S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 856–863 (2017) УДК 519.17+512.54

DOI 10.17377/semi.2017.14.072 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$

А.А. МАХНЕВ, М.М. ИСАКОВА, А.А. ТОКБАЕВА

Abstract. A.A. Makhnev and M.S. Samoilenko found parameters of strongly regular graphs which can be local subgraphs in antipodal distance-regular graph of diameter 3 with $\lambda = \mu$. It is suggested the programm of investigation antipodal distance-regular graph of diameter 3 with $\lambda = \mu$ and local subgraphs having this parameters. It is consider parameters $(64, 21, 8, 6)$ in this paper. It is proved that vertex-symmetric distance-regular graph with intersection array $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$ is arc-transitive with the automorphism group having socle $L_2(64)$ or $U_3(4)$.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Допустим, что Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\lambda = \mu$, в котором окрестности вершин сильно регулярны. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, и спектр $k^1, \sqrt{k}^f, -1^k, -\sqrt{k}^f$, где $f = (k+1)(r-1)/2$. В случае $r = 2$ получим граф Тэйлора, в котором $k' = 2\mu'$. Обратно, для любого сильно регулярного графа с параметрами $(v', 2\mu', \lambda', \mu')$

Makhnev, A.A., Isakova, M.M., Tokbaeva, A.A., Automorphisms of graph with intersection array $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061 (теорема) и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (следствие).

Поступила 6 мая 2017 г., опубликована 25 августа 2017 г.

найдется граф Тэйлора, в котором окрестности вершин сильно регулярны с соответствующими параметрами.

В [1] выделены параметры сильно регулярных графов с не более чем 1000 вершинами, которые могут быть окрестностями вершин в антиподальном дистанционно регулярном графе диаметра 3 с $\lambda = \mu$.

Мы предлагаем программу исследования вершинно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из заключения предложения [1]. В данной работе рассмотрены параметры $(64, 21, 8, 6)$.

Теорема 1. *Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит по s вершин в t антиподальных классах. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19\}$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) *Ω — пустой граф и $p \in \{3, 5, 13\}$;*

(2) *$p = 19$ и Ω — граф с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$ или $p = 17$ и Ω — граф с массивом пересечений $\{13, 8, 1; 1, 4, 13\}$;*

(3) *$p = 7$, Ω — объединение трех изолированных t-клик, $t = 2, 9$ или $p = 5$, $t = 5, 15$, и если $t = 5$, то Ω — граф с массивом пересечений $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$;*

(4) *$p = 3$, $t \in \{2, 5, ..., 20\}$;*

(5) *$p = 2$, либо $s = 1$, Ω является t-кликой и $t \leq 9$, либо $s = 3$, $t \leq 21$.*

Следствие 1. *Вершинно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$ является одним из двух реберно симметричных графов с группой автоморфизмов, имеющей цоколь $L_2(64)$ или $U_3(4)$.*

Заметим, что ввиду границы Дельсарта [2, предложение 4.4.6] максимальный порядок клики в дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{64, 42, 1; 1,$
$21, 64\}$ и спекром $64^1, 8^{65}, -1^{64}, -8^{65}$ не больше $1 - k/\theta_d = 1 + 64/8 = 9$. Если C является 9-кликой из Γ, то каждая вершина вне C смежна с 0 или с $b_1/(\theta_d + 1) + 1 - k/\theta_d = 3$ вершинами из C.

Лемма 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $g \in G$. Если ψ — мономиальное представление группы G в $GL(195, \mathbf{C})$, χ_1 — характер проекции ψ на подпространство собственных векторов размерности 65, отвечающих собственному значению 16, χ_2 — характер проекции ψ на подпространство размерности 64, то $\chi_1(g) = (16\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 8\alpha_3(g))/48$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/3 - 1$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 65$ и $\chi_2(g) - 64$ делятся на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 65 & 65/8 & -65/16 & -65/2 \\ 64 & -1 & -1 & 64 \\ 65 & -65/8 & 65/16 & -65/2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (16\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 8\alpha_3(g))/48$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (64\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 64\alpha_3(g))/195$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 195 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/3 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из [3, лемма 1]. Лемма доказана. $\square$

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что $p^3_{22} = 64$.

Лемма 2. *Если Ω — пустой граф, то либо $p = 13$, $\alpha_1(g) = 65$ и $\alpha_2(g) = 130$, либо $p = 5$, $\alpha_1(g) = 80l - 15$ и $\alpha_2(g) = 210 - 80l$, $l \in \{1, 2\}$, либо $p = 3$, $\alpha_1(g) = 48l + 7t + 1$, $\alpha_2(g) = 194 - 48l - 10t$ и $\alpha_3(g) = 3t$, t сравнимо с 2 по модулю 3.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф и $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$. Так как $v = 3 \cdot 65$, то $p \in \{3, 5, 13\}$.

Пусть $p = 13$. Тогда $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 195$ и $\chi_1(g) = (2\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/48 = 13(w_1 - 5)/16$. Отсюда $w_1 = 16l + 5$, $\alpha_1(g) = 65$ и $\alpha_2(g) = 130$.

Пусть $p = 5$. Тогда $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 195$ и $\chi_1(g) = (2\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/48 = 5(w_1 - 13)/16$. Отсюда $w_1 = 16l - 3$, $\alpha_1(g) = 80l - 15$ и $\alpha_2(g) = 210 - 80l$, $l \in \{1, 2\}$.

Пусть $p = 3$. Тогда $\alpha_3(g) = 3t$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 195 - 3t$, $\chi_2(g) = t - 1$ и $\chi_1(g) = (2\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 24t)/48 = (\alpha_1(g) - 65 - 7t)/16$. Так как $\chi_2(g) - 64$ делится на 3, то t сравнимо с 2 по модулю 3. Так как $\chi_1(g) - 65$ делится на 3, то $\alpha_1(g) - 1 - 7t$ делится на 48. Отсюда $\alpha_1(g) = 48l + 7t + 1$ и $\alpha_2(g) = 194 - 48l - 10t$. $\square$

В леммах 3–6 предполагается, что имеется t антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Пусть F — антиподальный класс, содержащий вершину $a \in \Omega$, $F \cap \Omega = \{a, a_2, ..., a_s\}$, $b \in \Omega(a)$. Черех $F(x)$ будем обозначать антиподальный класс, содержащий вершину x.

Лемма 3. *Если число p больше 7, то $p = 19$ и Ω — граф с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$ или $p = 17$ и Ω — граф с массивом пересечений*

$$\{13, 8, 1; 1, 4, 13\}.$$

Доказательство. Если $s = 3$, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t \leq 21$.

Пусть $p > 3$, $\alpha_1(g) = pw_1$. Тогда $s = 3$, $|\Omega| = 3t$, Ω — регулярный граф степени $t - 1$ и p делит $65 - t$.

Если $p > 19$, то Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, t - 23, 1; 1, 21, t - 1\}$, противоречие.

Пусть $p = 19$. Так как p делит $65 - t$, то $t = 8$, подграф $\Omega(b)$ содержит 3 вершины из $a^\perp$ и по 2 вершины из $[a_2]$, $[a_3]$, поэтому Ω дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$ (граф Клейна).

Пусть $p = 17$. Так как p делит $65 - t$, то $t = 14$, подграф $\Omega(b)$ содержит 5 вершин из $a^\perp$ и по 4 вершины из $[a_2]$, $[a_3]$, поэтому Ω дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 8, 1; 1, 4, 13\}$.

Пусть $p = 13$. Так как p делит $65 - t$, то $t = 13$, подграф $\Omega(b)$ содержит 9 вершин из $a^\perp$ и по 8 вершин из $[a_2]$, $[a_3]$, противоречие.

Пусть $p = 11$. Так как p делит $65 - t$, то $t = 10, 21$. Далее, подграф $\Omega(b)$ содержит 11 вершин из $a^\perp$ и по 10 вершин из $[a_2]$, $[a_3]$, противоречие. $\square$

Лемма 4. *Если $p = 7$, то Ω — объединение трех изолированных t-клик, $t = 2, 9$.*

Доказательство. Пусть $p = 7$. Так как p делит $65 - t$, то $t = 2, 9, 16$. В случае $t = 2$ граф Ω является объединением трех изолированных ребер.

В случае $t = 16$ для двух вершин $a, e \in \Omega$ с $d(a, e) \leq 2$ подграф $\Omega(a) \cap [e]$ содержит 0, 7 или 14 вершин. Если $e \in \Omega_2(a)$ и $\Omega(a) \cap [e]$ содержит 14 вершин, то, без ограничения общности, $e_2 \in [a]$ и $a_2 \in [e]$, где $F(e) = \{e, e_2, e_3\}$. Поэтому степень любой вершины в графе $\Omega(a) \cap [e]$ равна 0 или 7.

Допустим, что $b \in \Omega(a)$ и $\Omega(a) \cap [b]$ содержит 14 вершин. Тогда степень вершины в графе $\Omega(a) \cap [b]$ равна 6 или 13. Так как Γ не содержит 10-клик, то $\Omega(a) \cap [b]$ содержит вершину c степени 6. Если $e \in \Omega(c) - a^{\perp}$, то можно считать, что e смежна с вершиной a_2 из F, с вершиной b_2 из $F(b)$ и с 7 вершинами из $\Omega(a) \cap [b]$. Ясно, что $\Omega(c) \cap [a_2] = \Omega(c) \cap [b_2] = \Omega(c) - a^{\perp}$. Теперь для любой вершины $x \in \Omega(a) \cap [b] \cap [e]$ имеем $\Omega(x) \cap [a_2] = \Omega(x) \cap [b_2] = \Omega(x) - a^{\perp}$.

Если $|\Omega(a_2) \cap [b_2]| = 7$, то $\Omega(a) \cap [b] \cap [e]$ содержит 7 вершин, смежных со всеми вершинами из $\Omega(c) - a^{\perp}$. Для двух несмежных вершин $c, d \in \Omega(a) \cap [b] \cap [e]$ подграф $\Omega(c) \cap [d]$ содержит a, b, 7 вершин из $\Omega(c) - a^{\perp}$ и 5 вершин из $\Omega(a) \cap [b]$, противоречие с тем, что тогда степень a в графе $\Omega(c) \cap [d]$ равна 6. Значит, $C = \{a, b\} \cup (\Omega(a) \cap [e])$ является 9-кликой, противоречие с тем, что вершина e вне C смежна с 7 вершинами из C.

Значит, $|\Omega(a_2) \cap [b_2]| = 14$. Если вершины a_2, b_2 не смежны, то любая вершина из $\Omega(c) - a^{\perp}$ смежна с 7 вершинами из $\Omega(a)$ и не более чем с 6 вершинами из $\Omega(a_2) \cap [b_2]$. Значит, каждая вершина из $\Omega(c) - a^{\perp}$ изолирована в графе $\Omega(a_2) \cap [b_2]$. Отсюда, подграф $\Omega(a_2) \cap [b_2]$ является кокликой. Противоречие с тем, что $\Omega(e)$ содержит b_2, c_2, 7 вершин из $\Omega(a) \cap [b]$ и 6 вершин из $\Omega(a_3) \cup \Omega(b_3)$. Значит, вершины a_2, b_2 смежны. Аналогично доказывается, что a_3, b_3 смежны и $|\Omega(a_3) \cap [b_3]| = 14$. Теперь $\Omega(a_i) \cap [b_i]$ — регулярный граф степени 6 и каждая вершина из $\Omega(a_2) \cap [b_2]$ смежна с 7 вершинами в одном из подграфов $\Omega(a_3) \cap [b_3]$, $\Omega(a) \cap [b]$ и с 0 в другом.

Пусть c_1, c_2 — две вершины из $\Omega(a) \cap [e]$. Если $\Omega(c_1) - a^{\perp}$ не совпадает с $\Omega(c_2) - a^{\perp}$, то $\Omega(a_2) \cap [b_2]$ содержит 8 вершин, смежных с вершинами из $\Omega(a) \cap [b]$, противоречие. Значит, $\Omega(c_1) - a^{\perp} = \Omega(c_2) - a^{\perp}$ для любых двух вершин c_1, c_2 из $\Omega(a) \cap [e]$. Итак, $\Omega(a) \cap [b]$ содержит два 7-вершинных подграфа Δ, Φ, $\Omega(a_2) \cap [b_2]$ содержит два 7-вершинных подграфа Φ_2, Ψ_2, $\Omega(a_3) \cap [b_3]$ содержит два 7-вершинных подграфа Δ_3, Ψ_3, причем любая вершина из Δ (из Φ) смежна с любой вершиной из Δ_3 (из Φ_2), и любая вершина из Ψ_2 смежна с любой вершиной из Ψ_3. Если Δ не является кликой, то некоторая вершина $c \in \Delta$ смежна с вершиной $d \in \Phi$. Тогда для $d' \in \Phi_2$ подграф $\Omega(d') \cap [c]$ содержится в Φ, противоречие с тем, что $\Omega(c)$ содержит не более 6 вершин из Φ. Таким образом, Δ и Δ_3 являются кликами, и $\Delta \cup \Delta_3$ является 14-кликой, противоречие.

Если $\Omega(a) \cap [b]$ содержит 14 вершин и вершины a, b не смежны, то $\Omega(a) \cap [b]$ является 14-кокликой. Пусть $c \in \Omega(a) \cap [b]$. Если c не смежна с вершинами из $\Omega(a_2) \cap [b_2]$, то $\Omega(c)$ содержит по 6 вершин из $\Omega(a_2) \cap [b_3]$, $\Omega(a_2) \cap [b_3]$ и вершину из $\Omega(a_3) \cap [b_3]$. Если же c смежна с 6 вершинами из $\Omega(a_2) \cap [b_2]$, то $\Omega(c)$ содержит 7 вершин точно в одном из подграфов $\Omega(a_2) \cap [b_3]$, $\Omega(a_2) \cap [b_3]$, $\Omega(a_3) \cap [b_3]$ и не пересекает остальные. Пусть $\Omega(a_2) \cap [b_2]$ содержит β вершин, смежных с 6 вершинами из $\Omega(a) \cap [b]$. Тогда число ребер между $\Omega(a_2) \cap [b_2]$ и $\Omega(a) \cap [b]$ равно $6\beta + 13(7 - \beta) = 7(13 - \beta)$ и делится на 6. Отсюда $\beta = 7$

и ровно 7 вершин из $\Omega(a) \cap [b]$ смежны с 6 вершинами из $\Omega(a_2) \cap [b_2]$. Теперь число ребер между $\Omega(a) \cap [b]$ и $\Omega(a_3) \cap [b_3]$ равно 56. Противоречие с тем, что любая вершина из $\Omega(a_3) \cap [b_3]$ смежна не более чем с 7 вершинами из $\Omega(a) \cap [b]$. Итак, $|\Omega(a) \cap [b]| = 0, 7$ для любых двух вершин $a, b \in \Omega$.

Пусть $\Omega(a)$ содержит β вершин степени 7. Тогда $7\beta + 14(15 - \beta) = 7|\Omega_2(a)|$ и $|\Omega_2(a)| = 30 - \beta$. В случае $\beta = 8$ вершины степени 7 в $\Omega(a)$ вместе с a образуют 9-клику C, противоречие с тем, что вершина из $\Omega(a) - C$ смежна с единственной вершиной из C. Отсюда $\beta = 7$ и ровно 7 вершин из $\Omega(a) \cap [b]$ смежны с 6 вершинами из $\Omega(a_2) \cap [b_2]$. Теперь число ребер между $\Omega(a) \cap [b]$ и $\Omega(a_3) \cap [b_3]$ равно 56. Противоречие с тем, что любая вершина из $\Omega(a_3) \cap [b_3]$ смежна не более чем с 7 вершинами из $\Omega(a) \cap [b]$. Итак, $|\Omega(a) \cap [b]| = 0, 7$ для любых двух вершин $a, b \in \Omega$.

Если Ω не содержит треугольников, то для $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит по 7 вершин из $[a_2], [a_3]$. Противоречие с тем, что для двух вершин $c, d \in \Omega(b) \cap [a_2]$ подграф $\Omega(c) \cap [d]$ содержит a_2, b и не менее 6 вершин из $\Omega(a_3) - [b]$.

Пусть Φ — множество вершин степени 7 в графе $\Omega(a)$. Если $|\Phi| = 8$, то подграф $\Phi \cup \{a\}$ является 9-кликой. Противоречие с тем, что вершина степени 0 в $\Omega(a)$ смежна с единственной вершиной из $\Phi \cup \{a\}$. Значит, $|\Phi| \geq 10$.

Пусть b — вершина степени 0 в $\Omega(a_2)$. Тогда $\Omega(a) \cap [b]$ содержит две вершины c_1, c_2 из Φ. Далее, $\Omega(c_i)$ не пересекает $\Omega(a_3)$ и $|\Omega(c_i) \cap [b]| = 0$. Без ограничения общности, $b_2 \in [a]$. Тогда $\Omega(c_1) \cap [c_2]$ содержит a, b и 7 вершин из $\Omega(a) - (\{b_2\} \cup [b])$, противоречие. Итак, $t \neq 16$.

В случае $t = 9$ для двух вершин $a, b \in \Omega$ с $d(a, b) \leq 2$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ содержит 0 или 7 вершин. Отсюда Ω — объединение трех изолированных 9-клик. $\square$

Лемма 5. *Если $p = 5$, то $t = 5, 15$ и в случае $t = 5$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$.*

Доказательство. Пусть $p = 5$. Так как p делит $65 - t$, то $t = 5, 10, 15, 20$. Для вершины $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит от 2 до 17 вершин из $a^\perp$ и от 1 до 16 вершин из $[a_2]$, $[a_3]$. В случае $t = 5$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$.

В случае $t = 20$ вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 20 вершами из Ω, поэтому в Γ нет кликовых $\langle g \rangle$-орбит длины 5, а вершина u из пятиугольной $\langle g \rangle$-орбиты смежна с 2 вершинами не более одной другой $\langle g \rangle$-орбиты длины 5, и степень u не больше $20+2+2+25$, противоречие. Значит, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ и $\chi_1(g) = (16 \cdot 60 - 135)/48$, противоречие.

Пусть $t = 10$. Если $\lambda_\Omega = 6$, то Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{9, 2, 1; 1, 1, 9\}$, противоречие с тем, что окрестность вершины в Ω — объединение изолированных клик. Пусть Ψ — множество вершин степени 1 в графе $\Omega(a)$, Ψ_i — множество вершин степени 1 в графе $\Omega(a_i)$. Допустим, что b_1, b_2 — две вершины из Ψ и $\Omega(b_1)$, $\Omega(b_2)$ содержат по 6 вершин из $[a_2]$. Тогда $\Omega(b_1) \cap [b_2]$ содержит a, быть может вершину из $\Omega(a_3)$ и 4 вершины $e_1, ..., e_4$ из Ψ_2.

Допустим, что $[e_1] \cap [e_2]$ содержит точно 5 вершин из $\Omega(a)$. Тогда число ребер между $[e_1] \cap [e_2] \cap \Omega(a)$ и $\Omega(a_2) - \{e_1, e_2\}$ равно 20. Если $\Omega(a_2)$ содержит 3 вершины, смежные не более чем с одной вершиной из $[e_1] \cap [e_2] \cap \Omega(a)$, то $[e_1] \cap [e_2] \cap \Omega(a)$ содержит 2 вершины, смежные с 6 вершинами из $\Omega(a_2)$, противоречие. Значит, $\Omega(a_2) - \Psi_2$ содержит единственную вершину f_2 и Ψ_2 содержит по крайней мере 7 вершин, смежных с 6 вершинами из $\Omega(a)$. Отсюда $\Omega(a)-\Psi$ содержит единственную вершину f и Ψ содержит по крайней мере 7 вершин, смежных с 6 вершинами из $\Omega(a_2)$. Если Ψ_2 содержит вершину f_2', смежную точно с 1 вершиной из $\Omega(a)$, то $\Omega(a)\cap[f]$ слдержит 3 вершины, смежные с шестерками вершин из $\Omega(a_2)-\{f_2,f_2'\}$. Противоречие с тем, что любые две из этих трех вершин смежны с a,f и с 5 вершинами из $\Omega(a_2)-\{f_2,f_2'\}$. Значит, любая вершина из Ψ смежна с 6 вершинами из $\Omega(a_2)$. Заметим, что вершина из $F(f)\cap\Omega(a_2)$ совпадает с f_2, поэтому подграф $\Psi_2-f_2^\perp$ является ребром $\{e,e'\}$ и вершина $e\in[f]\cap\Psi_2$ смежна точно с 5 вершинами из $\Omega(a)\cap[f]$ и с единственной вершиной из $\Omega(a_3)\cap[f]$. Отсюда $[f]\cap\Omega(e')$ содержит e и 5 вершин из $\Omega(a)\cap[f]$. Далее, $[e]\cap\Omega(e')$ содержит a_2 и 5 вершин из $\Omega(a)\cap[f]$. Симметрично, подграф $\Psi-f^\perp$ является ребром $\{b,b'\}$ и вершина $b\in[f_2]\cap\Psi$ смежна точно с 5 вершинами из $\Omega(a_2)\cap[f_2]$ и с единственной вершиной из $\Omega(a_3)\cap[f_2]$. Противоречие с тем, что для вершины $d\in[f]\cap\Omega(a)\cap[e]$ подграф $[f_2]\cap\Omega(d)$ содержит точно 4 вершины из $\Omega(a_2)\cap[f_2]$ и не более 1 вершины из $\Omega(a)\cup\Omega(a_3)$.

Итак, $[e_i]\cap[e_j]$ содержит точно 4 вершины из $\Omega(a)$ для любых различных $i,j\in\{1,...,4\}$. Допустим, что $[e_1]\cap[e_2]$ содержит 4 вершины $b_1,...,b_4$ из $\Omega(a)$ и вершину d из $\Omega(a_3)$. Так как $|\Omega(a_3)\cap[e_i]|=1$, то $[d]$ содержит $e_1,...,e_4$. Отсюда $\Omega(a_2)\cap[b_i]\cap[b_j]$ содержится в $[d]$ для любых различных $i,j\in\{1,...,4\}$. Положим $\{e_1,...,e_6\}=\Omega(a_2)\cap[d]$. Без ограничения общности, $[b_3]$ содержит $e_2,...,e_6$, $e_5\in[b_1]-[b_2]$, $e_6\in[b_2]-[b_1]$. Тогда можно считать, что $[b_4]$ содержит $e_1,e_3...,e_6$. Противоречие с тем, что e_i смежна с вершиной из $\Omega(a_2)-[d]$ и некоторая вершина из $\Omega(a_2)-[d]$ смежна с 2 вершинами из $\{b_1,...,b_4\}$.

Таким образом, можно считать, что $\Psi=\{b_2,b_3\}$, $\Omega(b_i)$ содержит 6 вершин из $[a_i]$, $i\in\{2,3\}$. Если $\Omega(b_2)\cap[b_3]$ не пересекает $[a]$, то для $\{c_i\}=\Omega(a)\cap[b_i]$ подграф $\Omega(a)-([b_2]\cup[b_3])$ является 5-кликой из $[c_2]\cap[c_3]$. Противоречие с тем, что для вершины $d\in\Omega(a)-([b_2]\cup[b_3])$ подграф $\Omega(d)\cap[b_i]$ пересекает $\Omega(a_i)$. Если же $\Omega(b_2)\cap[b_3]$ пересекает $[a]$, то $2\le|\Omega(b_2)\cap[b_3]|\le 4$, противоречие. □

Лемма 6. *Если $p=3$, то $t\in\{2,5,...,20\}$, $\alpha_1(g)=48l+65-t$ и $\alpha_2(g)=130-2t-48l$, $l\le 2$.*

Доказательство. Пусть $p=3$. Заметим, что для любых двух вершин $a,b\in\Omega$ имеем $|\Omega(a)\cap[b]|\in\{0,3,...,21\}$. Далее, $\alpha_3(g)=0$, поэтому $t-65$ делятся на 3, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=195-3t$, $\chi_1(g)=t+(\alpha_1(g)+t-65)/16$ и $\alpha_1(g)=48l+65-t$.

В случае $t=5$ граф Ω — объединение либо трех изолированных 5-клик, либо 5-клики и подграфа $a^\perp\cup a_2^\perp$, где $\Omega(a)$ — коклика и $\Omega(a)\cup\Omega(a_2)$ — куб. □

Лемма 7. *Если $p=2$, то каждая вершина из антиподального класса, не пересекающего Ω, смежна с нечетным числом вершин из Ω и либо $s=1$, $t=9$, $\alpha_3(g)=18$, $\alpha_1(g)=32l+6$ и $\alpha_2(g)=162-32l$, либо $s=3$, $\alpha_1(g)=32l-49-17t$, $\alpha_2(g)=244+14t-32l$, $\alpha_3(g)=0$, и $t\in\{1,3,...,21\}$.*

Доказательство. Пусть $p=2$. Тогда $s\in\{1,3\}$ и t нечетно. Заметим, что для любых двух вершин $a,b\in\Omega$ имеем $|\Omega(a)\cap[b]|\in\{1,3,...,21\}$, любая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с 0 или нечетным числом вершин из Ω.

Так как $\alpha_3(g)=t(3-s)$, то $\chi_2(g)=t-1$, t нечетно, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=195-3t$ и $\chi_1(g)=(16st+3\alpha_1(g)+3t-195-8t(3-s))/48=(65+8st-7t+\alpha_1(g))/16$ — число нечетное.

Если $s=1$, то Ω является 9-кликой, $\alpha_3(g)=18$, $\alpha_1(g)=32l+6$ и $\alpha_2(g)=162-32l$.

Если $s = 3$, то $\alpha_3(g) = 0$, $\chi_1(g) = (65 + 17t + \alpha_1(g))/16$ — число нечетное. Поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 49 - 17t$ и $\alpha_2(g) = 244 + 14t - 32l$. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Пусть группа G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда для вершины $a \in \Gamma$ подгруппа $H = G_a$ имеет индекс 195 в G. Из теоремы следует, что $\{3, 5, 13\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19\}$ и $|G|$ не делится на 49. □

Лемма 8. *Пусть f — элемент порядка 13 из G. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если g — элемент простого порядка $p \neq 13$ из $C_G(f)$, то $p = 5$, $\alpha_1(g) = 65$ и $\alpha_2(g) = 130$;*

(2) *$F(G) = O_{\{3,5\}}(G)$ и в G нет подгрупп порядка 3, регулярных на каждом антиподальном классе;*

(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/F(G)$ изоморфен $L_2(64)$, $U_3(4)$ или $Sz(8)$.*

Доказательство. Допустим, что g — элемент простого порядка $p \neq 13$ из $C_G(f)$. Так как f действует без неподвижных точек на Ω, то ввиду теоремы либо Ω — пустой граф, либо $p = 2$, $s = 3$ и $t = 13$.

Если $p = 5$, то $\alpha_1(g) = 65$ и $\alpha_2(g) = 130$, а если $p = 3$, то либо $m = 0$, и $\alpha_1(g) = 48l + 1$ не делится на 13, либо $m = 13$ и снова $\alpha_1(g) = 48l + 92$ не делится на 13.

Если $p = 2$, то $t = 13$ и $\alpha_1(g) = 32l - 270$ не делится на 13. Отсюда $\alpha_3(g)$ делится на 114 и $\alpha_2(g)$ делится на 570, поэтому $\alpha_1(g) = \alpha_2(g) = 0$, противоречие.

Пусть $Q = O_p(G) \neq 1$. Если $p = 13$, то $|G|$ делит $65 \cdot 6$, причем элемент порядка 3 из G фиксирует некоторую вершину. Противоречие с тем, что подгруппа $H = G_a$ имеет индекс 195 в G.

Если $p = 3$, то Q фиксирует некоторый антиподальный класс, $|Q : Q_F|$ делит 3 для любого антиподального класса F. Так как подгруппа $\Phi(Q)$ поточечно фиксирует каждый антиподальный класс, то Q — элементарная абелева группа, $|Q| - 1$ делится на 13 и $|Q| \geq 3^6$. По [4, лемма 3] в G нет подгрупп порядка 3, регулярных на каждом антиподальном классе.

Если $p = 5$, то $|Q : Q_a| = 5$, $\Phi(Q)$ фиксирует a и Q — элементарная абелева группа. Далее, $|Q|/5 - 1$ или $|Q| - 1$ делится на 13 и $|Q| \geq 5^4$.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/F(G)$. Заметим, что 13 делит $|\bar{T}|$ и ввиду [5, теорема 1] группа $\bar{T}$ изоморфна

1) $L_2(25), U_3(4), PSp_4(5), L_4(3), {}^2F_4(2)', L_2(64), Sz(8), U_4(5), L_3(9), PSp_6(3), P\Omega_7(3)$, $G_2(4)$, $P\Omega_8^+(3)$;

2) $U_4(4)$, $L_3(16)$, $Sp_6(4)$ (порядки этих групп делятся на 17).

Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего 195, то группа $\bar{T}$ изоморфна $U_3(4)$ (и $\bar{T}_a$ — расширение группы порядка 64 с помощью группы порядка 5), $L_2(64)$ (и $\bar{T}_a$ — расширение группы порядка 64 с помощью группы порядка 21 или 63), $Sz(8)$ (и $\bar{T}_a$ — расширение группы порядка 64 с помощью группы порядка 7). Лемма доказана. □

Докажем следствие. По лемме 9 либо подгруппа $\bar{T}_{\{F\}}$ является нормальной подгруппой индекса 3 из $\bar{T}_a$, либо $|S(G)_{\{F\}} : S(G)_a| = 3$. В первом случае группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(64)$ или $U_3(4)$ и ввиду [4] граф Γ является реберно симметричным.

В последнем случае для главного фактора N группы G, лежащего в $O_3(G)$ и элемента f порядка 13 из G по лемме 9 получим $C_N(f) = 1$. Компьютерные вычисления в GAP показывают, что для группы $Sz(8)$ и нетривиального неприводимого модуля V над полем характеристики 3 размерность подмодуля $C_V(f)$ не меньше 2, противоречие. Для группы $L_2(64)$ и нетривиального неприводимого модуля V над полем характеристики 3 размерность подмодуля $C_V(f)$ не меньше 4 (3-модулярную матрицу разложения группы $L_2(64)$ см. в [6]), противоречие. Следствие доказано.

References

[1] A.A. Makhnev, M.S. Samoylenko, *On distance-regular covers of cliques with strongly regular neighbourhoods of vertices*, "Modern Problems in Mathematics and its Applications". Proceedings of the 46-th International Youth School-conference, Yekaterinburg, Russia, 2015, 13–17.

[2] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989. MR1002568

[3] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Mathematics, **81** (2010), 439–442. MR2766516

[4] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, L.Y. Tsiovkina, Edge-symmetric distance-regular covers of cliques with $\lambda = \mu$, Trudy IMM UrO RAN, **19**:2 (2013), 237–246.

[5] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

[6] R. Burkhardt, *Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen* $PSL(2, p^f)$, J. Algebra, **40**:1 (1976), 75–96. MR0480710

Alexander Alekseevich Makhnev
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S.Kovalevskaya str., 16,
620990, Yekaterinburg, Russia,
Ural Federal University
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Mariana Malilovna Isakova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
173 Chernyshevsky Str.
360004, Nalchik, Russia
E-mail address: isakova2206@mail.ru

Albina Aniuarovna Tokbaeva
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
173 Chernyshevsky Str.
360004, Nalchik, Russia
E-mail address: tok2506@mail.ru