S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том 14, стр. 807–820 (2017)* УДК 512.54
DOI 10.17377/semi.2017.14.068 MSC 20G15

# ПОРОЖДАЕМОСТЬ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ ТИПА $E_l$ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ТРЕМЯ ИНВОЛЮЦИЯМИ, ДВЕ ИЗ КОТОРЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ

И.А. ТИМОФЕЕНКО

Abstract. It is proved that adjoint Chevalley group of type $E_l$ over ring of integers is generated by three involutions. Two of these involutions are commute.

**Keywords:** Chevalley group, ring of integers, generation involutions.

## 1. Введение

Основным результатом данной статьи является

**Теорема 1.** *Присоединенные группы Шевалле типа $E_l$ над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

Используя метод выбора порождающих троек инволюций в группах лиева типа над конечными полями, разработанный в статьях Я. Н. Нужина [1, 2, 3], указаны порождающие тройки инволюций, две из которых перестановочны, для присоединенных групп Шевалле типа $E_l$ над кольцом целых чисел. Для группы Шевалле типа $G_2$ такие порождающие указаны автором в [4]. Таким образом, получен ответ для всех исключительных групп Шевалле, кроме типа $F_4$, на следующий вопрос из Коуровской тетради [5, вопрос 15.67]

Timofeenko, I.A., Generation of the Chevalley groups of type $E_l$ over the ring of integers by three involutions two of which commute.

© 2017 Тимофеенко И. А.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00707).

*Поступила 17 июня 2016 г., опубликована 18 августа 2017 г.*

*(A) Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?*

Для групп Шевалле классических типов по вопросу (A) ранее были получены следующие результаты.

В работе [6] M. C. Тамбурини и П. Цукка установлено, что специальная линейная группа $SL_n(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ при $n \geq 14$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Следовательно, и проективная специальная линейная группа $PSL_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 14$ обладает такой тройкой порождающих инволюций. Более того, Я. Н. Нужин доказал, что $PSL_n(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, тогда и только тогда, когда $n \geq 5$ [7]. На самом деле, в этой работе при $n \neq 4k+2$ порождающие тройки инволюций выбирались из $SL_n(\mathbb{Z})$, поэтому для группы $SL_n(\mathbb{Z})$ ответ на аналог вопроса (A) неизвестен только для $n = 6, 10$.

В силу гомоморфизма $PSp_n(\mathbb{Z}) \to PSp_n(\mathbb{Z}_p)$ из непорождаемости тремя инволюциями, две из которых перестановочны, проективной симплектической группы $PSp_4(\mathbb{Z}_3)$ [3] следует непорождаемость тремя инволюциями, две из которых перестановочны, для группы $PSp_4(\mathbb{Z})$, которая изоморфна присоединенной группе Шевалле $B_2(\mathbb{Z})$.

Отметим также, что над $\mathbb{Z}$ каждая присоединенная группа Шевалле исключительного типа, отличного от $E_7$, совпадает с универсальной. Здесь порождающие тройки инволюций для типа $E_7$ выбираются именно в присоединенной группе. Таким образом, ответ на аналог вопроса (A) для универсальной группы Шевалле типа $E_7$ остается открытым.

## 2. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть $\Phi$ — приведенная неразложимая система корней. Через $\Phi(K)$ обозначим присоединенную группу Шевалле над полем $K$. Она порождается корневыми подгруппами $X_r = \{x_r(t) \mid t \in K\},\ r \in \Phi$. Придерживаясь обозначений из книги Р. Картера [8], определим мономиальные и диагональные элементы соответственно

$$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t),$$
$$h_r(t) = n_r(t)n_r(-1),\ r \in \Phi,\ t \in K^*,$$

где $K^*$ — мультипликативная группа поля $K$. Далее $H$ — диагональная подгруппа группы $\Phi(K)$, порожденная элементами $h_r(t)$, $r \in \Phi$, $t \in K^*$, а $N$ — её мономиальная подгруппа, порожденная $H$ и элементами $n_r(1),\ r \in \Phi$. Положим также для сокращения записи

$$n_r = n_r(1),$$
$$h_r = h_r(-1),$$

отметим следующее часто используемое свойство

$$(n_r(t))^2 = h_r,\ r \in \Phi,\ t \in K^*. \tag{1}$$

Диагональные элементы действуют сопряжениями на корневых элементах следующим образом

$$h_r(t)^{-1}x_s(u)h_r(t) = x_s(t^{A_{rs}}u),\ r, s \in \Phi,\ t \in K^*, \tag{2}$$

где $A_{rs} = 2(r,s)/(r,r)$, а $(x,y)$ — скалярное произведение векторов $x, y$ [8, п. 7.1]. Из (2) в силу билинейности скалярного произведения вытекает свойство

$$h_{r+s}(t) = h_r(t)h_s(t),\ t \in K^*,\ s,\ r,\ r+s \in \Phi. \tag{3}$$

Действие сопряжением мономиальными элементами на корневых подгруппах эквивалентно действию группы Вейля $W$ на корнях в силу следующего равенства

$$n_w X_s n_w^{-1} = X_{w(s)},\ s \in \Phi, \tag{4}$$

где $n_w$ — прообраз элемента $w \in W$ при гомоморфизме $N$ на $W$, ядром которого является диагональная подгруппа $H$. Более того, если $w_r$ — отражение относительно гиперплоскости, перпендикулярной вектору $r$, то

$$n_r x_s(t) n_r^{-1} = x_{w_r(s)}(\eta_{r,s} t),\ r, s \in \Phi,\ t \in K, \tag{5}$$

где константы $\eta_{r,s}$ равны $\pm 1$ [8, 7.2.1] .

Если $r \neq -s$, то коммутаторная формула Шевалле в группе $E_l(\mathbb{Z})$ принимает следующий вид

$$[x_r(t), x_s(u)] = \begin{cases} 1, & \text{если } r+s \notin \Phi; \\ x_{r+s}(\pm tu), & \text{если } r+s \in \Phi,\ r, s \in \Phi, \end{cases} \tag{6}$$

где $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Пусть $\Pi = \{r_1, r_2, \ldots, r_l\}$ — фундаментальная система корней для $\Phi$, причем, если $\Phi$ типа $E_l$, то $r_i + r_j, i < j$, является корнем тогда и только тогда, когда $(i,j) = (l-3, l)$ или $(i, i+1)$, $1 \le i \le l-2$. Тогда на графе Кокстера корни будут расположены как на рисунке 1.

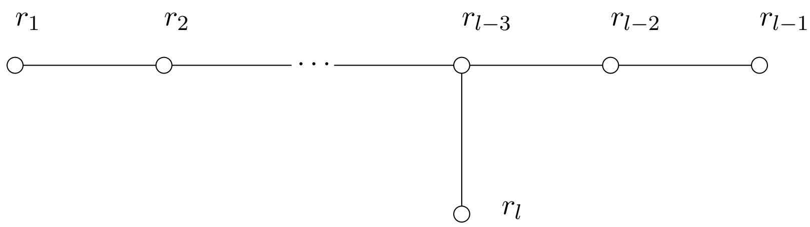


Рис. 1. Граф Кокстера системы корей типа $E_l$

В [9] указаны порождающие множества для группы Вейля $W$ типа $\Phi$, один из элементов которых является элемент Кокстера

$$w_c = w_{r_1} w_{r_2} \ldots w_{r_l}.$$

Нам потребуется следующий частный случай этого результата для типов $E_l$.

**Лемма 1.** [9] *Если $\Phi = E_l$, то $W = \langle w_{r_1}, w_c \rangle$.*

**Лемма 2.** [10, таблицы VI-VIII] *Пусть $n = 9$ или 15, если $\Phi$ типа $E_7$ или $E_8$ соответственно, тогда $w_c^n(r) = -r$ для любого $r \in \Phi$.*

Далее $\Phi(\mathbb{Z})$ — присоединенная группа Шевалле типа $\Phi$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Она состоит из элементов группы Шевалле $\Phi(\mathbb{Q})$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, коэффициенты которых относительно решетки корней $\mathbb{Z}(\Phi)$ лежат в $\mathbb{Z}$. Через $H(\mathbb{Z})$ обозначим диагональную подгруппу группы $\Phi(\mathbb{Z})$. Подгруппа $H(\mathbb{Z})$ порождается элементами $h_r = h_r(-1)$, $r \in \Phi$.

**Лемма 3.** [11, с. 107]. *Группа $\Phi(\mathbb{Z})$ порождается элементами $x_r(1)$, $r \in \Phi$.*

**Лемма 4.** *Пусть $\Phi = E_l$ и $\mu = n_{r_1} n_{r_2} \dots n_{r_l} h$ для некоторого диагонального элемента $h \in H(\mathbb{Z}) < \Phi(\mathbb{Z})$. Тогда:*

*а) $\Phi(\mathbb{Z}) = \langle \mu, x_{r_1}(1) \rangle$, если $\Phi$ типа $E_7$ или $E_8$;*

*б) $\Phi(\mathbb{Z}) = \langle \mu, x_{r_1}(1), x_{-r_1}(1) \rangle$, если $\Phi$ типа $E_6$.*

*Доказательство.* Положим $M = \langle \mu, x_{r_1}(1), x_{-r_1}(1) \rangle$, если $\Phi$ типа $E_6$ и $M = \langle \mu, x_{r_1}(1) \rangle$, если $\Phi$ типа $E_7$ или $E_8$. Для $\Phi$ типа $E_7, E_8$, элемент $x_{-r_1}(1)$ лежит в $M$ по лемме 2. Для $\Phi$ типа $E_6$, по определению $x_{-r_1}(1) \in M$. Таким образом, в любом случае $n_{r_1} = x_{r_1}(1) x_{-r_1}(-1) x_{r_1}(1) \in M$. Отсюда и в силу леммы 1 все мономиальные элементы $n_r$, $r \in \Phi$, лежат в $M$, а так как группа Вейля действует транзитивно на корнях одинаковой длины, то в силу (5) получаем включения $x_r(1) \in M$ для всех $r \in \Phi$. Сейчас по лемме 3 получаем равенство $\Phi(\mathbb{Z}) = M$.

□

Для любой системы корней множество её фундаментальных корней $\Pi$ можно единственным образом разбить на два непересекающихся подмножества $\Pi_1$ и $\Pi_2$ попарно ортогональных корней. Далее всегда $r_1 \in \Pi_1$, а $w_{\Pi_i}$ есть произведение всех $w_{r_j}$, $r_j \in \Pi_i$, $i = 1, 2$. Заметим, что элементы $w_{\Pi_i}$ определены однозначно, то есть не зависят от перестановки сомножителей и имеют порядок 2, так как являются произведением отражений относительно попарно ортогональных корней.

Произведение всех фундаментальных отражений в некотором порядке называется элементом Кокстера. Хорошо известно, что элементы Кокстера сопряжены в группе Вейля. Следующая лемма является частным случаем леммы 1 из [1] для типов $E_l$, и дает явный вид сопрягающего элемента с определенными свойствами для двух конкретных элементов Кокстера:

$$w_c = w_{r_1} w_{r_2} \dots w_{r_l},$$

$$w_{c_1} = w_{\Pi_1} w_{\Pi_2}.$$

**Лемма 5.** *Пусть $\Phi$ типа $E_l$, тогда существует такой элемент $w$ из группы $W$ типа $\Phi$, что*

$$w_{c_1}^w = w w_{c_1} w^{-1} = w_c$$

*и выполняются следующие три равенства:*

$$w(r_1) = r_1,$$

$$w(r_2) = r_2 + \dots + r_l,$$

$$w(r_3) = -r_3 - \dots - r_l.$$

*Более того, элемент $w$ явно указан в таблице 1 для каждого из типов $E_l$.*

Таблица 1. Элемент $w$ для групп Вейля типа $E_l$

| $\Phi$ | $w$ |
|---|---|
| $E_6$ | $w_{r_5}w_{r_6}w_{r_4}w_{r_5}w_{r_3}$ |
| $E_7$ | $w_{r_6}w_{r_7}w_{r_5}w_{r_6}w_{r_4}w_{r_7}w_{r_5}w_{r_3}$ |
| $E_8$ | $w_{r_7}w_{r_8}w_{r_6}w_{r_7}w_{r_5}w_{r_8}w_{r_6}w_{r_4}w_{r_7}w_{r_5}w_{r_3}$ |

**Лемма 6.** [2, лемма 8] *Пусть* $\{r, s\}$ — *фундаментальная система корней типа* $A_2$. *Тогда*

$$n_r x_s(t) x_{r+s}(t) n_r^{-1} = x_s(\varepsilon_1 t) x_{r+s}(\varepsilon_2 t),$$

*где* $\varepsilon_i = \pm 1$, *и знаки у структурной константы* $N_{r,s}$, *можно выбрать так, что либо* $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$, *либо* $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$, *причем оба случая реализуются.*

## 3. Доказательство теоремы 1

Пусть при $r_1 = s$ и $r_2 = r$ из леммы 6 знаки у структурных констант выбраны так, что $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$. Положим $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ в каждой группе типа $E_l$ в соответствие с таблицей 2.

Таблица 2. Инволюции

| Группа | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
|---|---|---|---|
| $E_6(\mathbb{Z})$ | $x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$ | $n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}$ | $n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}h_{r_2}h_{r_4}h_{r_6}$ |
| $E_7(\mathbb{Z})$ | $x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$ | $n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}h_{r_5}h_{r_7}$ | $n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}$ |
| $E_8(\mathbb{Z})$ | $x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$ | $n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}n_{r_8}h_{r_5}h_{r_1}$ | $n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}h_{r_2}$ |

Покажем, что $\alpha_1, \alpha_2$ и $\alpha_3$ — инволюции. Для системы корней типа $\Phi = E_l$ $A_{r,s} = \pm 1$, если $s + r$ или $s - r$ — корень, поэтому применяя равенство (2) получаем

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 = x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2} = \\ = x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}x_{r_1}(1)h_{r_2}h_{r_2}x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2} = \\ = x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)x_{r_1}((-1)^{A_{r_2 r_1}})x_{r_1+r_2}((-1)^{A_{r_2 r_1+r_2}}) = 1.\end{aligned}$$

Равенства $\alpha_2^2 = 1$, $\alpha_3^2 = 1$ устанавливают леммы 10 и 12 из [2]. В связи с замечанием в конце статьи проверим еще раз равенство $\alpha_3^2 = 1$ для группы $E_7(\mathbb{Z})$. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}\alpha_3^2 &= (n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6})^2 \\ &= n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}n_{r_7}n_{r_5}n_{r_3}n_{r_1}h_{r_6} \\ &= n_{r_5}h_{r_6}n_{r_5}h_{r_6} \\ &= h_{r_6}^{n_{r_5}}n_{r_5}^2n_{r_7}^2n_{r_3}^2n_{r_1}^2h_{r_6} \\ &= h_{r_5+r_6}h_{r_5}h_{r_7}h_{r_3}h_{r_1}h_{r_6} \\ &= h_{r_1}h_{r_3}h_{r_7}.\end{aligned}$$

Элемент $h_{r_1}h_{r_3}h_{r_7}$ централизует каждый корневой элемент из группы $E_7(\mathbb{Z})$, следовательно, равен единице в присоединенной группе Шевалле $E_7(\mathbb{Z})$.

Проверим равенство $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$ для типа $E_6$. Вычисления показывают, что

$$(\alpha_1\alpha_2)^2 = \alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2^{-1}$$
$$= x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_3}^{-1}n_{r_6}^{-1}n_{r_4}^{-1}n_{r_2}^{-1}$$
$$= x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)n_{r_2}x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(-1)n_{r_2}^{-1} = 1,$$

последнее равенство справедливо в силу леммы 6. Аналогично получаем, что $(\alpha_1\alpha_2)^2 = 1$ в группах $E_7(\mathbb{Z})$ и $E_8(\mathbb{Z})$.

Таким образом, показано, что элементы $\alpha_1, \alpha_2$ и $\alpha_3$ являются инволюциями, причем $\alpha_1$ и $\alpha_2$ перестановочны. Теперь покажем, что эти элементы порождают группы $E_l$.

В силу леммы 5 в группе $E_l(\mathbb{Z})$ существует такие элементы $w \in W$ и $h \in H$, что

$$(\alpha_2\alpha_3)^{n_w} = n_{r_1}n_{r_2}\dots n_{r_l}h,$$
$$\alpha_1^{n_w} = x_{r_1}(\prod \eta_{r_i,s_j})x_{r_1+\dots+r_l}(\prod \eta_{r_k,s_m})h_{r_2+\dots+r_l}$$
$$= x_{r_1}(\pm 1)x_{r_1+\dots+r_l}(\pm 1)h_{r_2+\dots+r_l}.$$

Произведения вида $\prod \eta_{r_i,s_j}$ далее будем записывать как $\pm 1$, так как эти произведения определяются заданием структурных констант для экстраспециальных пар системы корней.

Введем обозначения

$$\alpha = \alpha_1^{n_w},$$
$$\mu = (\alpha_2\alpha_3)^{n_w},$$
$$M = \langle \alpha, \mu \rangle$$

и покажем, что $M = E_l(\mathbb{Z})$. В силу равенств

$$(x_s(t))^{\mu^n} = x_{w_c^n(s)}(\pm t),$$
$$(h_s)^{\mu^n} = h_{w_c^n(s)},$$

для доказательства нам потребуются орбиты при действии элементом Кокстера $w_c$ на корнях из систем корней типа $E_l$, указанные в таблицах 3–7.

Далее рассмотрим каждый из типов $E_6, E_7, E_8$ по очереди.

**Тип $E_6$.** В этом случае имеем

$$\alpha^{\mu} = x_{r_2}(\pm 1)x_{-r_1}(\pm 1)h_{-r_1-r_2} \in M,$$

$$\alpha^{\mu^2} = x_{r_3}(\pm 1)x_{-r_2}(\pm 1)h_{-r_2-r_3} \in M,$$

$$\alpha^{\mu^3} = x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_6}(\pm 1)x_{-r_3}(\pm 1)h_{-r_1-r_2-2r_3-r_4-r_6} \in M,$$

$$\alpha^{\mu^5} = x_{r_3+r_6}(\pm 1)x_{-r_2-r_3-r_4-r_5}(\pm 1)h_{-r_2-2r_3-r_4-r_5-r_6} \in M,$$

$$\alpha^{\mu^7} = x_{r_5}(\pm 1)x_{-r_4}(\pm 1)h_{-r_4-r_5} \in M,$$

$$\alpha^{\mu^9} = x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 1)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}(\pm 1)h_{r_1+2r_2+2r_3+r_4+r_5+r_6} \in M.$$

Далее

$$[\alpha, \alpha^{\mu^3}] = x_{r_1}(\pm 2)x_{-r_3}(\pm 2) \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^7}] = x_{r_1+\dots+r_6}(\pm 2)x_{r_5}(\pm 2) \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^9}] = x_{r_1+\dots+r_6}(\pm 2)x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 2) \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^7}] \times [\alpha, \alpha^{\mu^9}] = x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 2)x_{r_5}(\pm 2) \in M,$$

$$[x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 2)x_{r_5}(\pm 2), \alpha^{\mu^2}] = x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 4) \in M,$$

$$x^{\mu^3}_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 4) = x_{r_1}(\pm 4) \in M, \tag{7}$$

$$(x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 4)\alpha^{\mu^5})^2 = x_{-r_2}(\pm 4) \in M,$$

$$x^{\mu}_{-r_2}(\pm 4) = x_{-r_3}(\pm 4) \in M, \tag{8}$$

$$[\alpha^{\mu}, [\alpha, \alpha^{\mu^3}]] = x_{r_1}(\pm 4)x_{-r_3}(\pm 4)x_{r_1+r_2}(\pm 2) \in M. \tag{9}$$

Элемент $x_{r_1+r_2}(\pm 2)$ лежит в $M$ в силу включений (7), (8) и (9). Вычисления показывают, что

$$[\alpha^{\mu}, x_{r_1+r_2}(\pm 2)] = x_{r_2}(\pm 2) \in M,$$

$$x^{\mu^6}_{r_2}(\pm 2) = x_{r_5}(\pm 2) \in M,$$

$$x^{\mu^{11}}_{r_2}(\pm 2) = x_{r_1}(\pm 2) \in M, \tag{10}$$

$$x^{\mu}_{r_2}(\pm 2) = x_{r_3}(\pm 2) \in M, \tag{11}$$

$$(x_{r_1+r_2}(\pm 2)\alpha^{\mu^5})^2 = x_{r_1+r_2+r_3+r_6}(\pm 2) \in M,$$

$$x^{\mu^5}_{r_1+r_2+r_3+r_6}(\pm 2) = x_{r_6}(\pm 2) \in M,$$

$$x^{\mu^{11}}_{r_3}(\pm 2) = x_{-r_2}(\pm 2) \in M, \tag{12}$$

$$x^{\mu^9}_{r_3}(\pm 2) = x_{r_1+\dots+r_6}(\pm 2) \in M, \tag{13}$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}] = x_{r_1}(\pm 2)x_{r_1+r_2+2r_3+r_4+r_5+r_6}(\pm 1) \times x_{r_3}(\pm 2)x_{r_1+\dots+r_6}(\pm 2)x_{-r_2}(\pm 2) \in M. \tag{14}$$

Из включений (10), (11), (12), (13) и (14) получаем

$$x_{r_1+r_2+2r_3+r_4+r_5+r_6}(\pm 1) \in M.$$

Последовательно получаем, что в $M$ лежат и следующие элементы

$$x^{\mu^3}_{r_1+r_2+2r_3+r_4+r_5+r_6}(\pm 1) = x_{r_6}(\pm 1),$$

$$(x_{r_6}(\pm 1)\alpha^{\mu^2})^2 = x_{r_3+r_6}(\pm 1),$$

$$x^{\mu^7}_{r_3+r_6}(\pm 1) = x_{r_1}(\pm 1), \tag{15}$$

$$x^{\mu^7}_{r_1}(\pm 1) = x_{r_5}(\pm 1),$$

$$(x_{r_5}(\pm 1), \alpha^{\mu^3})^2 = x_{r_1+\dots+r_6}(\pm 1),$$

$$x^{\mu}_{r_1+\dots+r_6}(\pm 1) = x_{-r_1}(\pm 1). \tag{16}$$

Таким образом, элементы $x_{-r_1}(\pm 1)$, $x_{r_1}(\pm 1)$ и $\mu$ лежат в $M$, то есть $M$ удовлетворяет условиям леммы 5 и, следовательно, совпадает с $E_6(\mathbb{Z})$.

Таблица 3. Орбиты при действии элементом Кокстера $w_c$ на корнях системы типа $E_6$

| $s$ | $-r_1$ | $r_6$ |
|---|---|---|
| $w_c(s)$ | $-r_2$ | $-r_1-r_2-r_3-r_6$ |
| $w_c^2(s)$ | $-r_3$ | $-r_2-r_3-r_4$ |
| ${w_c}^3(s)$ | $-r_1-r_2-r_3-r_4-r_6$ | $-r_1-r_2-2r_3-r_4-r_5-r_6$ |
| ${w_c}^4(s)$ | $-r_2-r_3-r_4-r_5$ | $-r_2-r_3-r_4-r_6$ |
| ${w_c}^5(s)$ | $-r_3-r_6$ | $-r_3-r_4-r_5$ |
| ${w_c}^6(s)$ | $-r_4$ | $-r_6$ |
| ${w_c}^7(s)$ | $-r_5$ | $r_1+r_2+r_3+r_6$ |
| ${w_c}^8(s)$ | $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5$ | $r_2+r_3+r_4$ |
| ${w_c}^9(s)$ | $r_2+r_3+r_6$ | $r_1+r_2+2r_3+r_4+r_5+r_6$ |
| ${w_c}^{10}(s)$ | $r_3+r_4$ | $r_2+r_3+r_4+r_6$ |
| ${w_c}^{11}(s)$ | $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6$ | $r_3+r_4+r_5$ |
| ${w_c}^{12}(s)$ | $-r_1$ | $r_6$ |

**Тип $E_7$.** В этом случае имеем

$$\alpha^{\mu^2} = x_{r_3}(\pm1)x_{-r_2}(\pm1)h_{r_2+r_3} \in M,$$

$$\alpha^{\mu^3} = x_{r_4}(\pm1)x_{-r_3}(\pm1)h_{r_3+r_4} \in M,$$

$$\alpha^{\mu^4} = x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_7}(\pm1)x_{-r_4}(\pm1)h_{-r_1-r_2-r_3-2r_4-r_5-r_7} \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}] = x_{r_1}(\pm2)x_{-r_2}(\pm2) \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu^9} = x_{-r_1}(\pm2)x_{r_2}(\pm2) \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu} = x_{r_2}(\pm2)x_{-r_3}(\pm2) \in M.$$

Таблица 4. Орбиты при действии элементом Кокстера $w_c$ на корнях системы типа $E_6$

| $s$ | $r_1$ | $r_1+r_2$ |
|---|---|---|
| $w_c(s)$ | $r_2$ | $r_2+r_3$ |
| ${w_c}^2(s)$ | $r_3$ | $r_1+r_2+2r_3+r_4+r_6$ |
| ${w_c}^3(s)$ | $r_1+r_2+r_3+r_4+r_6$ | $r_1+2r_2+2r_3+2r_4+r_5+r_6$ |
| ${w_c}^4(s)$ | $r_2+r_3+r_4+r_5$ | $r_2+2r_3+r_4+r_5+r_6$ |
| ${w_c}^5(s)$ | $r_3+r_6$ | $r_3+r_4+r_6$ |
| ${w_c}^6(s)$ | $r_4$ | $r_4+r_5$ |
| ${w_c}^7(s)$ | $r_5$ | $-r_1-r_2-r_3-r_4$ |
| ${w_c}^8(s)$ | $-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5$ | $-r_1-2r_2-2r_3-r_4-r_5-r_6$ |
| ${w_c}^9(s)$ | $-r_2-r_3-r_6$ | $-r_2-2r_3-r_4-r_6$ |
| ${w_c}^{10}(s)$ | $-r_3-r_4$ | $-r_1-r_2-2r_3-2r_4-r_5-r_6$ |
| ${w_c}^{11}(s)$ | $-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6$ | $-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6$ |
| ${w_c}^{12}(s)$ | $r_1$ | $r_1+r_2$ |

Положим

$$\gamma = [\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu^9} \times [\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu} = x_{-r_1}(\pm2)x_{-r_3}(\pm2) \in M.$$

Тогда элементы

$$\gamma^{\mu^9} = x_{r_1}(\pm2)x_{r_3}(\pm2),$$

$$[\alpha, \gamma^{\mu^9}] = x_{r_1}(\pm4),$$

$$[\alpha^{\mu}, \alpha^{\mu^2}] = x_{r_2}(\pm2)x_{-r_3}(\pm2)$$

также лежат в подгруппе $M$. Вычисления показывают, что

$$[[\alpha, \alpha^{\mu^2}], \alpha^{\mu^3}] = x_{-r_2-r_3}(\pm2)x_{-r_2}(\pm4) \in M, \tag{17}$$

$$x_{r_1}^{\mu^{10}}(\pm 4) = x_{-r_2}(\pm 4) \in M. \tag{18}$$

В силу (17) и (18) имеем $x_{-r_2-r_3}(\pm 2) \in M$. Далее

$$[x_{-r_2-r_3}(\pm 2), \alpha^{\mu^2}] = x_{-r_2}(\pm 2) \in M,$$

$$x_{-r_2}^{\mu^{11}}(\pm 2) = x_{r_4}(\pm 2) \in M, \tag{19}$$

$$x_{r_4}^{\mu^5}(\pm 2) = x_{r_1+\dots+r_7}(\pm 2) \in M, \tag{20}$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^3}] = x_{r_1+r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7}(\pm 1) x_{r_1+\dots+r_7}(\pm 2) x_{r_4}(\pm 2) \in M. \tag{21}$$

Элемент $x_{r_1+r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7}(\pm 1)$ лежит в $M$ в силу (19), (20) и (21). Значит, элементы

$$x_{r_6}(\pm 1) = x^{\mu^3}_{r_1+r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7}(\pm 1),$$

$$(x_{r_6}(\pm 1)\alpha^{\mu^4})^2 = x_{r_1+\dots+r_7}(\pm 1),$$

$$x_{r_1+\dots+r_7}^{\mu^{10}}(\pm 1) = x_{r_1}(\pm 1) \tag{22}$$

также лежат в $M$. Таким образом, в силу (22) подгруппа $M$ удовлетворяет требованиям леммы 5. И, следовательно, совпадает с $E_7(\mathbb{Z})$.

Таблица 5. Половины орбит при действии элементом Коксте-ра $w_c$ на корнях системы типа $E_7$

| $s$ | $r_1$ | $r_1+r_2$ |
|---|---|---|
| $w_c(s)$ | $r_2$ | $r_2+r_3$ |
| ${w_c}^2(s)$ | $r_3$ | $r_3+r_4$ |
| ${w_c}^3(s)$ | $r_4$ | $r_1+r_2+r_3+2r_4+r_5+r_7$ |
| ${w_c}^4(s)$ | $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_7$ | $r_1+2r_2+2r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_7$ |
| ${w_c}^5(s)$ | $r_2+r_3+r_4+r_5+r_6$ | $r_2+2r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7$ |
| ${w_c}^6(s)$ | $r_3+r_4+r_7$ | $r_3+2r_4+r_5+r_7$ |
| ${w_c}^7(s)$ | $r_4+r_5$ | $r_1+r_2+r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_7$ |
| ${w_c}^8(s)$ | $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7$ | $r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7$ |
| ${w_c}^9(s)$ | $-r_1$ | $-r_1-r_2$ |

**Тип $E_8$.** В этом случае имеем

$$\alpha^{\mu^2} = x_{r_3}(\pm 1) x_{-r_2}(\pm 1) h_{r_2+r_3} \in M,$$

$$\alpha^{\mu^4} = x_{r_5}(\pm 1) x_{-r_4}(\pm 1) h_{r_4+r_5} \in M.$$

Отсюда

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}] = x_{r_1}(\pm 2)x_{-r_2}(\pm 2) \in M.$$

Из леммы 3 следует, что $x_r(t)^{\mu^{15}} = x_{-r}(t)$, поэтому половины орбит, не указанные в таблицах 6-7, можно найти, применив это равенство. Положим

$$\gamma = x_{-r_1}(\pm 2)x_{-r_3}(\pm 2).$$

Тогда

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu^{15}} = x_{-r_1}(\pm 2)x_{r_2}(\pm 2) \in M,$$
$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu} = x_{r_2}(\pm 2)x_{-r_3}(\pm 2) \in M.$$

Далее

$$[\alpha^{\mu^4}, \gamma] = x_{-r_4}(\pm 4)x_{-r_3-r_4}(\pm 2) \in M,$$
$$\gamma^{\eta} = x_{r_1}(\pm 2)x_{r_3}(\pm 2) \in M,$$
$$[\alpha, \gamma^{\mu^{15}}] = x_{r_1}(\pm 4) \in M.$$

Очевидно,

$$x_{r_1}^{\mu^{15}}(\pm 4) = x_{-r_1}(\pm 4) \in M,$$
$$x_{-r_1}(\pm 4)^{\mu^3} = x_{-r_4}(\pm 4) \in M$$

и, следовательно,

$$x_{-r_4}(\pm 4)[\alpha^{\mu^4}, \gamma] = x_{-r_3-r_4}(\pm 2) \in M.$$

Используя последние включения, получаем

$$[x_{-r_3-r_4}(\pm 2), \alpha^{\mu^3}] = x_{-r_3}(\pm 2) \in M,$$

$$x_{-r_3}^{\mu^{-3}}(\pm 2) = x_{r_1+r_2+\dots+r_8}(\pm 2) \in M, \tag{23}$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^4}] = x_{r_1+\dots+r_8}(\pm 2)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}(\pm 1)x_{r_5}(\pm 2) \in M, \tag{24}$$

$$x_{-r_3}^{\mu^{15}}(\pm 2) = x_{r_3}(\pm 2) \in M,$$

$$x_{r_3}(\pm 2)^{\mu^2} = x_{r_5}(\pm 2) \in M. \tag{25}$$

Элемент $x_{r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}(\pm 1)$ лежит в $M$ в силу (24), (23) и (25). Поэтому

$$x_{r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}^{\mu^{-9}}(\pm 1) = x_{r_1}(\pm 1) \in M.$$

Таким образом, подгруппа $M$ удовлетворяет условиям леммы 5 и, следовательно, $M = E_8(\mathbb{Z})$.

Теорема 1 доказана. $\square$

Таблица 6. Половина орбиты при действии элементом Кокстера $w_c$ на корнях системы типа $E_8$

| $s$ | $r_1$ |
|---|---|
| $w_c(s)$ | $r_2$ |
| ${w_c}^2(s)$ | $r_3$ |
| ${w_c}^3(s)$ | $r_4$ |
| ${w_c}^4(s)$ | $r_5$ |
| ${w_c}^5(s)$ | $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_8$ |
| ${w_c}^6(s)$ | $r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7$ |
| ${w_c}^7(s)$ | $r_3+r_4+r_5+r_8$ |
| ${w_c}^8(s)$ | $r_4+r_5+r_6$ |
| ${w_c}^9(s)$ | $r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8$ |
| ${w_c}^{10}(s)$ | $r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_8$ |
| ${w_c}^{11}(s)$ | $r_3+r_4+r_5+r_6+r_7$ |
| ${w_c}^{12}(s)$ | $r_4+r_5+r_8$ |
| ${w_c}^{13}(s)$ | $r_5+r_6$ |
| ${w_c}^{14}(s)$ | $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8$ |
| ${w_c}^{15}(s)$ | $-r_1$ |

Таблица 7. Половина орбиты при действии элементом Кокстера $w_c$ на корнях системы типа $E_8$

| $s$ | $r_1+r_2$ |
|---|---|
| $w_c(s)$ | $r_2+r_3$ |
| ${w_c}^2(s)$ | $r_3+r_4$ |
| ${w_c}^3(s)$ | $r_4+r_5$ |
| ${w_c}^4(s)$ | $r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+r_6+r_8$ |
| ${w_c}^5(s)$ | $r_1+2r_2+2r_3+2r_4+2r_5+2r_6+r_7+r_8$ |
| ${w_c}^6(s)$ | $r_2+2r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8$ |
| ${w_c}^7(s)$ | $r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_8$ |
| ${w_c}^8(s)$ | $r_1+r_2+r_3+2r_4+3r_5+2r_6+r_7+r_8$ |
| ${w_c}^9(s)$ | $r_1+2r_2+2r_3+2r_4+3r_5+2r_6+r_7+2r_8$ |
| ${w_c}^{10}(s)$ | $r_2+2r_3+2r_4+2r_5+2r_6+r_7+r_8$ |
| ${w_c}^{11}(s)$ | $r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8$ |
| ${w_c}^{12}(s)$ | $r_4+2r_5+r_6+r_8$ |
| ${w_c}^{13}(s)$ | $r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+2r_6+r_7+r_8$ |
| ${w_c}^{14}(s)$ | $r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8$ |
| ${w_c}^{15}(s)$ | $-r_1-r_2$ |

**Замечание.** Над $\mathbb{Z}$ каждая присоединенная группа Шевалле исключительного типа, отличного от $E_7$, совпадает с универсальной. Выше порождающие тройки инволюций для типа $E_7$ выбираются именно в присоединенной группе. Таким образом, ответ на аналог вопроса (A) для универсальной группы Шевалле типа $E_7$ остается открытым. Более того, следующая лемма показывает, что, если универсальная группа Шевалле типа $E_7$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны , то необходимые порождающие тройки инволюций нельзя выбрать указанным выше способом.

**Лемма 7.** *Пусть $\widetilde{E}_7(\mathbb{Z})$ — универсальная группа Шевалле типа $E_7$. Тогда не существует такого диагонального элемента $h$ из $\widetilde{E}_7(\mathbb{Z})$, что*

$$(n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h)^2 = 1.$$

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что прообраз элемента $\alpha_3$ из таблицы 2 для типа $E_7$ в универсальной группе $\widetilde{E}_7(\mathbb{Z})$ имеет порядок 4.

Предположим, что существует такой диагональный элемент $h \in \widetilde{E}_7(\mathbb{Z})$, что $(n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h)^2 = 1$. Тогда в силу (3) элемент $h$ можно представить в виде

$$h_{r_1}(\varepsilon_1)h_{r_2}(\varepsilon_2)h_{r_3}(\varepsilon_3)h_{r_4}(\varepsilon_4)h_{r_5}(\varepsilon_5)h_{r_6}(\varepsilon_6)h_{r_7}(\varepsilon_7), \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{gathered}(n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_1}(\varepsilon_1)h_{r_2}(\varepsilon_2)h_{r_3}(\varepsilon_3)h_{r_4}(\varepsilon_4)h_{r_5}(\varepsilon_5)h_{r_6}(\varepsilon_6)h_{r_7}(\varepsilon_7))^2 \\
= n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_1}(\varepsilon_1)h_{r_2}(\varepsilon_2)h_{r_3}(\varepsilon_3)h_{r_4}(\varepsilon_4)h_{r_5}(\varepsilon_5)h_{r_6}(\varepsilon_6)h_{r_7}(\varepsilon_7)n_{r_7}n_{r_5}n_{r_3}n_{r_1} \\
\times h_{r_1}(\varepsilon_1)h_{r_2}(\varepsilon_2)h_{r_3}(\varepsilon_3)h_{r_4}(\varepsilon_4)h_{r_5}(\varepsilon_5)h_{r_6}(\varepsilon_6)h_{r_7}(\varepsilon_7) \\
= n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}h_{r_1}^{n_{r_7}}(\varepsilon_1)h_{r_2}^{n_{r_7}}(\varepsilon_2)h_{r_3}^{n_{r_7}}(\varepsilon_3)h_{r_4}^{n_{r_7}}(\varepsilon_4)h_{r_5}^{n_{r_7}}(\varepsilon_5)h_{r_6}^{n_{r_7}}(\varepsilon_6)h_{r_7}^{n_{r_7}}(\varepsilon_7)n_{r_7}^2n_{r_5}n_{r_3}n_{r_1} \\
\times h_{r_1}(\varepsilon_1)h_{r_2}(\varepsilon_2)h_{r_3}(\varepsilon_3)h_{r_4}(\varepsilon_4)h_{r_5}(\varepsilon_5)h_{r_6}(\varepsilon_6)h_{r_7}(\varepsilon_7) \\
= n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}h_{r_1}(\varepsilon_1)h_{r_2}(\varepsilon_2)h_{r_3}(\varepsilon_3)h_{r_4+r_7}(\varepsilon_4)h_{r_5}(\varepsilon_5)h_{r_6+r_7}(\varepsilon_6)h_{r_7}(\varepsilon_7)n_{r_7}^2n_{r_5}n_{r_3}n_{r_1} \\
\times h_{r_1}(\varepsilon_1)h_{r_2}(\varepsilon_2)h_{r_3}(\varepsilon_3)h_{r_4}(\varepsilon_4)h_{r_5}(\varepsilon_5)h_{r_6}(\varepsilon_6)h_{r_7}(\varepsilon_7).\end{gathered}$$

Аналогично сопрягаем элементами $n_{r_5}$, $n_{r_3}$, $n_{r_1}$ и, используя свойство (1), последнее произведение преобразуется в

$$\begin{gathered}h_{r_1}(\varepsilon_1)h_{r_1+r_2+r_3}(\varepsilon_2)h_{r_3}(\varepsilon_3)h_{r_3+r_4+r_5+r_7}(\varepsilon_4)h_{r_5}(\varepsilon_5)h_{r_5+r_6}(\varepsilon_6)h_{r_7}(\varepsilon_7)h_{r_7}h_{r_5}h_{r_3}h_{r_1} \\
\times h_{r_1}(\varepsilon_1)h_{r_2}(\varepsilon_2)h_{r_3}(\varepsilon_3)h_{r_4}(\varepsilon_4)h_{r_5}(\varepsilon_5)h_{r_6}(\varepsilon_6)h_{r_7}(\varepsilon_7).\end{gathered}$$

Используя (3), приведем подобные и получим

$$h_{r_1}(-\varepsilon_1^2\varepsilon_2)h_{r_2}(\varepsilon_2^2)h_{r_3}(-\varepsilon_2\varepsilon_3^2\varepsilon_4)h_{r_4}(\varepsilon_4^2)h_{r_5}(-\varepsilon_4\varepsilon_5^2\varepsilon_6)h_{r_6}(\varepsilon_6^2)h_{r_7}(-\varepsilon_4\varepsilon_7^2).$$

Последнее произведение равно 1 тогда и только тогда, когда

$$-\varepsilon_1^2\varepsilon_2 = \varepsilon_2^2 = -\varepsilon_2\varepsilon_3^2\varepsilon_4 = \varepsilon_4^2 = -\varepsilon_4\varepsilon_5^2\varepsilon_6 = \varepsilon_6^2 = -\varepsilon_4\varepsilon_7^2 = 1.$$

Используя равенство $\varepsilon_i^2 = 1$, получим серию противоречивых равенств

$$-\varepsilon_2 = -\varepsilon_2\varepsilon_4 = -\varepsilon_4\varepsilon_6 = -\varepsilon_4 = 1.$$

□

Автор выражает огромную благодарность Я. Н. Нужину за постановку задачи и внимание к работе.

## References


[1] Ya.N. Nuzhin, *Generating three involutions of Chevalley group over a finite field of characteristic 2*, Algebra i logika, **2** (1990), 192–206. (In Russian) MR1131150

[2] Ya.N. Nuzhin, *Generating triples of involutions of the Lie type over a finite field of odd characteristic*, Algebra i logika, **36**:1 (1997), 77–96. (In Russian) MR1454692

[3] Ya.N. Nuzhin, *Generating triples of involutions of the groups of Lie type over a finite field of odd characteristic II*, Algebra i logika, **36**:4 (1997), 422–440. (In Russian) MR1601503

[4] Ivan A. Timofeenko, *Generation of the Chevalley group of type $G_2$ over the ring of integers by three involutions two of which commute,* Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, **8** (2015), 104–108. MR3522563

[5] The Kourovka Notebook. Unsolved problems in group theory, 18th edition, 2014. (In Russian)

[6] M.C. Tamburini, P. Zucca, *Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute*, J. of Algebra. **195** (1997), 650–661. MR1469645

[7] Ya.N. Nuzhin, *On Generation of Groups $PSL_n(\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of Which Commute*, Vladikavkaz. Matemat. Zh., **10** (2008), 68–74. (In Russian) MR2434655

[8] R.W. Carter, *Simple Groups of Lie Type*, John Wiley and Sons, 1972. MR0407163

[9] R. Steinberg, *Generators for simple groups*, Canad. J. Math., **14** (1962), 277–283. MR0143801

[10] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, M.: Mir, 1978. (In Russian) MR0524568

[11] R. Steinberg, *Lectures On Chevalley Groups*, Mir , 1974. (In Russian)



Ivan Alexeyevich Timofeenko
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
*E-mail address*: ivan.timofeenko@gmail.com