S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 794–806 (2017) УДК 517.51

DOI 10.17377/semi.2017.14.067 MSC 46E35

ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ СУММИРУЕМОСТИ

А.С. РОМАНОВ

Abstract. We consider some problems associated with the exchange of a variable in Sobolev spaces with a variable exponent of summability.

Keywords: Sobolev space, embedding theorem, variable exponent of summability.

Эта краткая заметка посвящена частному случаю задачи о замене переменной в пространствах Соболева с переменным показателем суммируемости.

Изучение различных вопросов, связанных с заменами переменной, сохраняющими классы функций с обобщенными производными, имеет богатую историю, начинающуюся с работы С.Л. Соболева [1], опубликованной в 1941 году. При этом полное описание допустимых замен переменной при различных показателях суммируемости для пространств Соболева с первыми производными было получено только в 70-х годах прошлого века в работах С.К. Водопьянова и В.М. Гольдштейна [2, 3]. Полученные результаты оказались достаточно удивительными – классы отображений, индуцирующих изоморфизмы пространств Соболева L^1_p, совпадают с геометрическими классами квазиконформных отображений при равенстве показателя p и размерности евклидова пространства и квазиизометрических отображений при больших показателях суммируемости. Такое пересечение теории банаховых функциональных пространств и теории пространственных отображений стимулировало активное и подробное исследование вопроса. В последующие годы изучались операторы

Romanov, A.S., The composition operators in Sobolev spaces with variable exponent of summability.

Работа поддержана РНФ (соглашение № 16-41-02004), РФФИ (проект № 17-01-00801).

Поступила 22 июля 2017, опубликована 17 августа 2017.

композиции в различных функциональных пространствах с обобщенной гладкостью - в пространствах Бесова [4], в пространствах Лизоркина – Трибеля [5], в пространствах потенциалов Рисса и Бесселя [6], в пространствах Соболева на группах Карно [7] ... Помимо изоморфизмов рассматривались ограниченные операторы композиции, действующие из пространства L^1_p в пространство $L^1_q(q \leq p)$. Возникающие при этом классы отображений в некотором смысле можно считать *квазиконформными в среднем.*

К настоящему времени в евклидовых областях, в основном благодаря разработанному С.К. Водопьяновым новому подходу [8], полностью решен вопрос описания структурных изоморфизмов классических пространств Соболева с первыми обобщенными производными.

Нас будут интересовать вопросы, связанные с операторами замены переменной в пространствах Соболева с переменным показателем суммируемости. В данной заметке мы рассмотрим простой случай, когда пространство Соболева вложено в пространство непрерывных функций. Однако и в этой ситуации возникают дополнительные проблемы, которых нет при изучении замен переменной для пространств Соболева с постоянным показателем суммируемости.

I. Классы функций с переменным показателем суммируемости

В данном параграфе мы ограничимся минимальной информацией, необходимой понимания последующего текста.

Рассмотрим метрическое пространство (X, d) с конечным диаметром и конечную борелевскую меру μ с носителем в X. Фиксируем положительную измеримую функцию $p : X \to [1, \infty)$ и положим $p_- = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in X} p(x)$, $p^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} p(x)$. При $1 < p(x) < \infty$ сопряженный показатель $p'(x)$ определим стандартным равенством $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p'(x)} = 1$.

На множестве измеримых функций $f : X \to R$ введем функционал

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int\limits_X |f(x)|^{p(x)} d\mu.$$

Пространство Лебега с переменным показателем суммируемости $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ определим как класс всех таких функций f, что $\rho_{p(\cdot)}(\lambda f) < \infty$ при некотором значении $\lambda > 0$.

При $1 \leq p(x) < \infty$ норма в пространстве $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ вводится равенством

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f \mid L_{p(\cdot)}(X, \mu)\| = \inf \left\{ \alpha > 0 \mid \ \rho_{p(\cdot)}(f/\alpha) = \int\limits_X \left(\frac{|f(x)|}{\alpha} \right)^{p(x)} d\mu \leq 1, \right\}.$$

При $p(x) = p = const$ пространство $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ совпадает с классическим пространством Лебега $L_p(X, \mu)$, при этом $\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_p$. Многие свойства пространств $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ вполне аналогичны свойствам пространств Лебега с постоянным показателем, но порой формулируются в несколько иной форме. Норма $\|f\|_{p(\cdot)}$ является монотонной: если $g \leq f$, то $\|g\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)}$; если $E \subset X$ и $g = f|_E$, то $\|g \mid L_{p(\cdot)}(E, \mu)\| \leq \|f \mid L_{p(\cdot)}(X, \mu)\|$. Достаточно полные и строгие доказательства обсуждаемых свойств можно найти, к примеру, в работах [9, 10, 11, 12].

Довольно часто при изучении различных свойств вместо оценок нормы оказывается более удобным использование оценок для функционала $\rho_{p(\cdot)}(*)$. Некоторые соотношения, связывающие свойства нормы и свойства функционала, сформулированы в следующем утверждении.

Предложение 1.1.
1) Условия $\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ и $\rho_{p(\cdot)}(f) \le 1$ эквивалентны.
2) $\|f_n\|_{p(\cdot)} \to 0$ тогда и только тогда, когда $\rho_{p(\cdot)}(f_n) \to 0$.
3) Если $\rho_{p(\cdot)}(f) \le K < \infty$, то $\|f\|_{p(\cdot)} \le L = L\,(p(x), K) < \infty$.

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество функций $p : X \to (1, \infty)$, удовлетворяющих условию

$$1 < p_- \le p(x) \le p^+ < \infty.$$

При $p(x) \in \mathcal{P}$ довольно просто доказывается аналог классического неравенства Гельдера

$$\int\limits_X |f(x)g(x)|\, d\mu \le \left(1 + \frac{1}{p_-} - \frac{1}{p^+}\right) \|f\|_{p(\cdot)} \cdot \|g\|_{p'(\cdot)}.$$

Неравенство Гельдера позволяет при $p \in \mathcal{P}$ стандартным образом определить новую норму

$$|||f|||_{p(\cdot)} = \sup_{\|g\|_{p'(\cdot)} \le 1} \int\limits_X |f(x)g(x)|\, d\mu,$$

которая эквивалентна введенной ранее, т.е.

$$C_1 \|f\|_{p(\cdot)} \le |||f|||_{p(\cdot)} \le C_2 \|f\|_{p(\cdot)}.$$

В силу конечности меры, при $q(x) \le p(x)$ пространство $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ непрерывно вложено в пространство $L_{q(\cdot)}(X, \mu)$, при этом [12]

$$\|f\|_{q(\cdot)} \le (1 + \mu(X)) \|f\|_{p(\cdot)}.$$

В частности, при при $p(x) \in \mathcal{P}$ пространство $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ непрерывно вложено в пространство Лебега с постоянным показателем суммируемости $L_{p_-}(X, \mu)$.

II. Замена переменной в пространствах Соболева $L^1_{p(\cdot)}$

Всюду далее мы будем предполагать, что в определении всех встречающихся функциональных классов используется стандартная n-мерная мера Лебега m_n, поэтому в обозначениях функциональных пространств будем опускать символ меры и писать dx вместо dm_n.

Рассмотрим ограниченную область $G \subset R^n$ и пусть $p(x) \in \mathcal{P}$. Пространство Соболева с переменным показателем суммируемости определим естественным образом, полагая

$$L^1_{p(\cdot)}(G) = \{u \in L_1(G) \ \mid \ |\nabla u| \in L_{p(\cdot)}(G)\},$$

$$W^1_{p(\cdot)}(G) = \{u \in L_{p(\cdot)}(G) \ \mid \ |\nabla u| \in L_{p(\cdot)}(G)\}.$$

Полунорма в пространстве $L^1_{p(\cdot)}(G)$ и норма в пространстве $W^1_{p(\cdot)}(G)$ определяются равенствами

$$\|u \mid L^1_{p(\cdot)}\| = \|\nabla u \mid L_{p(\cdot)}\|,$$

$$\|u \mid W^1_{p(\cdot)}\| = \|u \mid L_{p(\cdot)}\| + \|\nabla u \mid L_{p(\cdot)}\|.$$

Свойства функций, принадлежащих таким соболевским классам, существенным образом зависят от свойств функции $p(x)$ [9]. Далее по мере необходимости мы будем предполагать, что функция $p(x)$ обладает дополнительными свойствами.

Элементом пространства Соболева является класс эквивалентных функций, конкретный представитель этого класса может быть не определен или определен произвольным образом на множестве нулевой меры Лебега. При этом каждый класс эквивалентности содержит “хорошую”, так называемую уточненную функцию, которая однозначно определена во всех точках Лебега.

Если $n < p_- \leq p(x) < \infty$ и функция $u \in L^1_{p(\cdot)}(G)$, то на всяком шаре $B \subset G$ функция $u \in L^1_{p(\cdot)}(B) \subset L^1_{p_-}(B)$. В силу соболевской теоремы вложения существует непрерывная в шаре B функция $\tilde{u}$, совпадающая с исходной функцией u почти всюду. Следовательно существует непрерывная во всей области G функция $\tilde{u}$ эквивалентная функции u. Более того, функция $\tilde{u}$ будет локально гельдеровой с показателем $\gamma = \dfrac{n}{p_-} - 1$ [13]. Для векторного пространства непрерывных функций, принадлежащих пространству Соболева $L^1_{p(\cdot)}(G)$, будем использовать обозначение $\tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G)$. Как уже было отмечено функции пространства $\tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G)$ являются локально гельдеровыми.

Нам понадобятся две простые (известные) оценки для пространств Соболева с постоянным показателем суммируемости.

Лемма 2.1. Для функции $v_{a,r}$, определяемой равенством

$$v_{a,r}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-a|}{r}, & \text{если } |x-a| < r, \\ 0, & \text{если} |x-a| \geq r, \end{cases}$$

выполняется оценка

$$\|v_{a,r}; L^1_p(D)\| \leq \omega_n^{\frac{1}{p}}\, r^{\frac{n}{p}-1}. \tag{1}$$

Поскольку функция $v_{a,r}$ является липшицевой, $|\nabla v_{a,r}(x)| = 1/r$ при $0 < |x-a| < r$ и $|\nabla v_{a,r}(x)| = 0$ при $|x-a| > r$, то для любой области $D \subset R^n$, любого $p \geq 1$ и произвольной точки $a \in D$

$$0 < \|v_{a,r}; L^1_p(D)\| \leq \left(\int\limits_{B(a,r)} |\nabla v(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \omega_n^{\frac{1}{p}}\, r^{\frac{n}{p}-1}. \ \blacksquare$$

Лемма 2.2. Рассмотрим шар $B(a,r) \subset R^n$ и пусть $p > n$. Если непрерывная функция u принимает в шаре значения 0 и 1, то

$$\|u; L^1_p(B(a,r)\| \geq C\, r^{\frac{n}{p}-1}. \tag{2}$$

Поскольку норма соболевского пространства не меняется при сдвиге, то можно считать $a = 0$. Согласно теореме вложения в пространство непрерывных функций для всякой функции v, принимающей значения 0 и 1 в единичном шаре $B(0,1)$

$$\|v; L^1_p(B(0,1)\| \geq C > 0.$$

Оценка для шара $B(0,r)$ является следствием изменения нормы пространства L^1_p при подобии $x \to rx$. $\blacksquare$

Обозначим через $\mathcal{P}_n(D)$ множество функций, удовлетворяющих в области D условию

$$n < p_- \leq p(x) \leq p^+ < \infty.$$

Следствие 2.3. Пусть ограниченная область $D \subset R^n$, $p(x) \in \mathcal{P}_n(D)$, $\alpha = 1 - \dfrac{n}{p_-}$, и точки $a, b \in D, a \neq b$. Если непрерывная функция $u \in \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(D)$ и $u(a) = 1$, $u(b) = 0$, то

$$|a - b| \geq \frac{C}{\|u; L^1_{p(\cdot)}(D)\|^{1/\alpha}}.$$

Результат является следствием неравенства (2) и вложения пространства $\tilde{L}^1_{p(\cdot)}(D)$ в пространство $L^1_{p_-}(D)$.

Рассмотрим ограниченные области $G, G' \subset R^n$ и измеримое отображение $\varphi : G \to G'$. Пусть $p(y) \in \mathcal{P}_n(G')$ и $q(x) = p(\varphi(x))$, $x \in G$. Отметим, что $q(x) \in \mathcal{P}_n(G)$ и $p_- \leq q(x) \leq p^+$. Нас будут интересовать условия, при которых отображение φ индуцирует изоморфизм пространств Соболева с переменными показателями суммируемости

$$\varphi^* : \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G') \to \tilde{L}^1_{q(\cdot)}(G),$$

где $\varphi^* u = u \circ \varphi,\ u \in \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G')$. Изоморфизмом мы будем называть ограниченный оператор, являющийся изоморфизмом соответствующих векторных пространств, в данном случае пространств Соболева.

Всюду далее мы будем предполагать, что $p(y) \in \mathcal{P}_n(G')$ и $q(x) = p(\varphi(x))$, $x \in G$. При выбранных ограничениях на показатели $p(y)$ и $q(x)$ мы получаем довольно простой случай, в котором хорошо прослеживаются все основные идеи доказательства. Решение задачи разобьем на несколько отдельных пунктов, в каждом из которых изучается конкретное свойство отображения φ.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ.

Как обычно в этой тематике проверка достаточного условия оказывается проще чем нахождение необходимых условий.

Определение. Гомеоморфизм $\varphi : G \to G'$ называется K-квазиизометрическим отображением, если

$$\varlimsup_{z \to x} \frac{|\varphi(z) - \varphi(x)|}{|z - x|} \leq K, \quad \varlimsup_{t \to y} \frac{|\varphi^{-1}(t) - \varphi^{-1}(y)|}{|t - y|} \leq K.$$

Пусть ограниченные области $G, G' \subset R^n$, а отображение $\varphi : G \to G'$ является K-квазиизометрическим гомеоморфизмом. Пусть $p(y) \in \mathcal{P}_n(G')$ и $q(x) = p(\varphi(x))$. Заметим, что пространство $\tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G')$ вложено в пространство $L^1_{p_-}(G')$. Поскольку квазиизометрия φ индуцирует изоморфизм пространств Соболева

$$\varphi^* : L^1_{p_-}(G') \to L^1_{p_-}(G),$$

то согласно теореме о дифференцировании суперпозиции [14] для всякой функции $u \in L^1_{p_-}(G')$ почти всюду в области G производные функции $v = u \circ \varphi$ вычисляются по стандартному правилу дифференцирования суперпозиции гладких функций.

Поэтому для всякой функции $u \in L^1_{p(\cdot)}(G')$ почти всюду в области G

$$|\nabla v(x)| = |\nabla(u \circ \varphi)(x)| \le K\,|\nabla u(y)|,$$

а для якобиана выполняется оценка

$$\frac{1}{K^n} \le |J(x,\varphi)| \le K^n.$$

Согласно предложению 1.1 условие $\|u; L^1_{p(\cdot)}(G')\| \le 1$ эквивалентно неравенству $\rho_{p(\cdot),G'}(|\nabla u|) \le 1$.

Поскольку отображение φ является локально липшицевым, почти всюду дифференцируемо и обладает N-свойством, то для него выполняется формула замены переменной, согласно которой

$$\rho_{q(\cdot),G}(|\nabla v|) = \int\limits_G |\nabla v|^{p(\varphi(x))}(x)\,dx \le \int\limits_G |\nabla u|^{p(\varphi(x))}(\varphi(x)) K^{n+p(\varphi(x))} |J(x,\varphi)|\,dx \le$$

$$\le K^{n+p^+} \int\limits_{G'} |\nabla u|^{p(y))}(y)\,dy = K^{n+p^+}\,\rho_{p(\cdot),G'}(|\nabla u|).$$

Таким образом, если $\|u; L^1_{p(\cdot)}(G')\| \le 1$, то $\rho_{q(\cdot),G}(|\nabla v|) \le K^{n+p^+}$, и по предложению 1.1 получаем $\|v; L^1_{q(\cdot)}(G)\| \le L < \infty$. Следовательно $\|\varphi^*\| \le L$.

Обратное отображение $\psi = \varphi^{-1}$ также является K-квазиизометрическим гомеоморфизмом и индуцирует ограниченный оператор

$$\psi^* : L^1_{q(\cdot)}(G) \to L^1_{p(\cdot)}(G').$$

При этом $\psi^* \circ \varphi^* = I$ и $\varphi^* \circ \psi^* = I$. Следовательно $\psi^* = (\varphi^*)^{-1}$, а оператор φ^* является изоморфизмом.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ.

Предположим теперь, что оператор

$$\varphi^* : \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G') \to \tilde{L}^1_{q(\cdot)}(G)$$

является изморфизмом.

a) **Непрерывность отображения** φ.

В силу ограниченности области функция $f_i(y) = y_i$ принадлежит пространству $\tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G')$. Поэтому координатная функция отображения $\varphi_i = f_i \circ \varphi = \varphi^* f_i$ принадлежит пространству $\tilde{L}^1_{q(\cdot)}(G)$, непрерывна и является локально гельдеровой. Следовательно отображение φ непрерывно и локально гельдерово.

b) **Взаимная однозначность отображения** φ.

Если шар $B(a,r) \subset G$, то его образ не может состоять из одной точки, так как в противном случае функция $v_{a,r}(x)$, принадлежащая пространству $\tilde{L}^1_{q(\cdot)}(G)$ и имеющая положительную норму, не имела бы прообраза в пространстве $\tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G')$. Поскольку отображение φ является непрерывным, то множество $\varphi(B(a,r))$ связно и состоит более чем из одной точки.

Рассмотрим две различные точки a и b, принадлежащие области G. Предположим, что $\varphi(a) = \varphi(b) = y \in G'$. Выберем стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$. Без ограничения общности можно считать, что шары $B(y,\varepsilon_k)$ принадлежат области G'. В силу непрерывности отображения φ можно выбрать две таких последовательности точек $\{x_k'\}$ и $\{x_k''\}$, что

i) $x_k' \to a,\ x_k'' \to b$;

ii) $|x_k' - x_k''| = r_k \geq \frac{1}{2}|a-b|$;

iii) $\varphi(x_k'), \varphi(x_k'') \in B(y,\varepsilon_k)$.

Используя обозначения леммы 2.1, определим последовательность функций, полагая $w_k = v_{x_k', r_k}$. Для удобства введем обозначения: $\alpha = 1 - \dfrac{n}{p^+}$, $\beta = 1 - \dfrac{n}{p_-}$. Отметим, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Согласно оценке (1) и вложению пространства $L^1_{p^+}(G)$ в пространство $L^1_{q(\cdot)}(G)$

$$\|w_k; L^1_{q(\cdot)}(G)\| \leq C\, r_k^{-\alpha} \leq C_1\, |a-b|^{-\alpha}.$$

Поскольку $w_k(x_k') = 1$ и $w_k(x_k'') = 0$, то функция $\varphi^{*-1} w_k$ принимает в шаре $B(y,\varepsilon_k)$ значения 0 и 1. Согласно оценке (2) и вложению пространства $L^1_{p(\cdot)}(G')$ в пространство $L^1_{p_-}(G')$

$$\|\varphi^{*-1} w_k; L^1_{p(\cdot)}(G')\| \geq C_2\, \varepsilon_k^{-\beta}.$$

Учитывая ограниченность обратного оператора φ^{*-1}, получаем

$$C_2\, \varepsilon_k^{-\beta} \leq \|\varphi^{*-1} w_k; L^1_{p(\cdot)}(G')\| \leq \|\varphi^{*-1}\|\, \|w_k; L^1_{q(\cdot)}(G)\| \leq C_3\, |a-b|^{-\alpha}.$$

или

$$\varepsilon_k \geq C_4\, |a-b|^{\alpha/\beta}.$$

Последняя оценка противоречит стремлению ε_k к нулю. Полученное противоречие доказывает взаимную однозначность отображения φ в области G.

c) **Оценки искажения.**

Нам понадобится еще одна простая оценка.

Лемма 2.4. Предположим, что для непрерывной функции h с условием $h(0) = 0$ при $0 < r < 1$ и $0 < C < \infty$ выполняется неравенство

$$0 \leq h(r) \leq \frac{C}{|\ln r|}.$$

Пусть $n < p_- < p < p^+$ и $r < e^{-C}$, тогда

i)

$$\frac{r^{\frac{n}{p+h(r)}-1}}{r^{\frac{n}{p}-1}} = r^{\frac{-n\,h(r)}{p(p+h(r))}} \leq r^{\frac{-n\,h(r)}{p^+(p^+ +1)}} \leq r^{\frac{-C_1}{|\ln r|}} = e^{C_1}.$$

Следовательно

$$r^{\frac{n}{p+h(r)}-1} \leq C_2\, r^{\frac{n}{p}-1}.$$

ii)

$$\frac{r^{\frac{n}{p-h(r)}-1}}{r^{\frac{n}{p}-1}} = r^{\frac{n\,h(r)}{p(p-h(r))}} \geq r^{\frac{n\,h(r)}{p_-(p_- -1)}} \geq r^{\frac{C_3}{|\ln r|}} = e^{-C_3}.$$

Следовательно

$$r^{\frac{n}{p-h(r)}-1} \geq C_4\, r^{\frac{n}{p}-1}.$$

Определение. Будем говорить, функция w принадлежит классу $Log(D)$, если $w(0) = 0$ и существуют такие постоянные $\delta > 0$ и $0 < C < \infty$, что для всех точек области D из условия $0 < |x_1 - x_2| < \delta$ следует оценка

$$|w(x_1) - w(x_2)| \le \frac{C}{|\ln|x_1 - x_2||}.$$

Далее будем предполагать, что показатель $p(y) \in Log(G')$.

Оценка сверху (липшицевость). Отметим, что в силу гельдеровости отображения φ показатель $q(x) = p(\varphi(x))$ принадлежит классу $Log(G)$. Поскольку $\ln r \to -\infty$ при $r \to +0$, то для достаточно близких точек x_1 и x_2

$$|\ln|\varphi(x_1) - \varphi(x_1)|| \ge |\ln C_1|x_1 - x_1|^\gamma| = |\ln C_1 + \gamma \ln|x_1 - x_1|| \ge C_2|\ln|x_1 - x_1||$$

и

$$|q(x_1) - q(x_2)| \le \frac{C}{|\ln|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)||} \le \frac{C}{C_2\,|\ln|x_1 - x_2||}.$$

Пусть точка $x_0 \in G$, $y_0 = \varphi(x_0)$ и шар B с центром в точке y_0 лежит в области G'. В силу непрерывности отображения φ существует такая окрестность U точки x_0, что $\varphi(U) \subset B$. Выберем такое $r > 0$, что $B(x_0, 2r) \subset U$. Непрерывная функция $|\varphi(x) - \varphi(x_0)|$ принимает на замкнутом шаре $\overline{B}(x_0, r)$ наибольшее значение в некоторой точке $x^* \in \overline{B}(x_0, r)$. Положим $|\varphi(x^*) - \varphi(x_0)| = R$. По построению $\overline{B}(y_0, R) \subset B \subset G'$. Введем две функции

$$h(r) = \sup_{x \in B(x_0, 2r)} (q(x_0) - q(x)) \quad \text{и} \quad H(R) = \sup_{y \in B(y_0, R)} (p(y) - p(y_0)).$$

Заметим, что $q(x_0) = p(y_0) = p_0$. При всех $x \in B(x_0, 2r)$ выполняется неравенство $q(x) \ge p_0 - h(r)$, а при всех $y \in B(y_0, R)$ выполняется неравенство $p(y) \le p_0 + H(R)$.

Рассмотрим в области G' функцию $v_{y_0,R}(y)$. Согласно оценке (1)

$$\|v_{y_0,R}; L^1_{p(\cdot)}(G')\| \le C\|v_{y_0,R}; L^1_{p_0+H(R)}(G')\| \le C_1 R^{\frac{n}{p_0+H(R)}-1}.$$

Функция $u = \varphi^* v_{y_0,R} = v_{y_0,R} \circ \varphi$ принимает значение 1 в точке x_0 и значение 0 в точке $x^* \in B(x_0, 2r)$. Согласно оценке (2)

$$r^{\frac{n}{p_0-h(r)}-1} \le C_2\,\|u; L^1_{p_0-h(r)}(B(x_0, 2r))\| \le C_3\,\|u; L^1_{q(\cdot)}(G)\|.$$

Поскольку показатели $q(x)$ и $p(y)$ принадлежат классам $Log(G)$ и $Log(G')$, то при достаточно малых значениях r функции $h(r)$ и $H(R)$ будут удовлетворять условиям леммы 2.4 (в силу непрерывности отображения φ при малых значениях r значение R тоже мало). Используя пункты i) и ii) леммы 2.4 получаем

$$r^{\frac{n}{p_0}-1} \le \tilde{C}\,r^{\frac{n}{p_0-h(r)}-1} \le \tilde{C}_1\,\|u; L^1_{q(\cdot)}(G)\| \le \tilde{C}_1\,\|\varphi^*\|\;\|v_{y_0,R}; L^1_{p(\cdot)}(G')\| \le$$

$$\le \tilde{C}_2\,R^{\frac{n}{p_0+H(R)}-1} \le \tilde{C}_3\,R^{\frac{n}{p_0}-1}.$$

Учитывая отрицательность показателя $\dfrac{n}{p_0} - 1$, получаем

$$R \le Kr$$

или

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \le Kr \quad \text{для всех} \;\; x \in \overline{B}(x_0, r). \tag{3}$$

Полученная оценка является локальной, но коэффициент искажения K не зависит от выбора точки.

Оценка снизу. Сохраним повторяющиеся обозначения предыдущего пункта.

Непрерывная на сфере $S(x_0,r)=\{x;|x-x_0|=r\}$ функция $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|$ принимает наименьшее значение в некоторой точке $x^{**}\in S(x_0,r)$. Положим $|\varphi(x^{**})-\varphi(x_0)|=\rho$. По построению $\overline{B}(y_0,\rho)\subset B\subset G'$. Введем две функции

$$\delta(r)=\sup_{x\in B(x_0,r)}(q(x)-q(x_0)) \text{ и } \Delta(\rho)=\sup_{y\in B(y_0,2\rho)}(p(y_0)-p(y)).$$

Напомним, что $q(x_0)=p(y_0)=p_0$. При всех $x\in B(x_0,r)$ выполняется неравенство $q(x)\leq p_0+\delta(r)$, а при всех $y\in B(y_0,\rho)$ выполняется неравенство $p(y)\geq p_0-\Delta(\rho)$.

Рассмотрим в области G функцию $v_{x_0,r}(x)$ и функцию $w=(\varphi^*)^{-1}v_{x_0,r}$, определенную в области G'.

Как и в предыдущем пункте, используя оценки (1), (2) и соответствующие вложения в пространства Соболева с постоянными показателями суммируемости, получим

$$\|v_{x_0,r};L^1_{q(\cdot)}(G)\|\leq C_1 r^{\frac{n}{p_0+\delta(r)}-1}, \tag{4}$$

$$\|w;L^1_{p(\cdot)}(G')\|\geq C_1\rho^{\frac{n}{p_0\Delta(\rho)}-1}. \tag{5}$$

Учитывая ограниченность оператора $(\varphi^*)^{-1}$, оценки (4), (5) и лемму 2.3, для достаточно малых шаров получим

$$\rho^{\frac{n}{p_0}-1}\leq\tilde{C}r^{\frac{n}{p_0}-1}.$$

Поскольку показатель степени отрицательный, то

$$\rho\geq\frac{1}{K}\,r,$$

или

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|\geq\frac{1}{K}\,r \quad \text{для всех } x\in S(x_0,r). \tag{6}$$

Вспоминая неравенство (3), получаем локальную оценку

$$\frac{1}{K}\,|x-x_0|\leq|\varphi(x)-\varphi(x_0)|\leq K\,|x-x_0| \quad \text{для всех } x\in S(x_0,r). \tag{7}$$

d) **Топологические свойства множества $\varphi(G)$.**

В общем случае множество $\varphi(G)$ является подобластью области G'.

В силу непрерывности отображения φ множество $\varphi(G)$ связно.

Покажем, что множество $\varphi(G)$ открыто. Пусть точка $y_0\in\varphi(G)$, в силу взаимной однозначности отображения φ существует единственная точка $x_0\in G$ такая, что $y_0=\varphi(x_0)$. Выберем такое положительное число $r_0<\dfrac{1}{2}\,dist(x_0,\partial G)$, чтобы при $r<r_0$ на шаре $B(x_0,2r)$ выполнялось неравенство (7). Выберем стремящуюся к нулю последовательность чисел $\varepsilon_k<\dfrac{1}{K}\,r$.

Существует такой номер k_0, что

$$\varphi(G)\cap B(y_0,\varepsilon_{k_0})\subset\varphi(B(x_0,r)).$$

В противном случае существовала бы такая последовательность точек
$y_k\in\varphi(G)\cap B(y_0,\varepsilon_k)$, что точки $x_k=\varphi^{-1}(y_0)\notin B(x_0,r)$. Точки x_k не могут

лежать в сферическом кольце $D = B(x_0, 2r) \setminus B(x_0, r)$, поскольку для всякой точки $a \in D$ согласно неравенству (6)

$$|\varphi(a) - y_0| \geq \frac{1}{K}\, r > \varepsilon_k.$$

Однако, начиная с некоторого номера, точки x_k не могут лежать и вне шара $B(x_0, 2r)$. Рассмотрим такую функцию $\omega \in C_0^\infty(B(x_0, 2r))$, что $\omega(x_0) = 1$. Пусть функция $u = (\varphi^*)^{-1}\,\omega$, тогда $u(y_0) = 1$ и $u(y_k) = 0$. Поскольку

$$\|u; L^1_{p(\cdot)}(G')\| \leq \|(\varphi^*)^{-1}\|\,\|\omega; L^1_{q(\cdot)}(G)\| < \infty,$$

то по следствию 2.3

$$|y_k - y_0| \geq \frac{C}{\|\omega; L^1_{q(\cdot)}(G)\|^{1/\alpha}} = d > 0,$$

что противоречит стремлению ε_k к нулю. Таким образом

$$\varphi^{-1}(\varphi(G) \cap B(y_0, \varepsilon_{k_0})) \subset B(x_0, r).$$

Легко показать, что множество $\varphi(G)$ всюду плотно в G'. В противном случае существовал бы такой шар B, что $B \subset G'$ и $B \cap \varphi(G) = \emptyset$. Выберем отличную от нуля функцию $\omega \in C_0^\infty(B)$ и функцию $u \in \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G')$. Функции u и $u + \omega$ отличаются на множестве положительной меры, т.е. различны как элементы пространства $\tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G')$, однако

$$\varphi^*\, u = u \circ \varphi = (u + \omega) \circ \varphi = \varphi^*\,(u + \omega).$$

Это противоречит изоморфности оператора φ^*.

Поскольку множество $\varphi(G)$ всюду плотно в шаре $B(y_0, \varepsilon_{k_0})$, то для всякой точки $y \in B(y_0, \varepsilon_{k_0})$ сходящаяся к ней последовательность точек $z_k \in \varphi(G) \cap B(y_0, \varepsilon_{k_0})$. Согласно доказанному последовательность точек $x_k = \varphi^{-1}(z_k)$ принадлежит компактному множеству $\overline{B}(x_0, r)$ и содержит подпоследовательность x_{k_m}, сходящуюся к некоторой точке $x \in \overline{B}(x_0, r)$. Так как отображение φ непрерывно, то $\varphi(x) = y$. Следовательно $B(y_0, \varepsilon_{k_0}) \subset \varphi(G)$. В силу произвольности выбора точки y_0 это и означает открытость множества $\varphi(G)$.

e) **Квазиизометричность отображения** φ.

Отображение $\varphi : G \to \varphi(G)$ является гомеоморфизмом, а согласно неравенству (7)

$$\varlimsup_{z \to x} \frac{|\varphi(z) - \varphi(x)|}{|z - x|} \leq K, \qquad \varlimsup_{t \to y} \frac{|\varphi^{-1}(t) - \varphi^{-1}(y)|}{|t - y|} \leq K.$$

Следовательно отображение φ является K-квазиизометрическим гомеоморфизмом областей G и $\varphi(G)$.

f) **Сравнение областей** G' **и** $\varphi(G)$.

Оператор сужения определим равенством $Pu = u|_{\varphi(G)}$ для всех функций $u \in \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G')$.

Пусть функция $v \in \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(\varphi(G))$. Поскольку отображение φ является квазиизометрией, то $v \circ \varphi \in \tilde{L}^1_{q(\cdot)}(G)$. При этом функция $u = (\varphi^*)^{-1}(v \circ \varphi) \in \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G')$. Следовательно функция u является продолжением функции v из области $\varphi(G)$ в область G', поскольку множество $\varphi(G)$ всюду плотно в G', а функции u

и v являются непрерывными, то продолжение, принадлежащее пространству $\tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G')$, является единственным.

Это означает, что оператор $P : \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G') \to \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(\varphi(G))$ является изоморфизмом. В силу монотонности нормы $\|Pu; L^1_{p(\cdot)}(\varphi(G))\| \leq \|u; L^1_{p(\cdot)}(G)\|$, при этом $P\omega = \omega$ для функции $\omega \in C_0^\infty(\varphi(G))$. Поэтому $\|P\| = 1$.

Согласно терминологии, применяемой в теории пространств Соболева, области G' и $\varphi(G)$ являются $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными. Изучение $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентных областей выходит за рамки данной заметки, но их свойства вполне аналогичны соответствующим свойствам для случая пространств Соболева с постоянной степенью суммируемости.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теперь, суммируя все ранее доказанное, мы можем сформулировать основное утверждение работы.

Теорема. Рассмотрим ограниченные области G и G', принадлежащие пространству R^n, и измеримое отображение $\varphi : G \to G'$. Пусть показатель суммируемости $p \in \mathcal{P}_n(G') \cap Log(G')$, а показатель $q = p \circ \varphi$. Для того, чтобы оператор композиции

$$\varphi^* : \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G') \to \tilde{L}^1_{q(\cdot)}(G),$$

действующий по правилу $\varphi^* u = u \circ \varphi$ ($u \in \tilde{L}^1_{p(\cdot)}(G')$), был изоморфизмом пространств Соболева необходимо и достаточно, чтобы отображение

$$\varphi : G \to \varphi(G)$$

было квазиизометрическим гомеоморфизмом, а области G' и $\varphi(G)$ были $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными.

Замечание 1. Требование квазиизометричности отображения является *достаточным* и при других условиях на показатели суммируемости $p(y)$ и $q(x)$. При этом ситуация с необходимыми условиями выглядит несколько иначе. Поскольку при $p(y) \equiv n$ необходимым и достаточным условием является квазиконформность отображения, то в случае, когда $p_- < n$ и $p^+ > n$, описание свойств отображения, видимо, должно иметь локальный характер. По аналогии с результатами для пространств Соболева с постоянной степенью суммируемости можно предположить, что при $1 < p_- < p(y) < p^+ < n$ требование квазиизометричности отображения будет необходимым и достаточным.

Замечание 2. Требование ограниченности областей не является принципиальным, но упрощает некоторые рассуждения. К примеру, при доказательстве непрерывности отображения в случае неограниченных областей вместо функций $f_i = y_i$ пришлось бы рассматривать срезки $g_i = \eta \cdot y_i$, где гладкая функция η равна единице на шаре B_r и равна нулю вне концентричного шара удвоенного радиуса, и т.д.

Замечание 3. Условие принадлежности показателя $p(y)$ классу $Log(G')$ в данном случае, возможно, является близким к оптимальному.

Замечание 4. Можно было рассмотреть изоморфизм классов эквивалентных соболевских функций

$$\varphi^* : L^1_{p(\cdot)}(G') \to L^1_{q(\cdot)}(G).$$

В этом случае само отображение φ не обязано быть квазиизометрическим, но существует эквивалентное ему квазиизометрическое отображение $\tilde{\varphi} : \tilde{G} \to \tilde{\varphi}(\tilde{G})$, где области G и $\tilde{G}$ являются $L^1_{q(\cdot)}$- эквивалентными, а области G' и $\tilde{\varphi}(\tilde{G})$ соответственно $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными. Схема доказательств в основном сохраняется, но возникают дополнительные вопросы, рассмотрение которых не очень сложно, но довольно велико по объему и осложняет понимание главной идеи доказательства. При малых показателях суммируемости, когда нет вложения в пространство непрерывных функций, такой подход является неизбежным, а в рассматриваемом в работе случае появляется возможность упростить доказательство.

References

[1] S.L. Sobolev, *On some transformation groups of an n-dimensional space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **32**:6 (1941), 380—382. Zbl 0061.21505

[2] S.K. Vodop'yanov, V.M. Gol'dshtein, *Lattice isomorphisms of the spaces W^1_n and quasiconformal mappings*, Siberian Math. J., **16**:2 (1975), 224—246. Zbl 0324.46040

[3] S.K. Vodop'yanov, V.M. Gol'dshtein, *Functional characteristics of quasiisometric mappings*, Siberian Math. J., **17**:4 (1976), 768—773. Zbl 0364.30030

[4] S.K. Vodop'yanov, V.M. Gol'dshtein, *A new function-theoretic invariant for quasiconformal mappings*, Proceedings of the conference «Some problems of modern theory of functions», Inst. Mat., Novosibirsk, 1976, 18—20.

[5] S.K. Vodop'yanov, *L_p-potential theory and quasiconformal mappings on homogeneous groups*, Contemporary problems of geometry and fnalysis , Nauka, Novosibirsk, 1989, 45-–89 (1989). Zbl 0714.31005

[6] A.S. Romanov, *Change of variable in spaces of Bessel and Riesz potentials*, Functional analysis and mathematical physics (Russian), 117–133, 135, Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Inst. Mat., Novosibirsk, 1985. MR0895833

[7] S.K. Vodop'yanov , N.A. Evseev, *Isomorphisms of Sobolev spaces on Carnot groups and quasiconformal mappings*, Siberian Math. J., **56**:5 (2015), 989—1029. Zbl 1348.46045

[8] S.K. Vodopyanov, *Composition Operators on Sobolev Spaces*, Complex Analysis and Dynamical Systems II: A Conference in Honor of Professor Lawrence Zalcman's Sixtieth Birthday, June 9-12, 2003, Nahariya, Israel, eds. M. Agranovsky, L. Karp, D. Shoikhet, AMS Contemporary Mathematics. 382, Ann Arbor, 2005, 327—342.

[9] O. Kovacik, J. Rakosnik, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$* , Czechoslovak Math. J, **41**:4 (1991), 592–618. MR1134951

[10] P. Harjulehto, P. Hästö, M. Pere, *Variable Exponent Lebesgue Spaces on Metric Spaces: The Hardy-Littlewood Maximal Operator*, Real Analysis Exchange, **30**:1 (2004/2005), 87–104. MR2126796

[11] T. Adamowicz, P. Harjulehto, P. Hästö, *Maximal operator in varible exponent Lebesgue spaces on unbounded quasimetric measure spaces*, (http://www.helsinki.fi/ pharjule/varsob/pdf/maximal-submitted.pdf). Received by the editors 14.12.2012., 1–13.

[12] A.S. Romanov, *Sobolev-type functions with variable integrability exponent on metric measure spaces*, Siberian Math. J., **55**:1 (2014), 178—194. MR3220596

[13] L.C. Evans, R.F. Gariepy , *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2015. MR3409135

[14] V.M. Gol'dshtein, Yu.G. Reshetnyak, Quasiconformal mappings and Sobolev spaces, Translated and revised from the 1983 Russian original. Translated by O. Korneeva. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 54. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990. MR1136035

Romanov Alexandr Sergeevich,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: asrom@math.nsc.ru