

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 14, стр. 765–773 (2017)

УДК 515.124.2

DOI 10.17377/semi.2017.14.065

MSC 30L99, 53C23, 54D10

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ РАССТОЯНИЯ И АКСИОМЫ
ОТДЕЛИМОСТИ НА (q_1, q_2) -КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ
ПРОСТРАНСТВАХ

А.В. ГРЕШНОВ

ABSTRACT. We get some estimates for interior of arbitrary (q_1, q_2) -quasimetric ball. We prove theorem of regularization of (q_1, q_2) -quasimetric that generalizes corresponding results of R. Alvarado and M. Mitrea. We introduce a notion of $\underline{\lim}$ -weak symmetric (q_1, q_2) -quasimetric space and prove that every $\underline{\lim}$ -weak symmetric (q_1, q_2) -quasimetric space satisfies T_3 -axiom.

Keywords: distance function, (q_1, q_2) -quasimetric, open set, interior of (q_1, q_2) -quasimetric ball, $\underline{\lim}$ -weak symmetry, separation axioms, regularization of a (q_1, q_2) -quasimetric .

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть X — некоторое множество, содержащее не менее двух точек. Функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ называется *функцией расстояния* на X , если она удовлетворяет *аксиоме тождества*: $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Несложно проверить, что $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow \rho(y, x) = 0$.

Определение 1 ([1]). *Функция расстояния ρ , определенная на X , называется f -квазиметрикой, если имеет место следующее f -неравенство треугольника*

$$\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z)) \quad \forall x, y, z \in X,$$

GRESHNOV, A.V., REGULARIZATION OF DISTANCE FUNCTIONS AND SEPARATION AXIOMS ON (q_1, q_2) -QUASIMETRIC SPACES.

© 2017 ГРЕШНОВ А.В.

Публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Проект № 1.3087.2017/4.6).

Поступила 11 июля 2017 г., опубликована 4 августа 2017 г.

где $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ — некоторая функция такая, что $f(t_1, t_2) \rightarrow 0$ при $(t_1, t_2) \rightarrow (0, 0)$. Пара (X, ρ) в этом случае называется f -квазиметрическим пространством.

В случае $f(t_1, t_2) = t_1 + t_2$ функция ρ называется квазиметрикой, а (X, ρ) — квазиметрическим пространством [2].

Определение 2 ([1], [3]–[5]). Пара (X, ρ) , где функция расстояния ρ удовлетворяет (q_1, q_2) -обобщенному неравенству треугольника

$$\rho(x, z) \leq q_1 \rho(x, y) + q_2 \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X,$$

где $q_1, q_2 > 0$ — некоторые константы, называется (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством, а функция расстояния ρ — (q_1, q_2) -квазиметрикой. Если (q_1, q_2) -квазиметрика ρ удовлетворяет условию q_0 -симметричности, т. е.

$$\rho(x, y) \leq q_0 \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

для некоторой константы $q_0 > 0$, то будем называть ее q_0 -симметрической (симметрической в случае $q_0 = 1$).

Несложно проверить, что всегда $q_2, q_1, q_0 \geq 1$. Если в определении 2 положить $q_1 = q_2 = 1$, то мы получим определение квазиметрики, данного выше. В ряде работ, связанных с функциональным анализом, квазиметрикой называют q_0 -симметрическую [6], [7] (симметрическую [8]–[10]) (q, q) -квазиметрику.

В дальнейшем, если специально не оговаривается, в работе мы будем рассматривать (q_1, q_2) -квазиметрические пространства (X, ρ) (q_0 -симметричность для ρ не предполагается).

Множество

$$B^\circ(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

будем называть шаром с центром в точке x радиуса r . Множество $U \in X$ будем называть открытым, если для любой точки $x \in U$ найдется число r_x такое, что $B^\circ(x, r_x) \subset U$. Открытые множества формируют топологию τ_ρ на X . При этом сами шары $\{B^\circ(x, r)\}$ могут и не быть открытыми даже в случае симметрических (q_1, q_2) -квазиметрических пространств (см. примеры в [1, 4]). Достаточным условием того, что (q_1, q_2) -квазиметрический шар является открытым множеством, является полунепрерывность сверху по первому аргументу (q_1, q_2) -квазиметрики $\rho(x, y)$ (ср. с [6]), в частности, когда $q_1 = 1$ (см. [1], [3], [4]).

Окрестностью множества $A \subset X$ мы назовем любое подмножество из X , содержащее открытое множество U такое, что $A \subseteq U$. Точку x_0 назовем предельной точкой множества $A \subset X$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$(A \cap B^\circ(x_0, \varepsilon)) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Совокупность всех предельных точек множества A обозначаем как $Lim(A)$. Множество $A \in X$ будем называть замкнутым, если множество $X \setminus A$ открыто. Несложно показать, что: A — замкнуто \Leftrightarrow множество A содержит все свои предельные точки. Говорим, что последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к точке $x_0 \in X$, если выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_n) = 0$.

В работе [1] была получена следующая оценка «массивности» внутренности f -квазиметрического шара.

Теорема 1 ([1], Lemma 1.4). Пусть (X, ρ) — f -квазиметрическое пространство. Тогда $B^\circ(x, \theta(r)) \subset \text{int} B^\circ(x, r)$, где $\theta(r) = \{t_1 \geq 0 \mid \overline{\lim}_{t_2 \rightarrow 0^+} f(t_1, t_2) \geq r\}$.

Из теоремы 1 вытекает (см. [1]), что в случае (q_1, q_2) -квазиметрических пространств имеет место включение

$$(1) \quad B^\circ(x, \frac{r}{q_1}) \subset \text{int} B^\circ(x, r).$$

Одним из главных результатов работы [1] является следующая квазиметризацияционная

Теорема 2 ([1], Theorem 3.1). *Любое f -квазиметрическое пространство квазиметризуемо, а любое слабо симметрическое f -квазиметрическое пространство метризуемо.*

Определение 3 ([1]). *f -квазиметрическое пространство является слабо симметрическим, если выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$.*

Примером слабо симметрического f -квазиметрического пространства является q_0 -симметрическое (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство.

Перечислим основные результаты работы.

В § 2 мы изучаем свойства (q_1, q_2) -квазиметрических шаров, связанных с «массивностью» их внутренности: в свойстве 1 мы приводим другое (по сравнению с работой [1]) доказательство включения (1), а в свойстве 3 «уточняем» это включение. В теореме 3 получена более тонкая, по сравнению с (1), оценка «массивности» внутренности (q_1, q_2) -квазиметрического шара в терминах принадлежности шару открытого множества. Идея доказательства теоремы 3 принадлежит К. В. Сторожуку. В теоремах 4, 5 мы доказали следующее утверждение о регуляризации (q_1, q_2) -квазиметрики: *для любой (q_1, q_2) -квазиметрики ρ существует билипшицево эквивалентная ей (q'_1, q'_2) -квазиметрика ρ' такая, что любой шар $\{y \in X \mid \rho'(x, y) < r\}$ является открытым множеством в топологии $\tau_{\rho'}$.* Отметим, что свойство (q_1, q_2) -квазиметрических шаров быть открытыми в соответствующей топологии важно для построения теории функциональных пространств. Теоремы 4, 5 обобщают на случай (q_1, q_2) -квазиметрических пространств соответствующие утверждения, доказанные для симметрических [8] и для q_0 -симметрических [7] (q, q) -квазиметрических пространств. Метод доказательства теорем 4, 5 основан на использовании теоремы 3 и является новым (по сравнению методами работ [7], [8]).

В § 2 мы изучаем некоторые топологические аксиомы отделимости в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах.

Определение 4. *Назовем (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство $\underline{\text{lim}}$ -слабо симметрическим, если $\forall B^\circ(x, R) \forall z \in \text{Lim}(B^\circ(x, R)) \exists \{y_i\} \subset B^\circ(x, R) : \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(z, y_i) = 0 \Rightarrow \exists \{y_{i_n}\} \subseteq \{y_i\} : \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_{i_n}, z) = 0$.*

Очевидно, что любое слабо симметрическое (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство является $\underline{\text{lim}}$ -слабо симметрическим. В § 2 мы приводим пример $\underline{\text{lim}}$ -слабо симметрического (q_1, q_2) -квазиметрического пространства, не являющегося слабо симметрическим. Известно [1], что f -квазиметрическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_2 тогда и только тогда, когда любая сходящаяся в нем последовательность имеет единственный предел. В § 2 в свойствах 4 и 5, используя теорему 3, мы приводим несложную проверку аксиомы отделимости T_2 для достаточно широкого класса (q_1, q_2) -квазиметрических пространств. Выполнение аксиом отделимости T_3, T_4 для слабо симметрических (q_1, q_2) -квазиметрических пространств вытекает из теоремы 2. Однако

теорема о метризации для $\underline{\text{lim}}$ -слабо симметрических (q_1, q_2) -квазиметрических пространств не известна. В § 2 мы доказываем выполнение аксиомы отделимости T_3 для $\underline{\text{lim}}$ -слабо симметрических (q_1, q_2) -квазиметрических пространств.

Автор выражает глубокую благодарность А. В. Арутюнову, Л. В. Локуциевскому, К. В. Сторожуку за полезные дискуссии.

2. «МАССИВНОСТЬ» ВНУТРЕННОСТИ ШАРА И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ
РАССТОЯНИЯ В (q_1, q_2) -КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Свойство 1. Для любого (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, ρ) выполняется включение

$$B^\circ(x, \frac{r}{q_1}) \subset \text{int } B^\circ(x, r) \quad \forall r > 0 \quad \forall x \in (X, \rho).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $y \in B^\circ(x, \frac{r}{q_1})$, тогда

$$\rho(x, y) = \frac{r}{q_1} - \varepsilon$$

для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Рассмотрим любую точку $z \in X$ такую, что $\rho(y, z) < \frac{q_1\varepsilon}{2q_2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &\leq q_1\rho(x, y) + q_2\rho(y, z) < r - q_1\varepsilon + \frac{q_1\varepsilon}{2} = r - \frac{q_1\varepsilon}{2} < r \\ &\Rightarrow B^\circ(y, \frac{q_1\varepsilon}{2q_2}) \subset B^\circ(x, r) \Rightarrow y \in \text{int } B^\circ(x, r). \end{aligned}$$

□

Для (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, ρ) через $Q = Q(\rho)$ обозначим множество таких точек $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$, что для ρ выполняется (q_1, q_2) -обобщенное неравенство треугольника. Непосредственно из определения множества Q вытекает следующее

Свойство 2 ([3], [4]). 1^0 Множество $Q = Q(\rho)$ выпукло замкнуто, и при этом $Q \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 1\}$; 2^0 условие $(1, 1) \in Q$ равносильно тому, что ρ — квазиметрика; 3^0 если (q_1, q_2) -квазиметрика является симметрической, то множество Q симметрично относительно биссектрисы правого верхнего координатного угла евклидовой плоскости.

Обозначим $q_\rho = \inf\{q_1 \mid (q_1, q_2) \in Q(\rho)\}$.

Свойство 3. Для любого (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, ρ) выполняется включение

$$B^\circ(x, \frac{r}{q_\rho}) \subset \text{int } B^\circ(x, r) \quad \forall r > 0 \quad \forall x \in (X, \rho).$$

Доказательство. Если найдется точка $(q_1, q_2) \in Q$ такая, что $q_1 = q_\rho$, то этот случай доказан в свойстве 1. Рассмотрим оставшуюся возможность. Рассмотрим произвольную точку $y \in B^\circ(x, \frac{r}{q_\rho})$, тогда $\rho(x, y) = \frac{r}{q_\rho} - \varepsilon$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Пусть $(q_1, q_2) \in Q$, тогда $q_\rho = q_1 - \delta$ для некоторого числа $\delta > 0$. Пусть $\alpha > 0$ — некоторое достаточно малое число. Рассмотрим точку $z \in X$ такую, что $\rho(y, z) < \alpha$. Тогда

$$\rho(x, z) \leq q_1\rho(x, y) + q_2\rho(y, z) < (q_\rho + \delta)(\frac{r}{q_\rho} - \varepsilon) + q_2\alpha = r - q_\rho\varepsilon + \delta(\frac{r}{q_\rho} - \varepsilon) + q_2\alpha.$$

Из определения числа q_ρ следует, что для любого достаточно малого числа δ найдется число q_1 такое, что $(q_1, q_2) \in Q$. Выберем δ так, чтобы $\delta(\frac{r}{q_\rho} - \varepsilon) < \frac{q_\rho \varepsilon}{2}$. После этого выберем число α так, чтобы $q_2 \alpha < \frac{q_\rho \varepsilon}{4}$. Тогда мы будем иметь

$$\rho(x, z) \leq r - \frac{q_\rho \varepsilon}{4} < r \Rightarrow B^\circ(y, \frac{q_\rho \varepsilon}{4q_2}) \subset B^\circ(x, r) \Rightarrow y \in \text{int } B^\circ(x, r).$$

□

Введем в рассмотрение множества $U_n(x, \varepsilon, \delta)$, которые определяются по индукции следующим образом

$$U_1(x, \varepsilon, \delta) = B^\circ(x, \varepsilon), \quad U_n(x, \varepsilon, \delta) = \bigcup_{y \in U_{n-1}(x, \varepsilon, \delta)} B^\circ(y, \varepsilon \delta^{n-1}).$$

Из построения вытекает, что множество $B_\delta(x, \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x, \varepsilon, \delta)$ открыто.

Теорема 3. $B^\circ(x, \varepsilon) \subset B_\delta(x, \varepsilon) \subset B^\circ(x, \frac{q_1 \varepsilon}{1 - q_2 \delta})$ при условии, что $q_2 \delta < 1$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $y \in B_\delta(x, \varepsilon)$. Тогда найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $y \in U_n(x, \varepsilon, \delta)$. Для удобства обозначим $x = x_1, y = x_n$. Из определения множества $U_n(x, \varepsilon, \delta)$ следует, что найдется шар $B^\circ(x_{n-1}, \varepsilon \delta^{n-1})$ такой, что

- 1⁰ $x_n \in B^\circ(x_{n-1}, \varepsilon \delta^{n-1})$,
- 2⁰ $x_{n-1} \in U_{n-1}(x, \varepsilon, \delta)$.

Из определения множества $U_{n-1}(x, \varepsilon, \delta)$ следует, что найдется шар $B^\circ(x_{n-2}, \varepsilon \delta^{n-2})$ такой, что

- 1⁰ $x_{n-1} \in B^\circ(x_{n-2}, \varepsilon \delta^{n-1})$,
- 2⁰ $x_{n-2} \in U_{n-2}(x, \varepsilon, \delta)$,

и т. д. В результате мы получим набор точек x_1, \dots, x_n , обладающий свойством $\rho_X(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon \delta^{i-1}, i = 1, \dots, n$. Оценим расстояние $\rho_X(x_1, x_n)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \rho_X(x_1, x_n) &\leq q_1 \rho_X(x_1, x_2) + q_2 \rho_X(x_2, x_n) \leq q_1 \varepsilon + q_2 (q_1 \rho_X(x_2, x_3) + q_2 \rho_X(x_3, x_n)) \\ &\leq q_1 \varepsilon + q_2 q_1 \varepsilon \delta + q_2^2 (q_1 \rho_X(x_3, x_4) + q_2 \rho_X(x_4, x_n)) \\ &\leq q_1 \varepsilon + q_2 q_1 \varepsilon \delta + q_2^2 q_1 \varepsilon \delta^2 + q_2^3 (q_1 \rho_X(x_4, x_5) + q_2 \rho_X(x_5, x_n)) \\ &\leq q_1 \varepsilon + q_2 q_1 \varepsilon \delta + q_2^2 q_1 \varepsilon \delta^2 + \dots + q_2^{n-3} q_1 \varepsilon \delta^{n-3} + q_2^{n-2} \varepsilon \delta^{n-2} = q_1 \varepsilon \frac{1 - (q_2 \delta)^{n-2}}{1 - q_2 \delta} + q_2^{n-2} \varepsilon \delta^{n-2} \\ &\leq \frac{q_1 \varepsilon}{1 - q_2 \delta}. \end{aligned}$$

□

Из теоремы 3 вытекает свойство 1. Действительно, пусть $\frac{q_1 \varepsilon}{1 - q_2 \delta} = r \Rightarrow \varepsilon = \frac{r}{q_1} - \frac{q_2 \delta r}{q_1} = \frac{r}{q_1} - \varepsilon$. Так как множество $B_\delta(x, \varepsilon)$ открыто, то из теоремы 3 мы получаем

$$B^\circ(x, \frac{r}{q_1} - \varepsilon) \subset \text{int } B^\circ(x, r)$$

для всех достаточно малых чисел $\varepsilon > 0$. Но тогда $B^\circ(x, \frac{r}{q_1}) \subset \text{int } B^\circ(x, r)$; действительно, возьмем произвольную точку $y \in B^\circ(x, \frac{r}{q_1})$, тогда всегда найдется число $\varepsilon_y > 0$ такое, что $y \in B^\circ(x, \frac{r}{q_1} - \varepsilon_y)$.

Рассмотрим множества $B_\delta(x, \varepsilon)$ из теоремы 3. Несложно видеть, что

- (i) если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $B_\delta(x, \varepsilon_1) \subseteq B_\delta(x, \varepsilon_2)$,
- (ii) $\bigcap_{\varepsilon > 0} B_\delta(x, \varepsilon) = \{x\} \forall x \in X$,
- (iii) $\bigcup_{\varepsilon > 0} B_\delta(x, \varepsilon) = X \forall x \in X$.

На X определим следующую функцию

$$d_\delta(x, y) = \inf\{r > 0 \mid y \in B_\delta(x, r)\}.$$

Тогда $B_\delta(x, r) = \{y \in X \mid d_\delta(x, y) < r\}$.

Теорема 4. Функция d_δ является (q'_1, q'_2) -квазиметрикой для некоторых констант $q'_1, q'_2 \geq 1$, билипшицево эквивалентной (q_1, q_2) -квазиметрике ρ .

Доказательство. Аксиома тождества для d_δ следует из (ii).

Из теоремы 3 вытекает, что

$$d_\delta(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \frac{d_\delta(x, y)}{1 - q_2\delta},$$

откуда

$$d_\delta(x, z) \leq \frac{q_1^2}{1 - q_2\delta} d_\delta(x, y) + \frac{q_1 q_2}{1 - q_2\delta} d_\delta(y, z).$$

□

Теорема 5. Любой шар $B_\delta(x, r)$ является открытым множеством в топологии τ_{d_δ} .

Доказательство. Напомним, что множество $B_\delta(x, r)$ открыто в топологии τ_ρ для любых $x \in X$ $r > 0$. Тогда теорема 5 вытекает из теоремы 3. □

3. АКСИОМЫ ОТДЕЛИМОСТИ В (q_1, q_2) -КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пример. Пусть $X = \{x_i\}$, $i = 0, 1, \dots$, — счетное множество точек, принадлежащих отрезку $[0, 1]$ такое, что $x_0 = 0$, $x_i = \frac{1}{2^{i-1}}$, $i \in \mathbb{N}$. Определим на множестве X функцию расстояния $\rho(x, y)$ следующим образом:

$$1^0 \text{ если } x = x_{2k}, y = x_{2n}, \text{ где } k, n = 0, 1, \dots, \text{ то } \rho(x, y) = |x - y|;$$

$$2^0 \rho(x_{2k}, x_{2n-1}) = \frac{1}{2^{2n-1}}, \text{ где } k, n \in \mathbb{N};$$

$$3^0 \rho(x_0, x_{2n-1}) = \frac{1}{2^{2n-1}}, \text{ где } n \in \mathbb{N};$$

$$4^0 \rho(x_{2n-1}, x_i) = 1, \text{ где } n \in \mathbb{N}, i = 0, 1, \dots, \text{ но при этом } i \neq 2n - 1.$$

Покажем, что для ρ выполняется обычное неравенство треугольника. Понятно, что в случае $x = x_{2k}$, $y = x_{2m}$, $z = x_{2n}$, $k, m, n = 0, 1, \dots$, мы имеем обычное неравенство треугольника $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Рассмотрим оставшиеся случаи:

$$1 = \rho(x_{2n-1}, x_0) < \rho(x_{2n-1}, x_i) + \rho(x_i, x_0) = 1 + \rho(x_i, x_0), \quad i, m \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{2^{2n-1}} = \rho(x_0, x_{2n-1}) < \rho(x_0, x_i) + \rho(x_i, x_{2n-1}) = \frac{1}{2^{2n-1}} + \dots, \quad i, n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{2^{2n-1}} = \rho(x_{2k}, x_{2n-1}) < \rho(x_{2k}, x_i) + \rho(x_i, x_{2n-1}) < \frac{1}{2^{2n-1}} + \dots, \quad k, i, n \in \mathbb{N}$$

$$1 = \rho(x_{2n-1}, x_i) < \rho(x_{2n-1}, x_j) + \rho(x_j, x_i) = 1 + \rho(x_j, x_i), \quad n, i, j \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} \rho(x_{2k}, x_{2n}) &< \rho(x_{2k}, x_{2m-1}) + \rho(x_{2m-1}, x_{2n}) \\ &= \rho(x_{2k}, x_{2m-1}) + 1, \quad m \in \mathbb{N}, k, n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, ρ — квазиметрика. При этом $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_i) = 0$, но при этом

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(x_i, x_0) = \begin{cases} 1, & i = 2n - 1, \\ 0, & i = 2n, \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \Rightarrow \liminf_{i \rightarrow \infty} \rho_X(x_i, x) = 0.$$

Лемма 1. Рассмотрим (q_1, q_2) -квазиметрическое $\underline{\lim}$ -слабо симметрическое пространство (X, ρ) . Пусть $z \in \text{Lim}(B^\circ(x, R))$. Тогда $\rho(x, z) \leq q_1 R$.

Доказательство. Так как $z \in \text{Lim}(B^\circ(x, R))$, то найдутся последовательность $\{y_n\} \in B^\circ(x, R)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z, y_n) = 0$, и подпоследовательность $\{y_{n_k}\} \subseteq \{y_n\}$ такая, что

$$(2) \quad \rho(y_{n_k}, z) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0.$$

Мы имеем

$$(3) \quad \rho(x, z) \leq q_1 \rho(x, y_{n_k}) + q_2 \rho(y_{n_k}, z) \Leftrightarrow \frac{\rho(x, z) - q_2 \rho(y_{n_k}, z)}{q_1} \leq \rho(x, y_{n_k}).$$

Предположим, что $\rho(x, z) = q_1 R + \delta$ для некоторого числа $\delta > 0$. Тогда из (3) мы получаем

$$(4) \quad R + \frac{\delta - q_2 \rho(y_{n_k}, z)}{q_1} \leq \rho(x, y_{n_k}).$$

Используя (2) и (4), мы всегда можем найти такое число k_0 , что

$$\frac{\delta}{2q_1} \leq \frac{\delta - q_2 \rho(y_{n_{k_0}}, z)}{q_1}.$$

Так как $y_{n_{k_0}} \in B^\circ(x, R)$, то $\rho(x, y_{n_{k_0}}) < R$, и мы приходим к противоречию с (3). □

Следствие 1. Для $\underline{\lim}$ -слабо симметрических пространств выполняется

$$\overline{B^\circ(x, \frac{r}{q_1})} \subseteq B^\circ(x, r + \omega) \quad \forall \omega > 0.$$

Свойство 4. q_0 -симметрическое (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ) удовлетворяет аксиоме отделимости T_2 .

Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $x, y \in X$. Пусть $\rho_X(x, y) = R$. Пусть ϵ — некоторое достаточно малое положительное число, и при этом $A = B^\circ(x, \epsilon) \cap B^\circ(y, \epsilon) \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in A$. Тогда

$$R = \rho_X(x, y) \leq q_1 \rho_X(x, z) + q_2 \rho_X(z, y) \leq q_1 \rho_X(x, z) + q_2 q_0 \rho_X(y, z) \leq (q_1 + q_2 q_0) \epsilon,$$

чего не может быть для очень малых ϵ . Значит, найдется ϵ_0 такое, что $A = \emptyset$. С учетом теоремы 3 свойство 4 доказано. □

Свойство 5. Пусть (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ) удовлетворяет условию $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(a, z_i) = 0 \exists \{x_i\} \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(a, x_i) = 0 \Rightarrow \rho(x_i, a) = 0$, причем $\{x_i\}$ не зависит от выбора $a \in \text{Lim}(\{z_i\})$. Тогда (X, ρ) удовлетворяет аксиоме отделимости T_2 .

Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $x, y \in X$. Пусть $\rho(x, y) = R$. Предположим, что нашлась последовательность положительных чисел $\{\epsilon_i\}$, монотонно стремящаяся к 0, такая, что $A_i = B^o(x, \epsilon_i) \cap B^o(y, \epsilon_i) \neq \emptyset \Rightarrow \exists z_i \in A_i$. Тогда

$$(5) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(x, z_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(y, z_i) = 0.$$

Тогда найдется $\{x_i\}$ такая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_X(x, x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho_X(y, x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho_X(x_i, y) = 0$, что противоречит оценке $R \leq q_1 \rho(x, x_i) + q_2 \rho(x_i, y)$. Значит, такой последовательности $\{\epsilon_i\}$ быть не может, откуда следует, что найдется ϵ_0 такое, что $B^o(x, \epsilon_0) \cap B^o(y, \epsilon_0) = \emptyset$. С учетом теоремы 3 свойство 5 доказано. \square

Теорема 6. (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ) , удовлетворяющее условию $\underline{\text{lim}}$ -слабой симметрии, удовлетворяет аксиоме отделимости T_3 .

Доказательство. Пусть $A \subset X$ — произвольное замкнутое множество. Рассмотрим некоторую точку $x \notin A$. Найдется число $r > 0$ такое, что $B^o(x, r) \cap A = \emptyset$ (в противном случае $x \in \text{Lim}(A) \Rightarrow x \in A$, так как множество A замкнутое). По теореме 3 открытое множество $B_\delta(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon)$, $\epsilon = \frac{q_2 \delta r}{q_1}$, принадлежит шару $B^o(x, r)$; кроме того $B^o(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon) \subset B_\delta(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon)$. По следствию 1 мы имеем

$$\overline{B^o(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon)} \subseteq B^o(x, r - q_1 \epsilon + \omega).$$

Так как $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно мало, то мы всегда можем подобрать $\omega > 0$ так, чтобы $\overline{B^o(x, r - q_1 \epsilon + \omega)} \subset B^o(x, r)$; тогда $A \subset V_A$, где множество $V_A = X \setminus \overline{B^o(x, \frac{r}{q_1} - \epsilon)}$ открытое. Обозначим $r' = \frac{r}{q_1} - \epsilon$. Из теоремы 3 вытекает, что открытое множество $V_x = B_\delta(x, \frac{r'}{q_1} - \epsilon')$, $\epsilon' = \frac{q_2 \delta r'}{q_1}$, принадлежит шару $B^o(x, r')$, а так как $V_A \cap B^o(x, r') = \emptyset$, то и $V_A \cap V_x = \emptyset$. \square

REFERENCES

- [1] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, L. V. Lokutsievskii, K. V. Storozuk, *Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f -quasimetrics*, Top. Appl., **221** (2017), 178–194. MR3624455
- [2] W. A. Wilson, *On quasi-metric spaces*, American J. of Math., **53:3** (1931), 675–684. MR1506845
- [3] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, *The theory of (q_1, q_2) -quasimetric spaces and coincidence points*, Доклады АН, **469:5** (2016), 527–531. MR3561341
- [4] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, *Theory of (q_1, q_2) -quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., (2017) (accepted).
- [5] A. V. Greshnov, M. V. Tryamkin, *Exact values of constants in the generalized triangle inequality for some $(1, q_2)$ -quasimetrics on canonical Carnot groups*, Math. Notes, **98:3-4** (2015), 694–698. MR3438519
- [6] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variables methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, 1993. MR1232192
- [7] R. Alvarado, M. Mitrea, *Hardy spaces on Ahlfors-Regular quasi metric spaces. A sharp Theory*, Lect. Notes in Math., **2142**, Springer, Cham, 2015. MR3310009
- [8] R. A. Masías, C. Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math., **33** (1970), 257–270. MR546295
- [9] G. Hu, D. Yang, Y. Zhou, *Boundness of singular integrals in Hardy spaces on space of homogeneous type*, Taiwanese Journ. of Math., **13:1** (2009), 91–135. MR2489309

- [10] H. Aimar, L. Forzani, R. Toledano, *Balls and quasi-metrics: a space of homogeneous type modeling the real analysis related to the Monge-Ampère equation*, *Fourier Anal. Appl.*, **4**: 4-5 (1998), 377–381. MR1658608

ALEXANDR VALER'YEVICH GRESHNOV
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
UL. PIROGOVA, 1,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA,
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. КОПТУГА, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: greshnov@math.nsc.ru