(x_0, x_{2n-1}) = \frac{1}{2^{2n-1}}$, где $n \in \mathbb{N}$;

4^0 $\rho(x_{2n-1}, x_i) = 1$, где $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \dots,$ но при этом $i \neq 2n-1$.

Покажем, что для ρ выполняется обычное неравенство треугольника. Понятно, что в случае $x = x_{2k}$, $y = x_{2m}$, $z = x_{2n}$, $k, m, n = 0, 1, \dots,$ мы имеем обычное неравенство треугольника $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Рассмотрим оставшиеся случаи:

$$1 = \rho(x_{2n-1}, x_0) < \rho(x_{2n-1}, x_i) + \rho(x_i, x_0) = 1 + \rho(x_i, x_0), \quad i, m \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{2^{2n-1}} = \rho(x_0, x_{2n-1}) < \rho(x_0, x_i) + \rho(x_i, x_{2n-1}) = \frac{1}{2^{2n-1}} + \dots, \quad i, n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{2^{2n-1}} = \rho(x_{2k}, x_{2n-1}) < \rho(x_{2k}, x_i) + \rho(x_i, x_{2n-1}) < \frac{1}{2^{2n-1}} + \dots, \quad k, i, n \in \mathbb{N}$$

$$1 = \rho(x_{2n-1}, x_i) < \rho(x_{2n-1}, x_j) + \rho(x_j, x_i) = 1 + \rho(x_j, x_i), \quad n, i, j \in \mathbb{N},$$

$$\rho(x_{2k}, x_{2n}) < \rho(x_{2k}, x_{2m-1}) + \rho(x_{2m-1}, x_{2n})$$
$$= \rho(x_{2k}, x_{2m-1}) + 1, \quad m \in \mathbb{N},\ k, n = 0, 1, \dots.$$

Таким образом, ρ — квазиметрика. При этом $\lim\limits_{i\to\infty} \rho(x_0, x_i) = 0$, но при этом

$$\lim_{i\to\infty} \rho(x_i, x_0) = \begin{cases} 1, & i = 2n-1, \\ 0, & i = 2n, \end{cases} \quad, n \in \mathbb{N}, \Rightarrow \liminf_{i\to\infty} \rho_X(x_i, x) = 0.$$

Лемма 1. *Рассмотрим (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ), удовлетворяющее условию $\underline{\lim}$-слабой симметрии. Пусть $z \in Lim\big(B^o(x, R)\big)$. Тогда $\rho(x, z) \le q_1 R$.*

Доказательство.

$$z \in Lim\big(B^o(x, R)\big) \Rightarrow \exists \{y_n\} \in B^o(x, R) : \ \rho(z, y_n) \to_{n\to\infty} 0.$$

Из $\underline{\lim}$-слабой симметричности (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, ρ) вытекает, что найдется подпоследовательность $\{y_{n_k}\} \subseteq \{y_n\}$ такая, что

$$\rho(y_{n_k}, z) \to_{k\to\infty} 0. \tag{2}$$

Мы имеем

$$\rho(x, z) \le q_1 \rho(x, y_{n_k}) + q_2 \rho(y_{n_k}, z) \Leftrightarrow \frac{\rho(x, z) - q_2 \rho(y_{n_k}, z)}{q_1} \le \rho(x, y_{n_k}). \tag{3}$$

Предположим, что $\rho(x, z) = q_1 R + \delta$ для некоторого числа $\delta > 0$. Тогда из (3) мы получаем

$$R + \frac{\delta - q_2 \rho(y_{n_k}, z)}{q_1} \le \rho(x, y_{n_k}). \tag{4}$$

Используя (2) и (4), мы всегда можем найти такое число k_0, что

$$\frac{\delta}{2q_1} \le \frac{\delta - q_2 \rho(y_{n_{k_0}}, z)}{q_1}.$$

Так как $y_{n_{k_0}} \in B^o(x, R)$, то $\rho(x, y_{n_{k_0}}) < R$, и мы приходим к противоречию с (3).

□

Следствие 1. *Рассмотрим (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ), удовлетворяющее условию $\underline{\lim}$-слабой симметрии. Тогда*

$$\overline{B^o(x, \frac{r}{q_1})} \subseteq B^o(x, r + \omega) \quad \forall \omega > 0.$$

Свойство 4. *q_0-симметрическое (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ) удовлетворяет аксиоме отделимости T_2.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $x, y \in X$. Пусть $\rho_X(x, y) = R$. Пусть ϵ — некоторое достаточно малое положительное число, и при этом $A = B^o(x, \epsilon) \cap B^o(y, \epsilon) \ne \emptyset \Rightarrow \exists z \in A$. Тогда

$$R = \rho_X(x, y) \le q_1 \rho_X(x, z) + q_2 \rho_X(z, y) \le q_1 \rho_X(x, z) + q_2 q_0 \rho_X(y, z) \le (q_1 + q_2 q_0)\epsilon,$$

чего не может быть для очень малых ϵ. Значит, найдется ϵ_0 такое, что $A = \emptyset$. С учетом теоремы 3 свойство 4 доказано.

□

Свойство 5. *$\underline{\lim}$-слабо симметрическое (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ) удовлетворяет аксиоме отделимости T_2.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $x, y \in X$. Пусть $\rho(x, y) = R$. Предположим, что нашлась последовательность положительных чисел $\{\epsilon_i\}$, монотонно стремящаяся к 0, такая, что $A_i = B^o(x, \epsilon_i) \cap B^o(x, \epsilon_i) \neq \emptyset \Rightarrow \exists z_i \in A$. Тогда

$$R = \rho(x, y) \leq q_1\rho(x, z_i) + q_2\rho(z_i, y) \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Мы имеем $\lim\limits_{i\to\infty} \rho_X(x, z_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \epsilon_i = 0$. Также $\lim\limits_{i\to\infty} \rho_X(y, z_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \epsilon_i = 0$, откуда, в силу условия $\underline{\lim}$-слабой симметрии, вытекает, что найдется подпоследовательность $\{z_{i_k}\} \subset \{z_i\}$ такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} \rho_X(z_{i_k}, y) = 0$, что противоречит (5). Значит, такой последовательности $\{\epsilon_i\}$ быть не может, откуда следует, что найдется ϵ_0 такое, что $B^o(x, \epsilon_0) \cap B^o(x, \epsilon_0) = \emptyset$. С учетом теоремы 3 свойство 5 доказано.

□

Теорема 6. *(q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ), удовлетворяющее условию $\underline{\lim}$-слабой симметрии, удовлетворяет аксиоме отделимости T_3.*

Доказательство. Пусть $A \subset X$ — произвольное замкнутое множество. Рассмотрим некоторую точку $x \notin A$. Найдется число $r > 0$ такое, что $B^{\mathrm{o}}(x, r) \cap A = \emptyset$ (в противном случае $x \in Lim(A) \Rightarrow x \in A$, так как множество A замкнутое). По теореме 3 открытое множество $B_\delta\big(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon\big)$, $\epsilon = \frac{q_2\delta r}{q_1}$, принадлежит шару $B^{\mathrm{o}}(x, r)$; кроме того $B^{\mathrm{o}}\big(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon\big) \subset B_\delta\big(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon\big)$. По следствию 1 мы имеем

$$\overline{B^{\mathrm{o}}\big(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon\big)} \subseteq B^{\mathrm{o}}\big(x, r - q_1\epsilon + \omega\big).$$

Так как $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно мало, то мы всегда можем подобрать $\omega > 0$ так, чтобы $B^{\mathrm{o}}\big(x, r - q_1\epsilon + \omega\big) \subset B^{\mathrm{o}}(x, r)$; тогда $A \subset V_A$, где множество $V_A = X \backslash \overline{B^{\mathrm{o}}\big(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon\big)}$ открытое. Обозначим $r' = \frac{r}{q_1} - \epsilon$. Из теоремы 3 вытекает, что открытое множество $V_x = B_\delta\big(x, \frac{r'}{q_1} - \epsilon'\big)$, $\epsilon' = \frac{q_2\delta r'}{q_1}$, принадлежит шару $B^{\mathrm{o}}(x, r')$, а так как $V_A \cap B^{\mathrm{o}}(x, r') = \emptyset$, то и $V_A \cap V_x = \emptyset$.

□

References

[1] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, L. V. Lokutsievskii, K. V. Storojuk, *Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics*, Top. Appl., **221** (2017), 178-194. MR3624455

[2] W. A. Wilson, *On quasi-metric spaces*, American J. of Math., **53**:3 (1931), 675–684. MR1506845

[3] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, *The theory of (q1; q2)-quasimetric spaces and coincidence points*, Доклады АН, **469**:5 (2016), 527–531. MR3561341

[4] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, *Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., (2017) (accepted).

[5] A. V. Greshnov, M. V. Tryamkin, *Exact values of constants in the generalized triangle inequality for some $(1, q_2)$-quasimetrics on canonical Carnot groups*, Math. Notes, **98**:3-4 (2015), 694–698. MR3438519

[6] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variables methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, 1993. MR1232192

[7] R. Alvarado, M. Mitrea, *Hardy spaces on Ahlfors-Regular quasi metric spaces. A sharp Theory*, Lect. Notes in Math., **2142**, Springer, Cham, 2015. MR3310009

[8] R. A. Masías, C. Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math., **33** (1970), 257–270. MR546295

[9] G. Hu, D. Yang, Y. Zhou, *Boundness of singular integrals in Hardy spaces on space of homogeneous type*, Taiwanese Journ. of Math., **13**:1 (2009), 91–135. MR2489309

[10] H. Aimar, L. Forzani, R. Toledano, *Balls and quasi-metrics: a space of homogeneous type modeling the real analysis related to the Monge-Ampére equation*, Fourier Anal. Appl., **4**: 4-5 (1998), 377–381. MR1658608

Alexandr Valer'yevich Greshnov
Novosibirsk State University,
ul. Pirogova, 1,
630090, Novosibirsk, Russia,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: greshnov@math.nsc.ru