S ⓔMR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 889–902 (2017) УДК 514.7
DOI 10.17377/semi.2017.14.075 MSC 34C05

ДИНАМИКА КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТИПА ДАРБУ

Е.П. ВОЛОКИТИН, В.М. ЧЕРЕСИЗ

Abstract. We study the local and global behavior of the trajectories of the differential systems of the form $\dot{x} = x+p_3(x, y),\ \dot{y} = y+q_3(x, y)$ where $p_3(x, y), q_3(x, y)$ are relatively prime homogeneous cubic polynomials.

Keywords: polynomial systems, singular points, Poincaré equator, phase portraits.

Введение

Пусть мы имеем плоскую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = x + p_n(x, y),\ \dot{y} = y + q_n(x, y), \tag{1}$$

где зависимые переменные x, y и независимая переменная t предполагаются действительными, $p_n(x, y),\ q_n(x, y)$ — однородные многочлены степени n.

Мы будем называть такую систему системой типа Дарбу степени n.

Системы вида (1) рассматривались различными авторами, см. [1], [2] и процитированную там литературу. В этих работах рассматривались вопросы, связанные с аналитическим и динамическими свойствами систем типа Дарбу (интегрируемость, наличие или отсутствие предельных циклов, локальные и глобальные фазовые портреты и т. д.).

В частности, много работ посвящено исследованию квадратичных систем типа Дарбу (подробнее см. [3], [4, с. 219–244]).

В работе [2] мы перечислили все различные с топологической точки зрения фазовые портреты грубых систем типа Дарбу с кубическими нелинейностями

$$\dot{x} = x + p_3(x, y),\ \dot{y} = y + q_3(x, y). \tag{2}$$

Volokitin, E.P., Cheresiz, V.M., Dynamics of the cubic Darboux systems.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 15-01-00745).

Поступила 7 июля 2017 г., опубликована 14 сентября 2017 г.

Условия грубости состояли в следующем:

(A) Все особые точки системы (2) (конечные и бесконечные) являются невырожденными (определитель матрицы линейной части отличен от 0).

(B) Многочлены $p_3(x,y),\ q_3(x,y)$ взаимно просты.

В настоящей работе мы будем рассматривать системы вида (2), которые удовлетворяют только условию (B), и приведём полный список их фазовых портретов, различных с точки зрения топологической эквивалентности. Список таких портретов насчитывает в дополнение к 14 типам грубых фазовых портретов, описанным в [2], ещё 13 типов. Этот результат доказан во втором разделе статьи (теорема 1).

В первом разделе мы приводим некоторые сведения и результаты, которые используются для доказательства теоремы.

В коротком третьем разделе мы затрагивем вопрос о существовании полиномиальных и рациональных интегралов у системы (2).

Предлагаемая работа по полученным результатам, методам и приёмам исследования примыкает к [1], кроме того мы существенно используем результаты работы [5][1].

1. Предварительные сведения

Особая точка (x_0,y_0) аналитической системы $\dot{x}=P(x,y),\ \dot{y}=Q(x,y)$ определяется как решение системы уравнений $P(x,y)=Q(x,y)=0$. Обозначим через Δ, T определитель и след матрицы Якоби $J(x,y)$ правых частей в точке $(x_0,y_0):\ \Delta=P_xQ_y-P_yQ_x|_{\{x=x_0,y=y_0\}},\ T=P_x+Q_y|_{\{x=x_0,y=y_0\}}$.

Особая точка называется невырожденной, если $\Delta\neq 0$, и вырожденной в противном случае. Невырожденная точка всегда является изолированной. Среди невырожденных точек различают устойчивые и неустойчивые узлы и фокусы, сёдла и центры.

Особая точка $O(0,0)$ называется гиперболической, если оба собственных числа $\lambda_1,\ \lambda_2$ матрицы $J(0,0)$ не лежат на мнимой оси.

Если особая точка вырожденная ($\Delta=0$), но $T\neq 0$ ($\lambda_1=0,\ \lambda_2\neq 0$), она называется полугиперболической. Невырожденные и полугиперболические особые точки называются элементарными.

Характер особой полугиперболической точки определяется на основе следующего утверждения.

Предложение 1 ([6], с. 87, Теорема 2). *Пусть точка $O(0,0)$ является изолированным состоянием равновесия системы*

$$\dot{x}=P_2(x,y),\ \dot{y}=by+Q_2(x,y),\ b\neq 0, \tag{3}$$

где $P_2(x,y),Q_2(x,y)$ — аналитические в окрестности начала координат функции, разложение которых в ряды состоит из членов не ниже второго порядка. Пусть далее $y=\varphi(x)$ есть решение уравнения $by+Q_2(x,y)=0$ в окрестности точки $O(0,0)$, а разложение по степеням x функции $\psi(x)=P_2(x,\varphi(x))$ имеет вид $\psi(x)=\Delta_m x^m+\dots$, где $m\geq 2, \Delta_m\neq 0$. Тогда: 1) При m нечётном точка $O(0,0)$ есть топологический узел или топологическое седло. 2) Если m чётно, то точка $O(0,0)$ есть так называемый седло–узел, т.е. состояние

[1]Следует отметить, что эти результаты позволяют также изучить кубические системы типа Дарбу, не подчинённые условию (B), однако такое исследование чрезвычайно увеличило бы объём статьи; поэтому мы проведём его в наших последующих работах.

равновесия, окрестность которого состоит из параболического и двух гиперболических секторов.

При построении глобальных фазовых портретов плоских полиномиальных автономных систем для получения информации о поведении траекторий используется компактификация Пуанкаре, которая состоит в следующем. Фазовая плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) рассматривается погружённой в $\mathbb{R}^3$ таким образом, что если $u = (u_1, u_2, u_3)$ — точка в $\mathbb{R}^3$, то интересующая нас фазовая плоскость есть плоскость $\mathbb{R}^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_3 = -1\}$. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : ||u|| = 1\}$, для которой наша плоскость является касательной в точке южного полюса $(0, 0, -1)$ (сфера Пуанкаре). Эта же точка является началом координат в фазовой плоскости Oxy. Будем рассматривать отображение фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с помощью центральной проекции на южное и северное полушария сферы $\mathbb{S}^2$. Траектории на плоскости перейдут в кривые на сфере. Эти кривые будут орбитами соответствующего векторного поля, определённого на всей сфере кроме точек её экватора $\mathbb{S}^1 = \{u \in \mathbb{S}^2 : u_3 = 0\}$ (экватор Пуанкаре). На экватор сферы «отображаются» бесконечно удалённые точки плоскости $\mathbb{R}^2$. Оказывается возможным доопределить полученное векторное поле на сфере в точках экватора $\mathbb{S}^1$ с тем, чтобы получить полиномиальное поле, определённое на всей сфере. При этом экватор будет инвариантен. Полученное векторное поле $\pi(X)$ на $\mathbb{S}^2$ называется компактификацией исходного векторного поля X, заданного на $\mathbb{R}^2$. Более детальное описание процедуры построения компактификации Пуанкаре см. в [7]–[9].

Проблема исследования поведения траекторий на бесконечности сводится к изучению строения полученного поля кривых на сфере в окрестности экватора $\mathbb{S}^1$. Ортогональная проекция южного полушария на плоскость $\mathbb{R}^2$ даёт удобное изображение всей фазовой плоскости в виде внутренности круга (диск Пуанкаре), границу которого мы по-прежнему будем называть экватором.

Мы будем называть векторные поля X и Y и их фазовые портреты топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм сферы $\mathbb{S}^2$ на себя, сохраняющий экватор $\mathbb{S}^1$ и переводящий поток, индуцированный полем $\pi(X)$, в поток, индуцированный полем $\pi(Y)$.

Сепаратрисы гиперболических сёдел являются примерами траекторий, поведение которых отличается от соседних. Следуя [10], мы будем называть такие траектории орбитно неустойчивыми. К орбитно неустойчивым траекториям относятся особые точки, предельные циклы и траектории, образующие границы гиперболических секторов особых точек [11].

Обозначим через $U(\pi(X))$ множество, состоящее из всех орбитно неустойчивых траекторий потока $\pi(X)$. В [10], доказано, что $U(\pi(X))$ конечно и замкнуто. Каждая открытая компонента множества $\mathbb{S}^2 \backslash U(\pi(X))$ называется компонентой потока $\pi(X)$ и состоит из орбитно устойчивых траекторий. Определяющей конфигурацией $K(\pi(X))$ называется объединение $U(\pi(X))$ с набором типичных траекторий по одной из каждой компоненты. $K(\pi(X))$ и $K(\pi(Y))$ эквивалентны, если существует гомеоморфизм сферы $\mathbb{S}^2$, переводящий орбиты $K(\pi(X))$ в орбиты $K(\pi(Y))$.

Предложение 2 ([10], Теорема VII)**.** *Два потока на сфере $\mathbb{S}^2$, порождённых полиномиальными системами дифференциальных уравнений, топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их определяющие конфигурации.*

Аналогичный результат был получен в [12], [13] для потоков, отвечающих гладким системам на $\mathbb{R}^2$, и в [14] для непрерывных потоков на произвольном двумерном многообразии.

Таким образом, для адекватного воспроизведения глобального фазового портрета плоской системы нам достаточно проследить за поведением конечного числа траекторий, в первую очередь за особыми точками, предельными циклами и сепаратрисами (границами гиперболических секторов).

2. Кубические системы типа Дарбу

Приведём некоторые свойства системы (2), которые понадобятся нам в дальнейшем.

Отметим прежде всего, что фазовый портрет системы (2) симметричен относительно начала координат.

Начало координат $O(0,0)$ является особой точкой системы (2) типа дикритический узел. Мы будем называть её тривиальной особой точкой.

Из результатов работы [5] следует, что глобальный фазовый портрет системы (2) определяется её фазовым портретом в окрестности экватора Пуанкаре. Поэтому мы вначале изучим поведение траекторий системы (2) в бесконечно удалённой части плоскости.

Предложение 3. *Пусть в системе (2) многочлены $p_3(x,y), q_3(x,y)$ не имеют общего множителя.*

Тогда все особые точки на бесконечности элементарны и являются узлами, сёдлами или седло-узлами. Бесконечно удалённая особая точка, лежит на конце прямой $y = u_i x$, тогда и только тогда, когда u_i — действительный корень уравнения

$$G(u) \equiv q_3(1,u) - up_3(1,u) = 0. \tag{4}$$

При этом прямая $y = u_i x$ является инвариантным множеством системы (2), и нет других инвариантных прямых, проходящих через начало координат. Особая точка будет седло-узлом в том и только в том случае, если кратность корня равна двум или четырём; при этом нейтральное многообразие седло-узла лежит в экваторе сферы Пуанкаре. Сепаратрисы сёдел и седло-узлов направлены вдоль экватора и инвариантных прямых.

Доказательство. Сформулированные утверждения аналогичны утверждениям из [5], в некоторой степени аналогичны и их доказательства.

Для исследования поведения траекторий системы (2) в бесконечности применяем преобразования Пуанкаре

$$x = 1/z,\ y = u/z, \tag{5}$$

$$x = v/z,\ y = 1/z. \tag{6}$$

Преобразование (5) охватывает все точки фазовой плоскости за исключением тех, которые лежат на оси Oy. Для изучения точек, лежащих на оси ординат, применяют преобразование (6). Далее мы предполагаем для простоты изложения, что система (2) не имеет бесконечно удалённых особых точек в концах оси Oy, и преобразование (6) нам не понадобится.

Согласно [7], [8] характер бесконечно удалённых особых точек системы (2) совпадает с характером особых точек системы

$$\dot{u} = q_3(1,u) - up_3(1,u),\ \dot{z} = -z(z^2 + p_3(1,u)), \tag{7}$$

вида $(u_i, 0)$, лежащих на оси $z = 0$. Координата u_i таким образом находится из уравнения (4).

Инвариантность прямой $y = u_i x$ доказывается непосредственными вычислениями.

Матрица линейного приближения правых частей системы (7) в окрестности точки $(u_i, 0)$ имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} G'(u_i) & 0 \\ 0 & -p_3(1,u_i) \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы $\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)} \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_i^{(1)} = G'(u_i),\ \lambda_i^{(2)} = -p_3(1,u_i), \tag{8}$$

собственные векторы

$$v_i^{(1)} = (1,0)^{\mathsf{T}},\ v_i^{(2)} = (0,1)^{\mathsf{T}}. \tag{9}$$

Если $p_3(1,u_i) = 0$, то в силу равенства $G(u_i) \equiv -u_i p_3(1,u_i) + q_3(1,u_i) = 0$ получим $q_3(1,u_i) = 0$, а в таком случае $p_3(x,y),\ q_3(x,y)$ имеют общий множитель $y - u_i x$, что противоречит условию (B). Значит, всегда $\lambda_i^{(2)} = -p_3(1,u_i) \neq 0$, и особая точка $(u_i, 0)$ является элементарной.

Если $\lambda_i^{(1)} = G'(u_i) \neq 0$, то особая точка является либо гиперболическим узлом, либо гиперболическим седлом.

Если $\lambda_i^{(1)} = G'(u_i) = 0$, то особая точка будет полугиперболической, и её тип определяется на основе теоремы, сформулированной в предложении 1.

Применим эту теорему в нашей ситуации.

Пусть $u_i = 0$. В таком случае имеем $G(0) = G'(0) = 0$, и $G(u) = \Delta_2 u^2 + \Delta_3 u^3 + \Delta_4 u^4$.

Система (7) при $u_i = 0$ после замены $u = x,\ z = y$ превращается в систему вида (3),

$$\dot{x} = \Delta_2 x^2 + \Delta_3 x^3 + \Delta_4 x^4,\ \dot{y} = -p_3(1,0)y - (p_3(1,x) - p_3(1,0))y - y^3,$$

в которой $b = -p_3(1,0) \neq 0$.

В таком случае имеем $\varphi(x) = 0,\quad \psi(x) = \Delta_2 x^2 + \Delta_3 x^3 + \Delta_4 x^4$, и мы получаем утверждения предложения 3, касающиеся характера особой точки (в частности, седло-узел имеет место, если $\Delta_2 \neq 0$ или $\Delta_2 = \Delta_3 = 0,\ \Delta_4 \neq 0$).

В случае, когда точка покоя $O(0,0)$ будет седлом или седло-узлом, из (9) следует, что сепаратрисы совпадают с осями $z = 0,\ u = 0$, которые соответствуют экватору и инвариантной прямой $y = 0$. $\square$

Если имеется инвариантная прямая $y = kx + b,\ (b \neq 0)$, то она «пересекает» экватор в той же точке, где его «пересекает» прямая $y = kx$. В таком случае на основе предложения 3 заключаем, что $k = u_i$, где u_i — корень уравнения (4).

Кроме прямых $y{=}kx,\ y{=}kx{+}b$ есть ещё одна (и только одна) инвариантная прямая с тем же наклоном: $y{=}kx{-}b$. Все три прямые «пересекаются» в одной и той же точке экватора, которая будет узлом.

Мы будем обозначать устойчивый узел на экваторе Пуанкаре буквосочетанием sN, неустойчивый — uN. Мы также будем различать сёдла на экваторе в зависимости от того, является соответствующая инвариантная прямая устойчивой или неустойчивой его сепаратрисой. В первом случае мы будем называть седло устойчивым и обозначать его sS, во втором — неустойчивым и обозначать uS. По этому же признаку мы будем различать устойчивый и неустойчивый седло-узлы. Пусть при обходе экватора в направлении против часовой стрелки при прохождении через седло-узел мы вначале встречаем гиперболический сектор, затем устойчивый параболический, в таком случае мы обозначим эту точку как sSN; если вначале мы проходим устойчивый параболический сектор, а затем гиперболический, то обозначим эту особую точку как sNS. Аналогично определим особые точки типа uSN и uNS. Рис. 1 иллюстрирует приведённую классификацию.

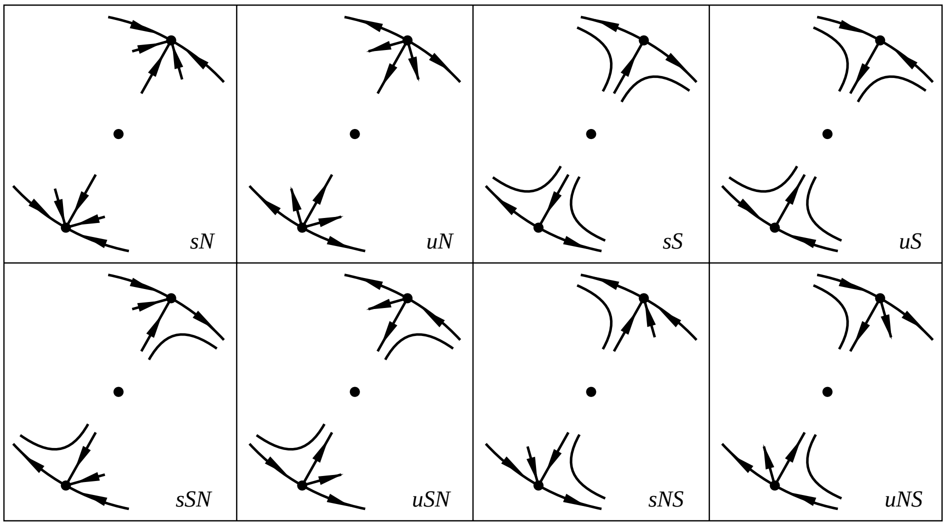

Рис. 1. Бесконечно удалённые особые точки системы (2)

Изучим конечные особые точки системы (2).

Предложение 4. *Пусть* (x_i, y_i) *— нетривиальная особая точка системы (2), расположенная в конечной части плоскости. Тогда*

(a) *Прямая* $y_i x - x_i y = 0$ *является инвариантной прямой системы (2).*

(b) *На каждой из инвариантных прямых либо нет конечных нетривиальных особых точек, либо их две и они расположены симметрично относительно начала координат. Каждая из нетривиальных особых точек устойчива относительно начальных данных, лежащих на содержащей её инвариантной прямой.*

(c) *Все конечные особые точки элементарны и являются узлами, сёдлами или седло-узлами. Если особая точка будет седло-узлом, то её параболический сектор будет устойчивым, а нейтральное многообразие трансверсально инвариантной прямой, содержащей эту точку.*

Доказательство. Пункт (a) очевиден.

Координаты x_i, y_i особых точек системы (2) удовлетворяют равенствам

$$x_i + p_3(x_i, y_i) = 0,\ y_i + q_3(x_i, y_i) = 0. \tag{10}$$

Начало координат $O(0,0)$ всегда является особой точкой (тривиальной).

Пусть (x_i, y_i) — нетривиальная особая точка и (x_i', y_i') — другая нетривиальная особая точка, лежащая на той же инвариантной прямой. В таком случае её координаты удовлетворяют равенствам $x_i' = sx_i,\ y_i' = sy_i,\ s \neq 0$. Тогда $x_i' + p_3(x_i', y_i') = 0,\ y_i' + q_3(x_i', y_i') = 0$, то есть $sx_i + p_3(sx_i, sy_i) = 0,\ sy_i + q_3(sx_i, sy_i) = 0$, и

$$x_i + s^2 p_3(x_i, y_i) = 0,\ y_i + s^2 q_3(x_i, y_i) = 0.$$

Сравнивая с (10), получим $s^2 = 1$. Значит, точка (x_i', y_i') либо совпадает с (x_i, y_i), либо симметрична ей относительно начала координат. Мы видим, что нетривиальные особые точки присутствуют симметричными парами. Признаком наличия нетривиальных особых точек на инвариантной прямой $y = u_i x$ является выполнение условия $p(1, u_i) < 0$, которое означает неустойчивость бесконечно удалённой особой точки, расположенной на конце соответствующего инвариантного луча $y = u_i x$ (uN, uS, uNS, uSN).

Матрица линейного приближения правых частей системы (2) в окрестности особой точки (x_i, y_i) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 + p_{3x}(x_i, y_i) & p_{3y}(x_i, y_i) \\ q_{3x}(x_i, y_i) & 1 + q_{3y}(x_i, y_i) \end{pmatrix}.$$

По формуле Эйлера для однородных функций

$$x p_{3x}(x, y) + y p_{3y}(x, y) = 3p_3(x, y),\ x q_{3x}(x, y) + y q_{3y}(x, y) = 3q_3(x, y),$$

кроме того

$$p_3(x_i, y_i) = -x_i,\ q_3(x_i, y_i) = -y_i.$$

В таком случае

$$x_i p_{3x}(x_i, y_i) + y_i p_{3y}(x_i, y_i) = -3x_i,\ x_i q_{3x}(x_i, y_i) + y_i q_{3y}(x_i, y_i) = -3y_i,$$

откуда

$$x_i\,(3 + p_{3x}((x_i, y_i)) = -y_i p_{3y}(x_i, y_i),\ y_i\,(3 + q_{3y}((x_i, y_i)) = -x_i q_{3x}(x_i, y_i).$$

Пусть $x_i y_i \neq 0$. Тогда

$$3 + p_{3x}((x_i, y_i) = -y_i p_{3y}(x_i, y_i)/x_i,\ 3 + q_{3y}((x_i, y_i) = -x_i q_{3x}(x_i, y_i)/y_i. \tag{11}$$

$$\det(A + 2E) = \det \begin{pmatrix} 3 + p_{3x}(x_i, y_i) & p_{3y}(x_i, y_i) \\ q_{3x}(x_i, y_i) & 3 + q_{3y}(x_i, y_i) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -y_i p_{3y}(x_i, y_i)/x_i & p_{3y}(x_i, y_i) \\ q_{3x}(x_i, y_i) & -x_i q_{3x}(x_i, y_i)/y_i \end{pmatrix} = 0.$$

Если, например, $x_i{=}0, y_i{\neq}0$, то $p_{3y}(x_i, y_i){=}0, 3{+}q_{3y}(x_i, y_i){=}0$, и вновь

$$\det \begin{pmatrix} 3 + p_{3x}(x_i, y_i) & p_{3y}(x_i, y_i) \\ q_{3x}(x_i, y_i) & 3 + q_{3y}(x_i, y_i) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 + p_{3x}(x_i, y_i) & 0 \\ q_{3x}(x_i, y_i) & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Мы заключаем, что $\mu_i^{(2)}{=}-2$ будет собственным числом матрицы A.

Пусть $w_i^{(2)} = (a_i^{(2)}, b_i^{(2)})^\intercal$ — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$a_i^{(2)}(x_i + p_{3x}(x_i, y_i)) + b_i^{(2)} p_{3y}(x_i, y_i) = 0,$$

и в силу (11)

$$\frac{b_i^{(2)}}{a_i^{(2)}} = \frac{y_i}{x_i},$$

то есть собственный вектор $w_i^{(2)}$ направлен вдоль инвариантной прямой $y_i x - x_i y = 0$, проходящей через особую точку (x_i, y_i).

Точка (x_i, y_i) всегда устойчива относительно начальных данных, лежащих на инвариантной прямой ($\mu_i^{(2)} = -2 < 0$).

Если $\mu_i^{(1)}$ — другое собственное число, то поскольку $\mu_i^{(1)} + \mu_i^{(2)} = T = 2 + p_{3x}(x_i, y_i) + q_{3y}(x_i, y_i)$, получаем

$$\mu_i^{(1)} = 4 + p_{3x}(x_i, y_i) + q_{3y}(x_i, y_i).$$

Обозначим $\pi(u) = p(1, u), \kappa(u) = q(1, u)$. В силу (8) собственное число $\lambda_i^{(1)}$ матрицы J может быть записано в виде

$$\lambda_i^{(1)} = G'(u_i) = \kappa'(u_i) - \pi(u_i) - u_i \pi'(u_i). \tag{12}$$

Отметим, что

$$p_3(x, y) = x^3 p_3(1, y/x),\ q_3(x, y) = x^3 q_3(1, y/x),\ x_i^2 p_3(1, y_i/x_i) = -1.$$

Первые два равенства — следствие однородности функций $p_3(x, y),\ q_3(x, y)$, последнее справедливо, поскольку (x_i, y_i) — особая точка системы (2).

Тогда

$$p_{3x}(x, y) = 3x^2 \pi(y/x) - xy\pi'(y/x),\ q_{3y}(x, y) = x^2 \kappa'(y/x),$$

и

$$\begin{aligned}\mu_i^{(1)} &= 4 + p_{3x}(x_i, y_i) + q_{3y}(x_i, y_i) = 4 + 3x_i^2 \pi(y_i/x_i) - x_i y_i \pi'(y_i/x_i) + x_i^2 \kappa'(y_i/x_i) = \\ &= -x_i^2 \pi(y_i/x_i) - x_i y_i \pi'(y_i/x_i) + x_i^2 \kappa'(y_i/x_i) = \\ &= x_i^2(\kappa'(y_i/x_i) - \pi(y_i/x_i) - (y_i/x_i)\pi'(y_i/x_i)).\end{aligned} \tag{13}$$

Полагая $y_i/x_i = u_i$ и сравнивая (12), (13), видим, что

$$\mu_i^{(1)} = x_i^2 \lambda_i^{(1)}. \tag{14}$$

Если собственное число матрицы A $\mu_i^{(1)} \neq 0$, особая точка будет узлом или седлом. Если же $\mu_i^{(1)} = 0$, мы вновь попадаем в условия теоремы из предложения 1 и заключаем, что особая точка будет либо узлом, либо седлом, либо седло-узлом. В случае седло-узла нейтральное многообразие в точке (x_i, y_i) имеет касательную, направленную вдоль собственного вектора, отвечающего собственному числу $\mu_i^{(1)} = 0$, линейно независимому с собственным вектором $w_2^{(i)}$, направленным вдоль инвариантной прямой.

Равенство (14) показывает, что бесконечно удалённая и конечная особые точки, расположенные на одной инвариантной прямой, теряют свойство гиперболичности одновременно.

□

Мы видим, что окрестность любой особой точки (конечной или бесконечной) заполняют узловые или седловые секторы.

Из рис. 2 ясно, что взяв две соседних особых точки на экваторе Пуанкаре, мы однозначно восстанавливаем поведение траекторий системы (2) в секторе,

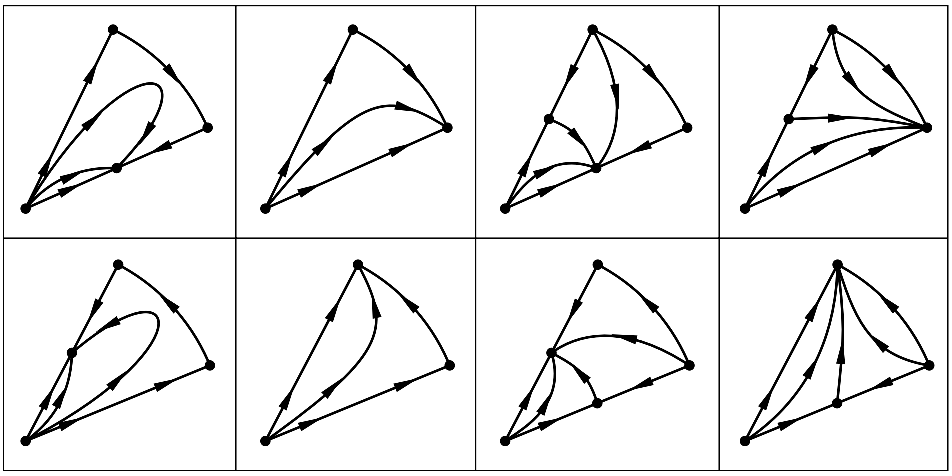

Рис. 2. Фазовые портреты при различных сочетаниях соседних бесконечно удалённых особых точек

заключённом между двумя инвариантными прямыми, определяемыми этими точками.

Отсюда, в свою очередь, следует, что задав расположение и характер всех особых точек на экваторе, мы определяем глобальный фазовый портрет системы (2).

В частности, следует отметить, что если конечная точка (x_i, y_i) является седло-узлом, то на той же инвариантной прямой имеется седло-узел на экваторе Пуанкаре, причём эти седло-узлы различной устойчивости (в смысле, оговоренном выше).

В случае отсутствия особых точек на экваторе Пуанкаре в системе (2) отсутствуют также и нетривиальные конечные особые точки и инвариантные прямые $(q_3(1,u) - up_3(1,u) \neq 0)$. В этом случае, как показано в [2], возможны два типа фазовых портретов: в одном случае фазовый портрет содержит глобально устойчивый предельный цикл, и все траектории, кроме тривиальной точки, стремятся к нему при возрастании времени. Такая возможность реализуется при выполнении условия

$$m = g(0) \int_0^{2\pi} \frac{f(\vartheta)}{g(\vartheta)} d\vartheta < 0, \tag{15}$$

где

$$f(\vartheta) = \cos\vartheta p_3(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \sin\vartheta q_3(\cos\vartheta, \sin\vartheta),$$
$$g(\vartheta) = \cos\vartheta q_3(\cos\vartheta, \sin\vartheta) - \sin\vartheta p_3(\cos\vartheta, \sin\vartheta).$$

В [5] показано, что

$$m = 2q_3(1,0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_3(1,u) + uq_3(1,u)}{(1+u^2)(q_3(1,u) - up_3(1,u))} du.$$

В том случае, если условие (15) не выполняется, траектории представляют собой спирали, раскручивающиеся к бесконечности.

Таким образом, мы заключаем, что глобальный фазовый портрет системы (2) однозначно определяется поведением траекторий в окрестности бесконечности, то есть структурой экватора Пуанкаре.

В [5] доказана теорема, которая применительно к нашему случаю может быть сформулирована следующим образом

Предложение 5 ([5], Теорема 4.4)**.** *Пусть в системе (2) многочлены $p_3(x,y)$, $q_3(x,y)$ взаимно простые. Тогда поведение на бесконечности траекторий системы (2) совпадает с поведением на бесконечности траекторий системы*

$$\dot{x} = p_3(x,y), \;\; \dot{y} = q_3(x,y). \tag{16}$$

Кроме того в [5] получен список всех возможных неэквивалентных вариантов строения экватора Пуанкаре кубической однородной системы (16) при условии, что многочлены $p_3(x,y), q_3(x,y)$ взаимно просты.

Список имет вид

$$\sigma_1 = \{sN, uN, sN, uN\}, \; \sigma_2 = \{sN, sS, sN, uN\}, \; \sigma_3 = \{uN, uS, uN, sN\},$$
$$\sigma_4 = \{sN, sS, uS, uN\}, \; \sigma_5 = \{sN, sS, sN, sS\}, \; \sigma_6 = \{sS, uS, sS, sN\},$$
$$\sigma_7 = \{uN, uS, uN, uS\}, \; \sigma_8 = \{uS, sS, uS, uN\},$$
$$\sigma_9 = \{uNS, uN, sN\}, \; \sigma_{10} = \{sNS, sN, uN\}, \; \sigma_{11} = \{uNS, sS, sN\},$$
$$\sigma_{12} = \{sNS, uS, uN\}, \; \sigma_{13} = \{uSN, uS, uN\}, \; \sigma_{14} = \{sSN, sS, sN\},$$
$$\sigma_{15} = \{sNS, uS, sS\}, \; \sigma_{16} = \{uNS, sS, uS\},$$
$$\sigma_{17} = \{sN, uN\}, \; \sigma_{18} = \{uS, uN\}, \; \sigma_{19} = \{sS, sN\}, \; \sigma_{20} = \{uS, sS\},$$
$$\sigma_{21} = \{uNS, uNS\}, \; \sigma_{22} = \{sNS, sNS\}, \; \sigma_{23} = \{sSN, uNS\},$$
$$\sigma_{24} = \{uNS\}, \; \sigma_{25} = \{sNS\},$$
$$\sigma_{26} = \{\emptyset\}.$$

Каждый элемент этого списка σ_k задаёт последовательность особых точек на экваторе, в том порядке, в котором они встречаются при обходе экватора в направлении против часовой стрелки, начиная с особой точки, расположенной в бесконечно удалённом положительном конце оси Ox. В силу симметрии фазового портрета каждая последовательность состоит из двух следующих друг за другом идентичных частей; мы будем писать только одну из них, соответствующую точкам на верхней полуокружности.

Список естественным образом разбивается на группы одинаковых по длине последовательностей, в каждой группе фазовый портрет имеет одно и то же число инвариантных прямых. В последнем случае $\sigma_{26} = \emptyset$: на экваторе нет особых точек, а значит, нет и инвариантных прямых.

В соответствии с упомянутыми результатами работы [5] предложенный список исчерпывает все варианты поведения траекторий системы (2) в окрестности бесконечности. Это, в свою очередь, означает, что мы можем восстановить все возможные фазовые портреты системы (2).

Окончательно из проведённых рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Кубическая система типа Дарбу (2), у которой многочлены $p_3(x,y)$, $q_3(x,y)$ взаимно просты, имеет 27 типов фазовых портретов, схемы которых приведены на рис. 3.*

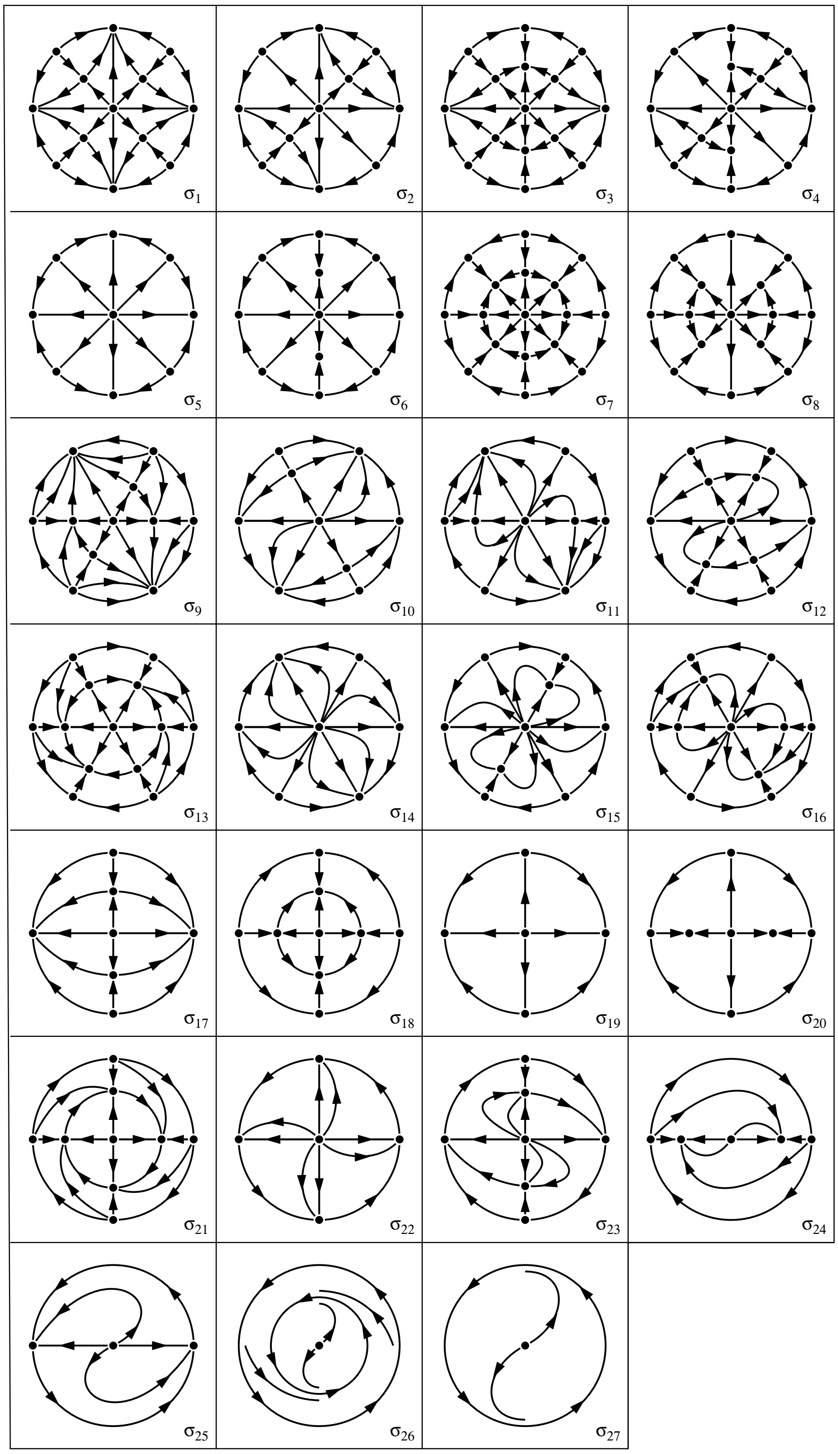

Рис. 3. Фазовые портреты системы (2)

Замечание. Фазовые портреты σ_1–σ_8, σ_{17}–σ_{20}, σ_{26}–σ_{27} являются фазовыми портретами грубой системы (2), полученные нами в [2].

Некоторые из полученных нами фазовых портретов в другом контексте были предъявлены также другими авторами, см., например, [15] и процитированную там литературу.

3. Алгебраические интегралы кубических систем типа Дарбу

При исследовании полиномиальных систем дифференциальных уравнений обычно исследуется вопрос о наличии у них частных или общих интегралов, которые которые являются многочленами или рациональными функциями. Этот интерес вызван, в частности, тем обстоятельством, что в таком случае траектории являются алгебраическими кривыми.

В [1] доказано, что система (2) интегрируема по Дарбу и приведена формула её первого интеграла.

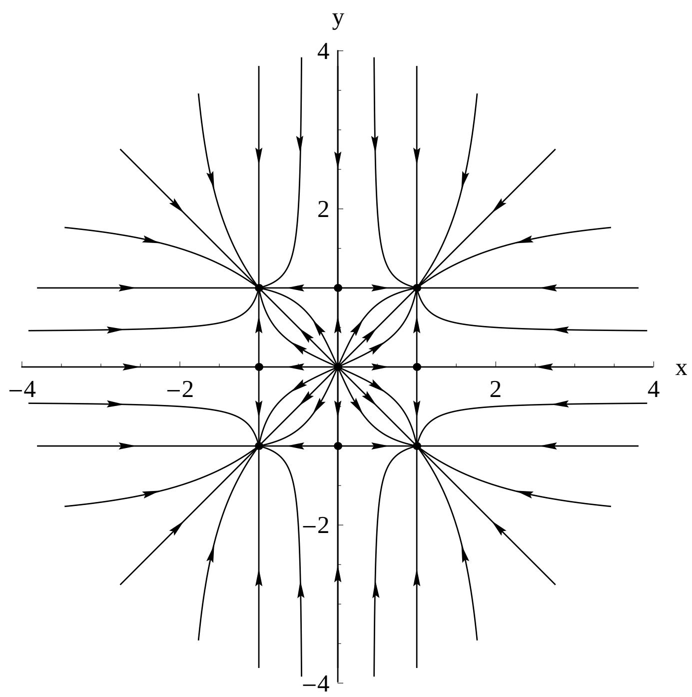

Рис. 4. Фазовый портрет системы (17)

Система (2), очевидно, не имеет полиномиального интеграла (как и вообще любого интеграла, определённого на всей фазовой плоскости), поскольку её особая точка в начале координат является узлом. Это же относится к системам типа Дарбу любой степени.

При определённых условиях система (2) имеет рациональный интеграл.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\dot{x} = x - x^3, \ \dot{y} = y - y^3. \tag{17}$$

Интегралом системы (17) является рациональная функция

$$H(x,y)=\frac{y^2(1-x^2)}{x^2(1-y^2)}. \tag{18}$$

Особые точки системы (17): $O(0,0)$ — дикритический узел, кроме того имеются дикритические узлы $O_1(1,1), O_2(-1,1), O_3(-1,-1), O_4(1,-1)$; особые точки $O_5(1,0), O_6(0,1), O_7(-1,0), O_8(0,-1)$ — гиперболические сёдла. На экваторе Пуанкаре присутствуют четыре дикритических узла, расположенные в концах осей координат, и четыре гиперболических седла, находящиеся в концах биссектрис $y=\pm x$.

Система (17) имеет 8 инвариантных прямых $x{=}0,\ x{=}\pm1,\ y{=}0,\ y{=}\pm1,\ y{=}\pm x$, которые служат линиями уровня интеграла (18): $H(x,y){=}0,\ 1,\ \infty$.

Фазовый портрет системы (17) приведён на рис. 4. Он отвечает схеме σ_7 на рис. 3.

Авторы благодарят рецензента за сделанные замечания.

References

[1] Bendjeddou A., Llibre J., Salhi T., *Dynamics of the polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities and a star node*, J. Diff. Equ., **254**:8 (2013), 3530–3537. MR3020886

[2] Volokitin, E. P.; Cheresiz, V. M., *Qualitative investigation of plane polynomial Darboux-type systems*, Sib. Ělectron. Mat. Izv., **13** (2016), 1170–1186. MR3592221

[3] Berlinskiĭ, *A qualitative investigation of the differential equation* $dy/dx=(y+a_0x^2+a_1xy+a_2y^2)/(x+b_0x^2+b_1xy+b_2y^2)$, Differencial'nye Uravneuija, **2** (1966), 353–360. (Russian) MR 0197850

[4] Yan Qian Ye, et al., *Theory of Limit Cycles*, Trans. Math. Monogr. **66**, Amer. Math. Soc., 1986. MR0854278

[5] Cima A., Llibre J., *Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane*, J. Math. Anal. Appl., **147**:2 (1990), 420–448. MR1050216

[6] Bautin, N. N.; Leontovich E. A., *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti*, Second edition. With an English summary. M.: Nauka, 1990. (Russian) MR1126908

[7] Andronov A. A., et al., *Kachesnvennaya teoriya dinamicheskhikh sistem vtorogo poryadka*, M.: Nauka 1966. (Russian) MR 0199506

[8] Enrique A. González Velasco, *Generic propeties of polynomial vector fields at infinity*, Trans. Amer. Math. Soc., **143**:1 (1969), 201–222. MR0252788

[9] Azamov A., Suvanov Sh., Tilavov A., *Studing of behavior at infinity of vector fields on Poincaré's sphere*, Qual. Theory Dyn. Sys., **15**:1 (2016), 211–220. MR3484010

[10] Leontovič, E.,; Maĭer, A., *On trajectories determing the qualitative structure of the separation of the sphere into trajectories*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **14** (1937), 251–254. (Russian)

[11] Buzzi C. A., Llibre J., Medrado J. C. R., *Phase portraits of reversible linear differential systems with cubic homogeneous polynomial nonlinearities having a non-degenerate center at the origin*, Qual. Theory Dyn. Syst., **7**:2 (2009), 369–403. MR2486681

[12] Markus L., *Global structure of ordinary differential equations in the plane*, Trans. Amer. Math. Soc., **76** (1954), 127–148. MR0060657

[13] Leontovič, E.,; Maĭer, A., *On a scheme determing the topological structure of the separation of trajectories*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.), **103** (1955), 557–560. (Russian) MR0072305

[14] Neumann D. A., *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **48**:1 (1975), 73–81. MR0356138

[15] Bujac C., Llibre J., Vulpe N., *First integrals and phase portraits of planar polynomial linear differential cubic systems with the maximum number of invariant straight lines*, Qual. Theory Dyn. Syst., **15**:2 (2016), 327–348. MR3563424

Volokitin Evgenii Pavlovich
Sobolev Institute of Mathematics
4 Acad. Koptyug avenue
630090 Novosibirsk Russia
Novosibirsk State University
2 Pirogova Str.
630090 Novosibirck Russia
E-mail address: volok@math.nsc.ru

Cheresiz Vladimir Mikhaĭlovich
Sobolev Institute of Mathematics
4 Acad. Koptyug avenue
630090 Novosibirck Russia
E-mail address: vladimir.cheresiz@gmail.com