S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 838–847 (2017) УДК 512.56
DOI 10.17377/semi.2017.14.070 MSC 08C15

ОБ ω-НЕЗАВИСИМЫХ БАЗИСАХ КВАЗИТОЖДЕСТВ

А.О. БАШЕЕВА, А.В. ЯКОВЛЕВ

Abstract. In this article, we continue the study of complexity of quasivariety lattices. We prove that there are continuum many quasivarieties of graphs, monounary algebras, digraphs, and pointed Abelian groups having an ω-independet quasi-equational basis.

Keywords: quasivariety, quasi-equational basis, ω-independent basis.

Введение

Вопрос о существовании независимого базиса квазитождеств для алгебраических систем, не имеющих конечного базиса квазитождеств, был поднят в работах А. И. Мальцева [3] и А. Тарского [20]. На сегодняшний день независимые базисы квазитождеств были найдены для многих классов алгебр и моделей. Например А. Н. Федоров [16] доказал, что свободная 2-нильпотентная группа ранга $n \geqslant 2$ не имеет независимого базиса квазитождеств относительно класса групп без кручения. Результаты о независимой базируемости были получены также для некоторых квазимногообразий групп в работах А. И. Будкина [4, 5, 6], также Н. Я. Медведев [7] показал, что множество квазимногообразий разрешимых групп, не имеющих независимого базиса квазитождеств относительно класса групп без кручения, имеет мощность континуума. В. К. Карташов [8] доказал существование континуума квазимногообразий унаров, не имеющих независимого базиса квазитождеств. В. И. Туманов [15] показал, что любую конечную решетку можно вложить в конечную решетку, не имеющую независимого базиса квазитождеств. В. А. Горбунов [2], построил пример

Basheyeva, A.O., Yakovlev, A.V., On ω-independent bases for quasi-identities.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1).

Поступила 18 мая 2017 г., опубликована 18 августа 2017 г.

квазимногообразия с двумя унарными операциями, которое не имеет независимого базиса квазитождеств, но имеет ω-независимый базис квазитождеств. Им же была найдена конечная унарная алгебра, которая не имеет ω-независимого и, следовтельно, независимого базиса квазитождеств.

Данная работа является продолжением работ [13, 17]. Мы уточним некоторые основные результаты этих работы и покажем, в частности, что среди квазимногообразий $\mathbf{V}_I$ (неориентированных) графов (без петель) из [13], не имеющих независимого базиса квазитождеств, есть 2^ω квазимногообразий, имеющих ω-независимый базис квазитождеств. Аналогичный результат установлен нами и для квазимногообразия ориентированных графов, а также для многообразий унаров и точечных абелевых групп.

Следующее утверждение принадлежит В. А. Горбунову [1].

Предложение 1. *Существует квазимногообразие* $\mathbf{K}$ *унарных алгебр такое, что*

(а) *в решетке подквазимногообразий* $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$ *есть* 2^ω *элементов, не имеющих покрытий (и, следовательно, независимого базиса квазитождеств),*

(б) *среди них есть* 2^ω *квазимногообразий, имеющих* ω*-независимый базис квазитождеств.*

Позже утверждения, аналогичные предложению 1 (а), были доказаны в случае унаров В. К. Карташовым в [8], для орграфов С. В. Сизым в [14], в случае унарных алгебр специального вида А. В. Кравченко [12], в случае дифференциальных группоидов и точечных абелевых групп А. Башеевой и др. в [17], в случае (неориентированных) графов (без петель) в работе А. В. Кравченко и второго автора [13], а также для антимногообразий унаров А. В. Карташовой в [9]. В настоящей работе мы покажем, что для квазимногообразий унаров, орграфов, графов и точечных абелевых групп из [8, 13, 14, 17] выполняется и предложение 1 (б). При доказательстве основных результатов работы использованы некоторые идеи из работ [8, 13, 17, 19].

1. Основные определения

Определения и обозначения, касающиеся алгебраических систем и их квазимногообразий, соответствуют монографии [2].

Квазитождествами называются предложения вида

$$\forall \overline{x}\ \varphi_1(\overline{x}) \& \ldots \& \varphi_k(\overline{x}) \to \varphi_0(\overline{x}),$$

где $\varphi_i(\overline{x})$ — атомарная формула для любого $i \leqslant k$. Класс $\mathbf{K}$ называется *квазимногообразием*, если он является классом моделей для некоторого множества квазитождеств Φ. Множество Φ называется *базисом* квазитождеств для $\mathbf{K}$. Базис Φ называется *независимым*, если для любого $\varphi \in \Phi$ существует система, на которой истинны все квазитождества из $\Phi \setminus \{\varphi\}$, а квазитождество φ ложно. Базис Φ называется *ω-независимым*, если существует разбиение $\Phi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует система, на которой истинны все квазитождества из $\Phi \setminus \Phi_n$, но ложно некоторое квазитождество из Φ_n. Здесь и далее $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел.

Для произвольного класса $\mathbf{K}$ пусть $\mathbf{Q}(\mathbf{K})$ обозначает наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathbf{K}$ (порожденное классом $\mathbf{K}$). В дальнейшем считаем, что все рассматриваемые классы *абстрактные*, т. е. замкнутые относительно изоморфизма. Пусть $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$ обозначает решетку подквазимногообразий квазимногообразия $\mathbf{K}$. Мы будем обозначать алгебраические системы рукописными буквами, а их носители — соответствующими курсивными. Напомним определения тех систем, которые нам потребуются.

Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ — алгебраические системы. Отображение $\alpha : G \to H$ называется *гомоморфизмом* из $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}$, если

(а) для любой n-местной операции f и любых элементов $x_0, \dots x_{n-1} \in G$ выполняется равенство

$$\alpha(f(x_0, \dots, x_{n-1}) = f(\alpha(x_0), \dots, \alpha(x_{n-1})),$$

(б) для любого m-местного отношения r и любых элементов $x_0, \dots x_{m-1} \in G$ выполняется импликация

$$(x_0, \dots, x_{m-1}) \in r \Rightarrow r(\alpha(x_0), \dots, \alpha(x_{m-1})).$$

Если существует гомоморфизм из $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}$, то пишем $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$.

2. Неориентированные графы

Под категориями в дальнейшем всегда понимаются категории алгебраических систем, где объектами являются алгебраические системы соответствующего класса, а морфизмами — гомоморфизмы.

Ориентированным графом называется предикатная система с одним бинарным предикатом r, удовлетворяющая квазитождеству

$$\forall x \, \forall y \, \big(r(x,x) \to x = y\big).$$

Пусть $\mathbf{D}$ обозначает квазимногообразие орграфов. Система, определенная в $\mathbf{D}$ порождающими $\{c_1, \dots, c_n\}$ и определяющими соотношениями

$$\{r(c_1, c_2), \dots, r(c_{n-1}, c_n), r(c_n, c_1)\},$$

называется *циклом* длины n и обозначается $\mathcal{C}_n$. Пусть $\mathbf{C}$ обозначает квазимногообразие орграфов, определенное в $\mathbf{D}$ квазитождествами

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \; r(x,y) \;\&\; r(x,z) \to y = z;$$
$$\forall x \, \forall y \, \forall z \; r(y,x) \;\&\; r(z,x) \to y = z.$$

Очевидно, что $\mathcal{C}_n \in \mathbf{C}$ для любого $n > 1$.

(Неориентированным) *графом* (без петель) называется система с одним бинарным предикатом, удовлетворяющая квазитождествам

$$\forall x \, \forall y \; r(x,x) \to x = y, \quad \forall x \, \forall y \; r(x,y) \to r(y,x).$$

Пусть $\mathbf{G}$ обозначает квазимногообразие графов. (Всюду в этом разделе мы пользуемся обозначениями из работы [13].) Обозначим через $\mathcal{G}_n$ граф, определенный в $\mathbf{G}$ теми же порождающими и соотношениями, что и цикл $\mathcal{C}_n$.

Как показано в [18], существует полное вложение F квазимногообразия орграфов $\mathbf{C}$ в квазимногообразие графов $\mathbf{G}$. В [11] предложена модификация этого вложения F_k, осуществляющая полное вложение в квазимногообразие $\mathbf{Q}(\mathcal{G}_{2k+1})$, где $k > 0$. Зафиксируем произвольное $k > 0$. Пусть $\mathcal{Z}_n = F_k(\mathcal{C}_n)$, $n > 1$. Пусть $\mathbf{V}$ —квазимногообразие графов, порожденное системами $\mathcal{Z}_n$, $n > 1$. Для любого собственного подмножества I множества $\mathbb{P}$ простых чисел пусть $\mathbf{V}_I$ обозначает подкласс $\mathbf{V}$, состоящий из графов, в которые не вкладывается ни одна система $\mathcal{Z}_n$ такая, что n делится на простое число p, не принадлежащее I.

Следующее утверждение доказано в [13, лемма 6, предложение 8]. Заметим, что при доказательстве леммы 6 не требовалось, чтобы p было наибольшим простым делителем m, но это не влияет на доказательство самой леммы и других утверждений из [13].

Лемма 2. *Пусть $m = p^s q$, где $s > 0$, q — натуральное число, p — простое число, которое взаимно просто с q и является максимальным простым делителем числа n, не принадлежащим I. С каждой вершиной u графа $\mathcal{Z}_m$ свяжем переменную x_u. Пусть $\overline{x}$ обозначает кортеж переменных x_u, где $u \in Z_m$, и пусть φ_m обозначает квазитождество*

$$\forall \overline{x} \left(\bigwedge_{(u,v)\in R(\mathcal{Z}_m)} r(x_u, x_v) \right) \to x_{c_1} = x_{c_{1+q}}.$$

Тогда $\Phi_I = \{\varphi_m \mid \mathcal{Z}_m \notin \mathbf{V}_I\}$ является базисом квазитождеств квазимногообразия $\mathbf{V}_I$ относительно $\mathbf{V}$.

Теорема 3. *Пусть множество $I \subseteq \mathbb{P}$ бесконечно и пусть его дополнение $\mathbb{P}\backslash I$ также бесконечно. Тогда квазимногообразие графов $\mathbf{V}_I$ не имеет покрытий в решетке $\mathrm{L_q}(\mathbf{V})$ и, следовательно, не имеет независимого базиса квазитождеств относительно $\mathbf{V}$. Тем не менее, $\mathbf{V}_I$ имеет ω-независимый базис квазитождеств относительно $\mathbf{V}$.*

Доказательство. Согласно [13, теорема 9] квазимногообразие $\mathbf{V}_I$ не имеет покрытий в $\mathrm{L_q}(\mathbf{V})$ и, следовательно, не имеет независимого базиса квазитождеств относительно $\mathbf{V}$.

Покажем, что базис Φ_I из леммы 2 является ω-независимым для $\mathbf{V}_I$. Для каждого простого числа $p \in \mathbb{P}\backslash I$ пусть Σ_p обозначает множество квазитождеств $\psi_n \in \Phi_I$ таких, что разложение $n = p^s q$ удовлетворяет условиям леммы 2. Покажем, что $\Phi_I = \bigcup_{p\in\mathbb{P}\backslash I} \Sigma_p$ — искомое разбиение. Для этого для каждого $p \in \mathbb{P}$ найдем систему $\mathcal{Z}_n \in \mathbf{V}$ такую, что $\mathcal{Z}_n \notin \mathbf{V}_I$, но $\mathcal{Z}_n$ удовлетворяет всем квазитождествам, принадлежащим множеству $\Phi_I\backslash\Sigma_p$.

Действительно, зафиксируем $p \notin I$. Пусть q — натуральное число такое, что $q > 1$ и q не делится ни на одно простое число, не принадлежащее I. Положим $n = qp$. Тогда $\mathcal{Z}_n$ не удовлетворяет квазитождеству ψ_n, так как при подстановке $x_u \mapsto u$ посылка этого квазитождества истинна, а заключение ложно.

Покажем, что $\mathcal{Z}_n$ удовлетворяет каждому квазитождеству $\psi_m \in \Phi_I\backslash\Sigma_p$. Если посылка ψ_m истинна в $\mathcal{Z}_n$ при некоторой подстановке переменных, то существует гомоморфизм из $\mathcal{Z}_m$ в $\mathcal{Z}_n$, продолжающий эту подстановку. Так как $F_k(\mathcal{C}_m) = \mathcal{Z}_m \to \mathcal{Z}_n = F_k(\mathcal{C}_n)$ и F_k — полное вложение, существует гомоморфизм из $\mathcal{C}_m$ в $\mathcal{C}_n$. Согласно [10, лемма 1], это означает, что n делит m. Рассмотрим наибольший простой делитель p_* числа m, не принадлежащий множеству I. По выбору n числа p_* и q взаимно простые. Так как n делит m, имеем $p \leqslant p_*$. Так как $\psi_m \notin \Sigma_p$, получаем строгое неравенство $p < p_*$. Следовательно, числа $n = qp$ и p_* взаимно простые. Рассмотрим представление $m = p_*^t r$, где r взаимно просто с p_*. Из доказанного выше следует, что n делит r. Следовательно заключение квазитождества ψ_m истинно в $\mathcal{Z}_n$ при той же подстановке. $\square$

Рассмотрим квазимногообразие $\mathbf{V}'$, являющееся пересечением всех квазимногообразий вида $\mathbf{V}_I$, где I пробегает множество всех бесконечных собственных подмножеств в $\mathbb{P}$. Квазимногообразие $\mathbf{V}'$ состоит из систем, в которые не вложима ни одна система $\mathcal{Z}_n$, где $n > 1$.

Предложение 4. *Квазимногообразие* $\mathbf{V}'$ *имеет бесконечный рекурсивный независимый базис квазитождеств.*

Доказательство. Пусть $p_0 < p_1 < \ldots < p_n < \ldots$ — упорядочение множества $\mathbb{P}$ по возрастанию, пусть $n^* = (p_0 \cdot \ldots \cdot p_n)^{n+1}$ для любого натурального n, $0^\sharp = 1$ и пусть $n^\sharp = (p_0 \cdot \ldots \cdot p_{n-1})^n$ для любого $n > 1$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через ξ_n квазитождество

$$\forall \overline{x} \ \Big(\bigwedge_{(u,v) \in R(\mathcal{Z}_{n^*})} r(x_u, x_v) \Big) \to x_{c_1} = x_{c_{1+n^\sharp}}.$$

Полагаем $\Xi = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Покажем, что Ξ является независимым базисом квазитождеств для $\mathbf{V}'$.

Если посылка квазитождества ξ_n выполняется в некотором графе $\mathcal{G} \in \mathbf{V}'$ при некоторой подстановке переменных, то существует гомоморфизм из $\mathcal{Z}_{n^*}$ в $\mathcal{G}$. Согласно [13, лемма 5], образ этого гомоморфизма изоморфен $\mathcal{Z}_k$ для некоторого натурального k. Поскольку $\mathcal{G} \in \mathbf{V}'$, это возможно только в случае, когда $k = 1$. Но в этом случае в $\mathcal{G}$ выполняется также и заключение квазитождества ξ_n при исходной подстановке переменных. С другой стороны, если $\mathcal{G} \notin \mathbf{V}'$, то найдется натуральное $n > 1$, такое что система $\mathcal{Z}_n$ изоморфна подсистеме в $\mathcal{G}$. Пусть t_1 является номером максимального простого делителя числа n, а t_2 обозначает максимальный показатель степени, с которым простые делители входят в разложение числа n на простые множители и пусть $t = \max\{t_1, t_2 - 1\}$. Очевидно, что $t_2 > 0$, поэтому $t \in \mathbb{N}$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{Z}_n \not\models \xi_t$. Следовательно, квазимногообразие $\mathbf{V}'$ определяется базисом квазитождеств Ξ.

Покажем, что базис Ξ является независимым. Для этого достаточно установить, что для любого $n \in \mathbb{N}$ система $\mathcal{Z}_{n^*}$ удовлетворяет всем квазитождествам ξ_m, где $m \neq n$. Если $m < n$, то посылка квазитождества ξ_m выполняется на некоторых элементах из Z_{n^*} тогда и только тогда, когда $\mathcal{Z}_{m^*} \to \mathcal{Z}_{n^*}$, что равносильно в силу полноты функтора F_k тому, что $\mathcal{C}_{m^*} \to \mathcal{C}_{n^*}$. Тогда согласно [10, лемма 1], m^* делит n^*. В этом случае, однако, m^* делит $n^\sharp$, поскольку $m \neq n$. Таким образом, на тех же элементах из Z_{n^*} выполняется, очевидно, и заключение квазитождества ξ_m. Если же $m > n$, то n^* делит $m^\sharp$. Поэтому заключение квазитождества ξ_m выполняется на любых элементах из Z_{n^*}, на которых выполняется посылка этого квазитождества. Таким образом, $\mathcal{Z}_{n^*} \not\models \xi_n$ и $\mathcal{Z}_{n^*} \models \xi_m$ для любого натурального $m \neq n$, что и требовалось. □

3. Ориентированные графы

Для любого непустого $F \subseteq \mathbb{P}$ пусть $[F]$ обозначает произведение всех простых чисел из F. Для пустого множества положим $[\varnothing] = 1$. Пусть $I \subseteq \mathbb{P}$. Через φ_F^I обозначим квазитождество

$$\forall \overline{x} \ \&_{1 \leqslant i \leqslant [F]} \ r(x_i, x_{i+1}) \to x_1 = x_{[F \cap I]+1},$$

где $i + 1$ вычисляется по модулю $[F]$. Пусть $\Phi_I = \{\varphi_F^I \mid F \in P_{fin}(\mathbb{P})\}$ и пусть $\mathbf{C}_I$ — квазимногообразие, определенное в квазимногообразии $\mathbf{C}$ множеством квазитождеств Φ_I. Следующее утверждение доказано в [17, теорема 6].

Предложение 5. *Для любого бесконечного собственного подмножества $I \subseteq \mathbb{P}$ квазимногообразие $\mathbf{C}_I$ не имеет независимого базиса квазитождеств.*

Нетрудно проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 6. *Включение $\mathcal{G} \in \mathbf{C}_I$ выполняется тогда и только тогда, когда из $\mathcal{C}_{[F]} \leq \mathcal{G}$ следует, что $F \subseteq I$.*

Зафиксируем бесконечное собственное подмножество $I \subseteq \mathbb{P}$ такое, что его дополнение $\mathbb{P}\backslash I$ также бесконечно. Для каждого $F \in P_{fin}(\mathbb{P})$ и $p \notin F$ пусть ψ_F^p обозначает квазитождество

$$\forall \overline{x}\ \&_{1 \leqslant i \leqslant p \cdot [F]}\ r(x_i, x_{i+1}) \to x_1 = x_{[F]+1},$$

Пусть $\Psi_p = \{\psi_F^p \mid F \in P_{fin}(\mathbb{P}),\ p \notin F\}$ и $\Psi_I = \bigcup_{p \in \mathbb{P}\backslash I} \Psi_p$. Обозначим через $\mathbf{C}'_I$ квазимногообразие, определенное в $\mathbf{C}$ множеством квазитождеств Ψ_I.

Теорема 7. *Существует 2^ω квазимногообразий ориентированных графов, не имеющих независимого базиса квазитождеств, но имеющих ω-независимый базис квазитождеств.*

Доказательство. Проверим, что квазимногообразия $\mathbf{C}'_I$ являются искомыми. Сначала установим, что $\mathbf{C}_I = \mathbf{C}'_I$ для любого бесконечного подмножества $I \subseteq \mathbb{P}$, такого что множество $\mathbb{P}\backslash I$ также бесконечно.

Действительно, пусть $\mathcal{G} \in \mathbf{C}_I$, то есть $\mathcal{G} \models \Phi_I$. Рассмотрим квазитождество $\psi_F^p \in \Psi_I$. Пусть для некоторых элементов $a_1, \ldots a_{p[F]} \in G$ выполняется посылка этого квазитождества. Так как $p \notin I$, имеем $(F \cup \{p\}) \cap I = F \cap I \subseteq F$. В частности, число $m = \big[(F \cup \{p\}) \cap I\big]$ делит число $[F]$. В силу выполнимости на $\mathcal{G}$ квазитождества $\varphi^I_{F \cup \{p\}}$ получаем $a_1 = a_{[F \cap I]+1}$. Следовательно, $a_1 = a_{[F]+1}$, то есть выполняется заключение квазитождества ψ_F^p. Таким образом, $\mathcal{G} \models \Psi_I$, поэтому $\mathcal{G} \in \mathbf{C}'_I$.

Обратно, пусть $\mathcal{G} \in \mathbf{C}'_I$, то есть $\mathcal{G} \models \Psi_I$. Рассмотрим квазитождество φ_F^I. Пусть для некоторых $a_1, \ldots, a_{[F]} \in G$ выполняется посылка этого квазитождества. Если $F \subseteq I$, то $F \cap I = F$ и заключение φ_F^I также выполняется. В противном случае $F\backslash I \neq \varnothing$. Пусть $F\backslash I = \{p_0, \ldots, p_k\}$, $G_0 = F$ и пусть $G_{i+1} = G_i \backslash \{p_i\}$, где $0 \leqslant i \leqslant k$. Тогда $G_{k+1} = F \cap I$. Так как $a_{[F]+1} = a_1$, в $\mathcal{G}$ выполняется посылка квазитождества $\psi_{G_0}^{p_0}$. Для $0 \leqslant i \leqslant k$ квазитождество $\psi_{G_i}^{p_i}$ принадлежит Ψ_I, так как $p_i \notin I$. Ясно, что заключение квазитождества $\psi_{G_i}^{p_i}$ совпадает с первой формулой посылки квазитождества $\psi_{G_{i+1}}^{p_{i+1}}$. Следовательно, в $\mathcal{G}$ выполняется равенство $a_{[G_{k+1}]+1} = a_1$, а тем самым и заключение квазитождества φ_F^I. Таким образом, $\mathcal{G} \models \Phi_I$, поэтому $\mathcal{G} \in \mathbf{C}_I$.

В силу предложения 5 существует 2^ω различных квазимногообразий вида $\mathbf{C}'_I$, не имеющих независимого базиса квазитождеств. Покажем, что для каждого из них множество квазитождеств $\Psi_I = \bigcup_{p \in \mathbb{P}\backslash I} \Psi_p$ является ω-независимым базисом квазитождеств.

Для каждого $p \in \mathbb{P}\backslash I$ покажем, что цикл $\mathcal{C}_p$ удовлетворяет всем квазитождествам из $\Psi_I \backslash \Psi_p$. Действительно, пусть $q \in \mathbb{P}\backslash I$, $q \neq p$, $F \in P_{fin}(\mathbb{P})$ и $q \notin F$. Предположим, что в $\mathcal{C}_p$ выполняется посылка квазитождества ψ_F^q. Тогда существует гомоморфизм из $\mathcal{C}_{[F \cup \{q\}]}$ в $\mathcal{C}_p$. По лемме 1 из [10], получаем, что число $[F \cup \{q\}]$ делится на p. Так как $p \neq q$, имеем $p \in F$, то есть p делит $[F]$. Следовательно, в $\mathcal{C}_p$ выполняется заключение квазитождества ψ_F^q.

Так как $\mathcal{C}_p$ не удовлетворяет квазитождеству $\psi^p_\varnothing \in \Psi_p$, базис Ψ_I является искомым. □

Рассмотрим квазимногообразие $\mathbf{C}'$, являющееся пересечением всех квазимногообразий вида $\mathbf{C}_I$, где I пробегает множество всех бесконечных собственных подмножеств в $\mathbb{P}$. Базис этого квазимногообразия состоит из квазитождеств φ^I_F, где I пробегает множество бесконечных собственных подмножеств множества $\mathbb{P}$ простых чисел, а F — множество всех конечных подмножеств множества $\mathbb{P}$. Нетрудно проверить, что $\mathbf{C}'$ состоит из ориентированных графов из $\mathbf{C}$, в которые не вложим ни один из циклов $\mathcal{C}_n$, где $n > 1$. Таким образом, в силу теоремы 7 и леммы 6 базисами квазитождеств для $\mathbf{C}'$ относительно $\mathbf{C}$ являются множества $\bigcup_I \Phi_I$ и $\bigcup_I \Psi_I$ соответственно. Однако эти базисы не являются независимыми. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Предложение 8. *Квазимногообразие $\mathbf{C}'$ имеет бесконечный рекурсивный независимый базис квазитождеств.*

Доказательство. Пусть $p_0 < p_1 < \ldots < p_n < \ldots$ — упорядочение множества $\mathbb{P}$ по возрастанию, пусть $F_{-1} = \varnothing$ и пусть $F_n = \{p_k \in \mathbb{P} \mid k \leqslant n\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через ξ_n квазитождество

$$\forall \overline{x}\ \&_{1 \leqslant i \leqslant [F_n]}\ r(x_i, x_{i+1}) \to x_1 = x_{[F_{n-1}]+1}.$$

Полагаем $\Xi = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \Phi'$, где Φ' обозначает базис квазитождеств для $\mathbf{C}$, состоящий из двух квазитождеств, см. определение квазимногообразия $\mathbf{C}$ выше. Используя те же рассуждения, что и в доказательстве предложения 4, нетрудно проверить, что Ξ является независимым базисом квазитождеств для квазимногообразия $\mathbf{C}'$. □

4. Унары

Унаром называется алгебра с одной унарной операцией f. Пусть $\mathbf{U}$ обозначает многообразие унаров. Пусть $f^0(x) = x$ и пусть $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$. Система, определенная в $\mathbf{U}$ порождающим x и определяющим соотношением $x = f^n(x)$, называется *циклом* длины n и обозначается $\mathcal{U}_n$.

Пусть $I \subseteq \mathbb{P}$. Через φ^I_F обозначим квазитождество

$$\forall x\ f^{[F]}(x) = x \to f^{[F \cap I]}(x) = x.$$

Пусть $\Phi_I = \{\varphi^I_F \mid F \in P_{fin}(\mathbb{P})\}$ и пусть $\mathbf{U}_I$ — квазимногообразие, определенное в $\mathbf{U}$ множеством квазитождеств Φ_I. Следующее утверждение следует из результатов работы [8].

Предложение 9. *Для любого бесконечного собственного подмножества $I \subseteq \mathbb{P}$ квазимногообразие $\mathbf{U}_I$ не имеет независимого базиса квазитождеств.*

Зафиксируем бесконечное собственное подмножество $I \subseteq \mathbb{P}$ такое, что его дополнение $\mathbb{P} \backslash I$ также бесконечно. Для каждого $F \in P_{fin}(\mathbb{P})$ и $p \notin F$ пусть ψ^p_F обозначает квазитождество

$$\forall x\ f^{[F \cup \{p\}]}(x) = x \to f^{[F]}(x) = x.$$

Пусть $\Psi_p = \{\psi^p_F \mid F \in P_{fin}(\mathbb{P}),\ p \notin F\}$ и $\Psi_I = \bigcup_{p \in \mathbb{P} \backslash I} \Psi_p$. Обозначим через $\mathbf{U}'_I$ квазимногообразие, определенное в $\mathbf{U}$ множеством квазитождеств Ψ_I.

Теорема 10. *Существует 2^ω квазимногообразий унаров, не имеющих независимого базиса квазитождеств, но имеющих ω-независимый базис квазитождеств.*

Доказательство. Рассуждения аналогичны рассужениям из доказательства теоремы 7. При этом вместо предложения 5 используется предложение 9, а вместо систем $\mathcal{C}_{[F]}$ — системы $\mathcal{U}_{[F]}$. □

Рассмотрим квазимногообразие $\mathbf{U}'$, являющееся пересечением всех квазимногообразий вида $\mathbf{U}_I$, где I пробегает множество всех бесконечных собственных подмножеств в $\mathbb{P}$. Базис этого квазимногообразия состоит из квазитождеств φ_F^I, где I пробегает множество бесконечных собственных подмножеств множества $\mathbb{P}$ простых чисел, а F — множество всех конечных подмножеств множества $\mathbb{P}$.

Предложение 11. *Квазимногообразие $\mathbf{U}'$ имеет бесконечный рекурсивный независимый базис квазитождеств.*

Доказательство. Пусть $p_0 < p_1 < \ldots < p_n < \ldots$ — упорядочение множества $\mathbb{P}$ по возрастанию, пусть $F_{-1} = \varnothing$ и пусть $F_n = \{p_k \in \mathbb{P} \mid k \leqslant n\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через ξ_n квазитождество

$$\forall x\ f^{[F_n]}(x) = x \to f^{[F_{n-1}]}(x) = x.$$

Полагаем $\Xi = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Как и в доказательстве предложения 4, нетрудно проверить, что Ξ является независимым базисом квазитождеств для квазимногообразия $\mathbf{U}'$. □

5. Точечные абелевы группы

Точечной абелевой группой называется структура вида $\mathcal{A} = \langle A; +, -, 0, 1\rangle$, где редукт $\langle A; +, -, 0\rangle$ — абелева группа, а 1 — константный символ. Пусть $\mathbf{A}$ обозначает многообразие точечных абелевых групп. Для любого $a \in A$ пусть $0 \cdot a = 0$ и $(i+1)\cdot a = i \cdot a + a$ для $i \geqslant 0$. Система, определенная в $\mathbf{A}$ пустым множеством порождающих и определяющим соотношением $n \cdot 1 = 0$, называется *циклом* длины n и обозначается $\mathcal{A}_n$.

Пусть $I \subseteq \mathbb{P}$. Через φ_F^I обозначим квазитождество

$$[F] \cdot 1 = 0 \to [F \cap I] \cdot 1 = 0.$$

Пусть $\Phi_I = \{\varphi_F^I \mid F \in P_{fin}(\mathbb{P})\}$ и пусть $\mathbf{A}_I$ — квазимногообразие, определенное в $\mathbf{A}$ множеством квазитождеств Φ_I. Следующее утверждение доказано в [17, теорема 7].

Предложение 12. *Для любого бесконечного собственного подмножества $I \subseteq \mathbb{P}$ квазимногообразие $\mathbf{A}_I$ не имеет независимого базиса квазитождеств.*

Зафиксируем бесконечное собственное подмножество $I \subseteq \mathbb{P}$ такое, что его дополнение $\mathbb{P}\backslash I$ также бесконечно. Для каждого $F \in P_{fin}(\mathbb{P})$ и $p \notin F$ пусть ψ_F^p обозначает квазитождество

$$[F \cup \{p\}] \cdot 1 = 0 \to [F] \cdot 1 = 0.$$

Пусть $\Psi_p = \{\psi_F^p \mid F \in P_{fin}(\mathbb{P}),\ p \notin F\}$ и $\Psi_I = \bigcup_{p \in \mathbb{P}\backslash I} \Psi_p$. Обозначим через $\mathbf{A}'_I$ квазимногообразие, определенное в $\mathbf{A}$ множеством квазитождеств Ψ_I.

Теорема 13. *Существует 2^ω квазимногообразий точечных абелевых групп, не имеющих независимого базиса квазитождеств, но имеющих ω-независимый базис квазитождеств.*

Доказательство. Рассуждения аналогичны рассуждениям из доказательства теоремы 7. При этом вместо предложения 5 используется предложение 12, а вместо систем $\mathcal{C}_{[F]}$ — системы $\mathcal{A}_{[F]}$. □

Рассмотрим квазимногообразие $\mathbf{A}'$, являющееся пересечением всех квазимногообразий вида $\mathbf{A}_I$, где I пробегает множество всех бесконечных собственных подмножеств в $\mathbb{P}$. Базис этого квазимногообразия состоит из квазитождеств φ^I_F, где I пробегает множество бесконечных собственных подмножеств множества $\mathbb{P}$ простых чисел, а F — множество всех конечных подмножеств множества $\mathbb{P}$.

Предложение 14. *Квазимногообразие $\mathbf{A}'$ имеет бесконечный рекурсивный независимый базис квазитождеств.*

Доказательство. Пусть $p_0 < p_1 < \ldots < p_n < \ldots$ — упорядочение множества $\mathbb{P}$ по возрастанию, пусть $F_{-1} = \varnothing$ и пусть $F_n = \{p_k \in \mathbb{P} \mid k \leqslant n\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через ξ_n квазитождество

$$[F_n] \cdot 1 = 0 \to [F_{n-1}] \cdot 1 = 0.$$

Полагаем $\Xi = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Как и в доказательстве предложения 4, нетрудно проверить, что Ξ является независимым базисом квазитождеств для квазимногообразия $\mathbf{A}'$. □

В заключение авторы выражают глубокую признательность своим научным консультантам А. В. Кравченко, А. М. Нуракунову и М. В. Швидефски за постановку задачи и всестороннюю поддержку.

Список литературы

[1] V. A. Gorbunov, *Coverings in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability*, Algebra and Logic, **16**:5 (1977), 507–548. MR0538179

[2] V. A. Gorbunov, *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Plenum, New York, 1998. MR1654844

[3] A. I. Maltsev, *Universally axiomatizable subclasses of locally finite classes of models*, Siberian Math. J., **8**:5 (1967), 1005–1014. MR0223226

[4] A. I. Budkin, *Independent axiomatizability of quasivarieties of groups*, Mathematical Notes, **31**:6 (1982), 817–826. MR0665045

[5] A. I. Budkin, *Independent axiomatizability of quasivarieties of generalized solvable groups*, Algebra i Logika, **25**:3 (1986), 249–266. MR0903116

[6] A. I. Budkin, *Independent axiomatizability of quasivarieties of generalized solvable groups*, Algebra and Logic, **30**:2 (1991), 125–153. MR1186675

[7] N. Ya. Medvedev, *On quasivariety of l-groups and groups*, Siberian Math. J., **26**:5 (1985), 111–117. MR0808707

[8] V. K. Kartashov, *Quasivarieties of unars*, Mathematical Notes, **27**:1 (1980), 5–12. MR0562473

[9] A. V. Kartashova, *Antivarieties of unars*, Algebra and Logic, **50**:4 (2011), 357–364. MR2893586

[10] A. V. Kravchenko, *On the lattice complexity of quasivarieties of graphs and endographs*, Algebra and Logic, **36**:3 (1997), 164–168. MR1485596

[11] A. V. Kravchenko, *Q-universal quasivarieties of graphs*, Algebra and Logic, **41**:3 (2002), 173–181. MR1934538

[12] A. V. Kravchenko, *On the complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II*, Siberian Electronic Math. Reports, **13** (2016), 388–394. MR3506875

[13] A. V. Kravchenko, A. V. Yakovlev, *Quasivarieties of graphs and independent axiomatizability*, submitted for publication in 2017.

[14] S. V. Sizyi, *Quasivarieties of graphs*, Siberian Math. J., **35** (1994), 783–794. MR1302441

[15] V. I. Tumanov, *Finite lattices having no independent basis of quasi-identities*, Mathematical Notes, **36**:5 (1984), 811–815. MR0773799

[16] A. N. Fedorov, *Quasi-identities of a free 2-nilpotent group*, Mathematical Notes, **40**:5 (1986), 590–597. MR0886179

[17] A. Basheyeva, A. M. Nurakunov, M. V. Schwidefsky, and A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of subclasses. III*, Siberian Electronic Math. Reports, **14** (2017), 252–263. MR3633260

[18] Z. Hedrlín, A. Pultr, *Symmetric relations (undirected graphs) with given semigroups*, Monatsch. Math., **69**:4 (1965), 318–324. MR0188082

[19] A. V. Kravchenko, A. M. Nurakunov, M. V. Schwidefsky, *On quasi-equational bases of differential groupoids and unary algebras*, submitted for publication in 2017.

[20] A. Tarski, *Equational logic and equational theories of algebras*, Contrib. Math. Logic, **8** (1966), 275–288.

Aynur Basheyeva
The L. N. Gumilyov Eurasian National University,
2 Satpaev str.,
010000 Astana, Kazakhstan
E-mail address: basheeva@mail.ru

Andrew Yakovlev
Novosibirsk State University
1 Pirogov str.,
630090 Novosibirsk, Russia
E-mail address: yakor1191@gmail.com