

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

Том 14, стр. 914–926 (2017)
DOI 10.17377/semi.2017.14.077УДК 519.612 : 51-74
MSC 15A03, 65F05ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА НЕЛОКАЛЬНЫХ ДАННЫХ
С ПЛЕНОЧНЫХ ТЕРМОРЕЗИСТОРОВ ЭЛЕКТРОННЫХ
ПЛАТ

В.В. ШАЙДУРОВ, А.А. КОРНЕЕВА

ABSTRACT. An algorithm is proposed for determining the areas of overheating of a printed circuit board with electronic components and the temperature of overheating by analyzing nonlocal data from extended film thermistors. The algorithm is based on the physical-mathematical model of the temperature field of the board, as well as some qualitative characteristics of thermal states under study, which compensate the underdefinition of the original mathematical formulation. The results of computational experiments illustrating the operability of the algorithm are presented.

Keywords: film thermoresistors, physical-mathematical model, under-defined systems of equations, numerical algorithms.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многолетний опыт тестирования электронного оборудования в космической промышленности показал, что 80% отказов связано с термическими воздействиями на оборудование и примерно 20% – с различными видами вибраций и ударных воздействий [1]. Поэтому оперативный контроль тепловых режимов бортовой радиоэлектронной аппаратуры, в том числе, печатных плат и

SHAYDUROV, V.V., KORNEEVA, A.A., A NUMERICAL METHOD FOR ANALYZING NONLOCAL DATA FROM FILM THERMORESISTORS OF ELECTRONIC BOARDS.

© 2017 Шайдуров В.В., Корнеева А.А.

Работа поддержана РФФИ (РФФИ 16-41-242104).

Поступила 9 июня 2017 г., опубликована 15 сентября 2017 г.

особенно обнаружение перегрева отдельных элементов [2] является весьма актуальным. Невозможность прямого визуального наблюдения (например, тепловизионными устройствами) приводит к использованию небольшого объема данных, часто косвенных с последующей алгоритмической обработкой.

Наиболее разработан контроль температуры четырьмя типами контактных датчиков [3-5], размещаемых на печатной плате. В терморезисторах [5] (термисторах) используется зависимость сопротивления проводника от температуры. Причем разработаны термисторы как с повышением сопротивления при возрастании температуры, так и с понижением. Родственными к классу термисторов являются детекторы температурного сопротивления [6], выделяемые в отдельный класс ввиду высокой точности измерений и специального научного назначения. Третий тип датчиков – термопары [7], состоящие из двух металлических проводников с разной эмиссией электронов и вырабатывающие электродвижущую силу тем больше, чем выше разница температур на концах проводников. И, наконец, резистивно-диодные и другие встроенные структуры [4, 8] меняют свои (вольтамперные) характеристики при изменении температуры. В принципе, каждый из четырех типов датчиков может послужить основой для создания сети, распределенной по поверхности печатной платы. Но с учетом требований к длительности и надежности функционирования на борту на протяжении 15-ти лет в условиях экстремальных температур детекторы температурного сопротивления являются наиболее простым и надежным подходом [4, 6], особенно платиновые ввиду химической инертности и линейной зависимости сопротивления от температуры.

Терморезисторы могут быть реализованы в виде тонких протяженных проводников из металлов или специальных сплавов, причем зависимость сопротивления от температуры может быть отслежена с точностью до сотых долей градуса [6]. Несмотря на их перспективность, датчики в сетевом исполнении пока не применяются для бортовых систем электронной аппаратуры. Например, конструкция из монографии [3] отличается сложностью технической реализации, а патент [8] основан на довольно сложной математической модели, не обеспечивающей приемлемой точности.

В двух недавних публикациях [9, 10] обсуждается использование протяженных терморезисторных пленок в виде сети для анализа температурного поля. В этих работах печатная плата с электронными элементами рассматривается как геометрическая структура из прямоугольных ячеек с нанесенными на нее тонкими протяженными пленками, локальное сопротивление которых строго монотонно зависит от локальной температуры ячейки. Но измерение сопротивления протяженных проводников-термосопротивлений осуществляется не локальным образом, а по некоторым отрезкам. В работе [10] количество отрезков превышает число условных ячеек, так что получается переопределенная система линейных алгебраических уравнений, на основании которой строится поле температур. В работе [9] предложено проводить измерения только по горизонтальным и вертикальным отрезкам, что на порядок уменьшает количество проводов. Но тогда количество измеряемых данных существенно меньше числа локальных сопротивлений всех контролируемых ячеек, что приводит к сильной недоопределенности данных. Вместе с тем, используя физические и качественные соображения, для режима перегрева отдельных элементов предложен алгоритм вычисления реалистичного численного решения: определение

ячеек перегрева и их температуры. Координаты ячейки перегрева в работе [9] находились точно, а температура определялась с существенной погрешностью. В настоящей работе проведено более полное обоснование алгоритмической базы и проведена модификация алгоритма для уточнения температуры перегрева. Также, как в [9], в качестве дополнительных соображений использовано следующее. Во-первых, при перегреве любого элемента прирост температуры в остальных элементах также не отрицательный. Во-вторых, градиент температуры сглаживается за счет теплопередачи между элементами. Математическая формулировка этих соображений приводит к невырожденной системе линейных уравнений, позволяющих определить ячейки перегрева и их примерную температуру. В этой работе дополнительно исследовано локальное влияние сглаживания на точность определения температуры перегрева.

Представленные алгоритмы и вычислительные эксперименты продемонстрировали применимость этого подхода и влияние сглаживания на точность определения температуры перегрева.

2. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим прямоугольную плату размером $s \times p$ (мм) с началом координат в левом верхнем углу и направлением исходящих из него границ платы вдоль прямоугольных осей координат (рис.1). Условно разобьем ее на nm равных прямоугольных ячеек $\omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ размером $s/n \times p/m$ путем условного проведения вертикальных и горизонтальных линий $x_i = is/n$ и $y_j = jp/m, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$.

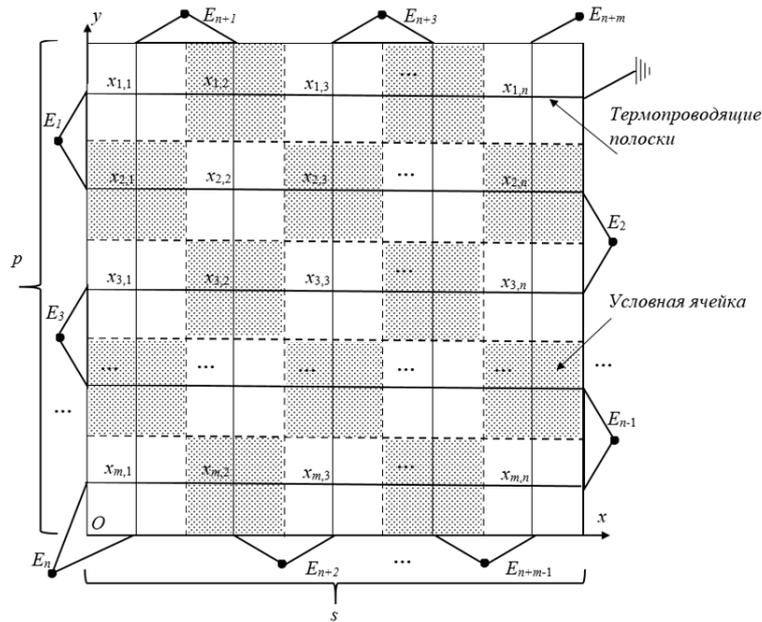


Рис. 1. Прямоугольная плата размером $s \times p$ мм

Для теплового контроля на плату нанесены горизонтальные и вертикальные тонкие металлические полоски из специального сплава, проходящие через середины ячеек $\tilde{x}_i = (i - 1/2)s/n, i = 1, \dots, n, \tilde{y}_j = (j - 1/2)p/m, j = 1, \dots, m$. Свойства сплава таковы, что удельное локальное сопротивление полоски R_{loc} (ом/мм) существенно зависит от локальной температуры T_{loc} :

$$(1) \quad R_{loc} = F(T_{loc}),$$

где $F(T)$ – строго монотонная функция. Имея обратную к ней, мы получаем

$$(2) \quad T_{loc} = F^{-1}(R_{loc}).$$

Поэтому предлагаемые алгоритмы будут сосредоточены на определении сопротивления каждого участка R_{loc} , которое на основании (2) даст локальную температуру.

Для контроля сопротивлений измеряется сила тока I во всей цепи и разности потенциалов $U_{h,j}, U_{v,i}$ для каждой металлической полоски по горизонтали и вертикали, получаемые вычитанием соседних измеренных значений напряжения $E_i, i = 1, \dots, m + n$. Из закона Ома определяются сопротивления как горизонтальных участков – $R_{h,j}$, так и вертикальных – $R_{v,i}$. Положим $r_{i,j}$ равным удельному сопротивлению (ом/мм) в центре ячейки с координатами $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$, одинаковому как для вертикальных, так и для горизонтальных проводников. На участке между двумя узлами $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ и $(x_{i-1/2}, y_{j+1/2})$ в целях упрощения выкладок будем считать локальное сопротивление меняющимся по линейному закону. Тогда сопротивление этого участка равно $(r_{i,j} + r_{i,j+1})p/2m$. А на конце полоски, например, на участке от $(x_0, y_{j-1/2})$ до $(x_{1/2}, y_{j-1/2})$ будем считать локальное сопротивление постоянным, тогда сопротивление этого участка равно $r_{1,j}p/2m$. Сопротивление любого фрагмента цепи равно сумме сопротивлений его участков. Поэтому, проводя интегрирование по длине фрагмента от 0 до p с помощью квадратурной формулы трапеций, получим равенство

$$(3) \quad \int_0^p r(x_i, y) dy = \int_0^{y_{1/2}} r(x_i, y) dy + \sum_{j=1}^{m-1} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} r(x_i, y) dy + \\ + \int_{y_{m-1/2}} r(x_i, y) dy = r_{i,1} \frac{p}{2m} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{r_{i,j} + r_{i,j+1}}{2} \frac{p}{m} + r_{i,m} \frac{p}{2m} = \frac{p}{m} \sum_{j=1}^m r_{i,j}.$$

Аналогично путем интегрирования получается равенство по горизонтали

$$(4) \quad \int_0^s r(x, y_j) dx = \frac{s}{n} \sum_{i=1}^n r_{i,j}.$$

Положим сопротивления дополнительных проводников, соединяющих термоведущие полоски вне платы (рис. 1), для упрощения одинаковыми и равными r_{ext} . Тогда справедлива следующая система линейных алгебраических уравнений с n уравнениями для вертикальных участков и m уравнениями для

В принципе, применение метода Гаусса к системе (10) (с учетом ее вырожденности) может дать одно из допустимых решений. Но это лишь частное решение из бесконечного числа возможных. Например, к полученному решению можно добавить вектор $A_{i+1/2,j+1/2}$ с четырьмя ненулевыми компонентами $x_{i,j} = 1, x_{i+1,j} = -1, x_{i,j+1} = -1, x_{i+1,j+1} = 1$ и остальными $(mn - 4)$ нулевыми компонентами. Его добавление не изменяет правые части систем (5), (6), (9). То есть вектор $A_{i+1/2,j+1/2}$ входит в ядро оператора \mathbf{M} . Определим все ядро этого оператора.

Теорема 1. *Ядро оператора \mathbf{M} является линейной оболочкой $(m - 1)(n - 1)$ векторов $A_{i+1/2,j+1/2}$ для $i = 1, \dots, n - 1$ и $j = 1, \dots, m - 1$.*

Доказательство. Сначала покажем, что этот набор векторов линейно независим. Для этого выпишем их в принятом лексикографическом порядке в виде блочной матрицы с $n - 1$ строкой и n столбцами:

$$(11) \quad \begin{pmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{B} & & & \\ & -\mathbf{B} & \mathbf{B} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\mathbf{B} & \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

где

$$(12) \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

– прямоугольная двухдиагональная матрица размером $(m - 1) \times m$. Сначала в блочной матрице вычеркнем первый блочный столбец, а потом вычеркнем все первые столбцы в каждом блоке \mathbf{B} и $-\mathbf{B}$. В итоге получается квадратный минор исходной блочной матрицы размером $(m - 1)(n - 1) \times (m - 1)(n - 1)$:

$$(13) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{C} & & & & \\ -\mathbf{C} & \mathbf{C} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\mathbf{C} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

где

$$(14) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

– квадратная двухдиагональная матрица размером $(m - 1) \times (m - 1)$. Полученный минор представляет собой нижнюю треугольную матрицу с диагональю, состоящей из единиц. Поэтому он невырожден, что обосновывает размерность линейной оболочки векторов $A_{i+1/2,j+1/2}$, равную $(m - 1)(n - 1)$. Так что размерность ядра оператора \mathbf{M} не меньше $(m - 1)(n - 1)$. Теперь оценим снизу ранг матрицы \mathbf{M} . Для этого в ней сначала вычеркнем строку с номером $m + 1$. А затем вычеркнем $(m - 1)(n - 1)$ столбцов с номерами больше m , оставив из них лишь $n - 1$ столбец с номерами $m + 1, 2m + 1, \dots, (n - 1)m + 1$. В результате

получается квадратный минор \mathbf{M}' размером $(n+m-1) \times (n+m-1)$ следующего вида:

$$(15) \quad \mathbf{M}' = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{S} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

В нем матрица \mathbf{O} размерности $(m-1) \times n$ состоит из одних нулей. В матрице \mathbf{S} размером $m \times (n-1)$ первая строка состоит из единиц, а остальные из нулей. Полученный минор является верхней треугольной матрицей с определителем, равным единице. Это означает, что ранг матрицы \mathbf{M} не меньше $n+m-1$. Напомним, что сумма размерности ядра и ранга матрицы равны nm . Поэтому ни размерность ядра, ни ранг матрицы не могут превысить найденные оценки, поскольку сумма этих оценок уже равна nm . Это означает, что в ядре матрицы \mathbf{M} нет других векторов, кроме $A_{i+1/2, j+1/2}$. \square

Итак, любое решение системы (6) представляет собой сумму частного решения \mathbf{r} с линейной комбинацией векторов ядра. Обозначим компоненты этого решения \mathbf{u} через $u_{i,j}$. Тогда для всех ячеек внутри области имеем равенство

$$(16) \quad u_{i,j} = r_{i,j} + \alpha_{i+1/2, j+1/2} - \alpha_{i-1/2, j-1/2} - \alpha_{i+1/2, j-1/2} + \alpha_{i+1/2, j+1/2},$$

где $\alpha_{i\pm 1/2, j\pm 1/2}$ – коэффициент перед вектором $A_{i\pm 1/2, j\pm 1/2}$. Для граничных ячеек часть соответствующих слагаемых в правой части отсутствует. Возникает вопрос о вычислении коэффициентов $\alpha_{i\pm 1/2, j\pm 1/2}$. Нас будет интересовать установление координат перегрева платы с точностью до ячейки для определения примерной температуры перегрева (которая может дать конструкторам ключ к определению возможного источника). Для определенности мы будем рассматривать терморезисторную пленку с повышением сопротивления при возрастании температуры. В основу алгоритма вычисления положим две дополнительные идеи. Во-первых, за счет теплового потока между ячейками температура (и соответственно локальное сопротивление) разглаживается, так что большие перепады сопротивлений в соседних ячейках считаются недопустимыми. Во-вторых, поскольку мы исследуем режимы перегрева, то отрицательные компоненты $u_{i,j}$ считаются недопустимыми при условии, что мы исследуем положительные приращения температур ячеек к штатной стационарной ситуации. С учетом этих предпосылок сначала выпишем сумму квадратов разности между $u_{i,j}$ и $u_{i+1,j}$ для горизонтальных участков и между $u_{i,j}$ и $u_{i,j+1}$ для вертикальных участков:

$$(17) \quad F(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m (u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2.$$

Для минимизации этого выражения можно найти частные производные $\partial F(\alpha) / \partial(\alpha_{i,j})$ и приравнять их к нулю. В итоге получится система линейных алгебраических уравнений размерностью $(n-1)(m-1)$. Решая эту систему с невырожденной матрицей, можно получить коэффициенты $\alpha_{i\pm 1/2, j\pm 1/2}$. В зависимости от геометрического расположения неизвестного $u_{i,j}$ выражение $\partial F(\alpha) / \partial \alpha_{i,j}$

может принимать одну из девяти форм. Наиболее сложное выражение получается, когда $u_{i,j}$ соответствует строго внутреннему узлу:

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & F(\alpha)/\partial(\alpha_{i+1/2,j+1/2}) = \\
 & - 2\alpha_{i-3/2,j-1/2} + 4\alpha_{i-3/2,j+1/2} - 2\alpha_{i-3/2,j+3/2} - 2\alpha_{i-1/2,j-3/2} \\
 & + 16\alpha_{i-1/2,j-1/2} - 28\alpha_{i-1/2,j+1/2} + 16\alpha_{i-1/2,j+3/2} - 2\alpha_{i-1/2,j+5/2} \\
 & - 28\alpha_{i+1/2,j-1/2} + 48\alpha_{i+1/2,j+1/2} + 4\alpha_{i+1/2,j-3/2} - 28\alpha_{i+1/2,j+3/2} \\
 & + 4\alpha_{i+1/2,j+5/2} - 2\alpha_{i+3/2,j-3/2} + 16\alpha_{i+3/2,j-1/2} - 28\alpha_{i+3/2,j+1/2} \\
 & + 16\alpha_{i+3/2,j+3/2} - 2\alpha_{i+3/2,j+5/2} - 2\alpha_{i+5/2,j-1/2} + 4\alpha_{i+5/2,j+1/2} \\
 & - 2\alpha_{i+5/2,j+3/2} - 2r_{i-1,j} + 2r_{i-1,j+1} - 2r_{i,j-1} + 12r_{i,j} - 12r_{i,j+1} \\
 & + 2r_{i,j+2} + 2r_{i+1,j-1} - 12r_{i+1,j+2} + 12r_{i+1,j+1} - 2r_{i+1,j+2} \\
 & + 2r_{i+2,j} - 2r_{i+2,j+1}.
 \end{aligned}$$

При расположении узла в боковых полосках платы, а особенно в ее углах, равенство (18) соответственно упрощается ввиду отсутствия выражений $\alpha_{i\pm 1/2,j\pm 1/2}$ с индексами, выходящими за пределы индексов платы. Например, для верхнего левого углового узла производная равна

$$\begin{aligned}
 (19) \quad & F(\alpha)/\partial(\alpha_{1/2,1/2}) = \\
 & 40\alpha_{1/2,1/2} - 26\alpha_{1/2,3/2} + 4\alpha_{1/2,5/2} - 26\alpha_{3/2,1/2} - 2\alpha_{3/2,5/2} \\
 & - 2\alpha_{5/2,3/2} + 16\alpha_{3/2,3/2} + 8r_{0,0} - 10r_{0,1} + 10r_{1,0} + 2r_{0,2} \\
 & + 12r_{1,1} + 2r_{2,0} - 2r_{1,2} - 2r_{2,1}.
 \end{aligned}$$

Мы не будем приводить здесь остальные 7 вариантов ввиду их суммарной громоздкости. В принципе, найденное решение \mathbf{u} может содержать отрицательные компоненты, что не отвечает физическому смыслу перегрева. В этом случае мы применяем метод множителей Лагранжа. Для этого дополним функцию $F(\alpha)$ несколькими слагаемыми, соответствующими отрицательным компонентам:

$$(20) \quad F^*(\alpha, \lambda) = F(\alpha) - \sum_{i=1}^q \lambda_i \gamma_i(\alpha),$$

где q – количество компонент с отрицательным значением, λ_i – множители Лагранжа, $\gamma_i(\alpha)$ функции, описывающие ограничения, в данном случае: равенство нулю соответствующей компоненты сопротивлений. После этого мы находим новые значения коэффициентов $\alpha_{i,j}$ и сопротивлений \mathbf{u} уже с использованием функции $F^*(\alpha, \lambda)$ из системы

$$(21) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix},$$

где приняты следующие обозначения: \mathbf{A}_{11} – исходная матрица коэффициентов (5) размерностью $(n-1)(m-1) \times (n-1)(m-1)$; \mathbf{A}_{21} – дополнительная матрица коэффициентов метода множителей Лагранжа размерностью $q \times (n-1)(m-1)$; \mathbf{A}_{12} – транспонированная \mathbf{A}_{21} размерностью $(n-1)(m-1) \times q$; \mathbf{A}_{22} – нулевая матрица размерностью $q \times q$; \mathbf{u}_1 – вектор-столбец решения, соответствующий значениям \mathbf{u} ; $\mathbf{u}_2 = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)^T$ – вектор-столбец, соответствующий множителям Лагранжа.

Полученное решение проверяется на отрицательность $u_{i,j}$. Если в решении присутствует отрицательный элемент, то рабочая матрица дополняется соответствующими строкой и столбцом в \mathbf{A}_{21} и \mathbf{A}_{12} , а вектор-столбец \mathbf{u}_2 расширяется на соответствующий элемент. При наличии нескольких отрицательных $u_{i,j}$ мы берем одно наименьшее, поскольку такой выбор обычно устраняет еще несколько отрицательных значений меньшей амплитуды.

Результативность этого подхода продемонстрирована в [9]. Численные эксперименты показали надежное определение координат ячейки перегрева в унимодальном случае или для двух разнесенных ячеек с перегревом. Но погрешность определения температуры перегрева была значительной. Для ее уменьшения привлечем еще одно соображение. Отметим, что сформулированный подход аналогичен дискретной аппроксимации уравнения Лапласа с точностью до постоянного множителя. В принципе, при однородном коэффициенте теплопроводности мы и должны получить такую аппроксимацию. Но ячейка перегрева с номером (\tilde{i}, \tilde{j}) содержит сосредоточенный источник теплоты, который при таком подходе не учитывается в соответствующем разностном уравнении. Для повышения точности введем корректирующий множитель $0 < \beta < 1$ в (12) для разностей, содержащих $u_{\tilde{i}, \tilde{j}}$. После чего проводятся оба ранее описанных этапа алгоритма с модифицированными уравнениями. Тем самым, мы ослабляем сглаживающее влияние алгоритма в окрестности максимальной температуры, где при сосредоточенном источнике теплоты функция температуры должна стремиться к функции Грина при уменьшении размеров ячеек.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Пусть исходные сопротивления модельной задачи при $m = n = 20$ имеют следующий вид:

$$(22) \quad r_{i,j} = 100 \sin \left(\frac{\pi(i-1)^2}{(n-1)^2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi(j-1)^2}{(n-1)^2} \right),$$

где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, а $r_{i,j}$ – локальное удельное сопротивление в центре ячейки $\omega_{i-1,j-1}$. Фрагмент этих значений в окрестности максимума представлен в таблице 1. Для построенных алгоритмов компоненты (22) в отдельности неизвестны. Входными данными для их определения являются суммы

$$(23) \quad R_{v,i} = \sum_{j=1}^n r_{i,j}, R_{h,i} = \sum_{i=1}^n r_{i,j}.$$

В итоге для определения 400 значений $r_{i,j}$ у нас имеется только 40 уравнений (5).

Таблица 1. Фрагмент тестируемого распределения (22)

$i \setminus j$	12	13	14	15	16
12	65.6	78.4	86.0	85.3	74.5
13	71.7	85.7	94.0	93.3	81.4
14	75.1	89.8	98.5	97.7	85.3
15	74.8	89.4	98.1	97.3	85.0
16	69.9	83.6	91.7	90.9	79.4

Ячейка с максимальным значением сопротивления (температуры) находится в позиции (14, 14). Фрагмент результата работы первого этапа алгоритма без использования метода множителей Лагранжа представлен в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2. Результаты работы первого этапа алгоритма для распределения (22)

$i \setminus j$	12	13	14	15	16
12	50.1	57.2	61.4	61.0	55.0
13	53.0	60.1	64.3	63.9	57.9
14	54.7	61.7	65.9	65.5	59.6
15	54.5	61.6	65.8	65.4	59.4
16	52.2	59.2	63.4	63.0	57.1

Координаты ячейки, содержащей значение максимального сопротивления (температуры), установлены точно. Но полученный результат содержит отрицательные (нефизичные) значения температуры, например, в левом верхнем углу (таблица 3).

ТАБЛИЦА 3. Отрицательные значения, полученные в результате работы первого этапа алгоритма для распределения (22)

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	-17.2	-17.2	-17.1	-16.9	-16.2
2	-16.9	-16.9	-16.8	-16.6	-15.9
3	-15.9	-15.9	-15.9	-15.6	-15.0
4	-14.4	-14.4	-14.3	-14.1	-13.4
5	-12.2	-12.2	-12.1	-11.9	-11.3

Применим к полученному решению метод множителей Лагранжа (таблица 4).

ТАБЛИЦА 4. Фрагмент результатов второго этапа алгоритма для распределения (22)

$i \setminus j$	12	13	14	15	16
12	66.8	77.5	83.1	81.6	71.7
13	71.9	82.5	88.0	86.3	76.1
14	74.3	84.7	90.1	88.3	78.0
15	73.3	83.3	88.5	86.8	76.8
16	68.1	77.6	82.6	81.1	71.8

После его применения отрицательные значения устранены. Отметим, что позиция максимального значения (позиция перегрева) не изменилась. Что касается относительной ошибки ϵ определения локального сопротивления в этих узлах, то она равна $\epsilon = (98.5 - 90.1)/98.5 = 0.085$, т.е. 8.5%.

Для повышения точности работы алгоритма введем корректирующий множитель $0 < \beta < 1$ в (17) для разностей, содержащих $u_{i,j}$, которое соответствует ячейке максимального перегрева. Пусть $\beta = 0.5$. Результат работы алгоритма с этим множителем представлен в таблице 5.

ТАБЛИЦА 5. Фрагмент корректирующего этапа алгоритма при $\beta = 0.5$

$i \setminus j$	12	13	14	15	16
12	66.8	77.5	82.9	81.6	71.7
13	71.8	82.4	87.9	86.4	76.1
14	74.0	84.1	92.3	88.3	78.0
15	73.2	83.3	88.5	86.9	76.9
16	68.1	77.6	82.4	81.1	71.8

Относительная ошибка ϵ локального сопротивления в этих узлах оказалась равной $\epsilon = (98.5 - 92.3)/98.5 = 0.063$, т.е. 6.3%. Сделаем коэффициент еще меньше: $\beta = 0.3$.

ТАБЛИЦА 6. Фрагмент корректирующего этапа алгоритма при $\beta = 0.3$

$i \setminus j$	12	13	14	15	16
12	66.8	77.5	82.8	81.6	71.7
13	71.8	82.4	87.8	86.4	76.2
14	73.7	83.7	94.9	88.2	77.8
15	73.1	83.2	88.4	86.9	76.9
16	68.1	77.6	82.3	81.1	71.8

Относительная ошибка теперь составляет $\epsilon = (98.5 - 94.9)/98.5 = 0.036$, т.е. 3.6%. Погрешность определения температуры перегрева убыла, но соседние значения температуры отошли несколько дальше от исходных значений.

В принципе, локализация ячейки перегрева и ее примерная температура уже являются весьма важными данными для диагностики исправности аппаратуры. А расчеты с корректирующими коэффициентами помимо некоторого уточнения температуры перегрева могут дать дополнительную информацию о сосредоточенности или распределенности нештатного источника теплоты.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, печатная плата с электронными элементами в физико-математической модели представлена как геометрическая структура из прямоугольных ячеек с нанесенными на нее тонкими протяженными пленочными термисторами (локальное сопротивление которых строго монотонно зависит от локальной температуры ячейки). Измерение электрического потенциала и соответственно сопротивления протяженных проводников осуществляется только по горизонтальным и вертикальным отрезкам ввиду ограничений на число проводов и набор снимаемой информации. Поэтому количество получаемых данных

о сопротивлениях протяженных проводников существенно меньше числа локальных сопротивлений всех ячеек. В результате построенная математическая модель, представляющая собой систему линейных алгебраических уравнений, является сильно недоопределенной. Но ядро матрицы определяется в явном виде.

Особенно важным является определение ячеек повышенных температур, указывающих на нештатную ситуацию, которая может привести к выходу из строя элементов платы. В этой ситуации использованы два дополнительных физических соображения. Во-первых, при перегреве любого элемента температура в других ячейках не понижается. Во-вторых, градиент температуры сглаживается за счет теплопередачи между элементами. Математическая формулировка этих соображений приводит к расширенной невырожденной системе линейных уравнений, позволяющей определить локальное сопротивление проводников в каждой ячейке. Проведенные в этой работе вычислительные эксперименты показали возможность дальнейшего повышения точности определения температуры за счет использования более конкретных данных о коэффициентах теплопередачи между условными ячейками.

Замечание. Сформулированные алгоритмы работают с приращениями сопротивлений, линейно зависящими от измеряемых приращений падения напряжения на сегментах цепи. Это позволяет оценивать как положительные приращения всех сопротивлений, так и отрицательные, что дает возможность решать другую задачу обнаружения дефектов: определение неработающего элемента платы. В этом случае отсутствие рассеяния мощности на неработающем элементе приводит к отрицательному приращению температур по сравнению со штатной ситуацией и соответственно к отрицательному приращению сопротивлений сети. Умножая приращения правой части на -1 , мы приходим к сформулированному ранее алгоритму с неотрицательными решениями, но уже для локализации неработающих узлов.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта 16-41-242104.

REFERENCES

- [1] D.S. Steinberg, *Vibration analysis for electronic equipment*, New York: Wiley, 2000.
- [2] V.V. Shaydurov, V.A. Derevyanko, E.N. Vasilyev, V.E. Kosenko, V.D. Zvonar, V.E. Chebotarev, *Results and prospects of joint thermal researches in ICM SB RAS and JSC "ISS" Academician M.F. Reshetnev*, Vestnik SibGAU, **6 (52)** (2013), 107–110. (in Russ.)
- [3] F. Lieneweg, *Measurement of temperature in the equipment*, M.: Metallurgy, 1980. (in Russ.)
- [4] *Temperature measurement handbook*, Stamford: Omega Engineering, 1983.
- [5] S.D. Wood, B.W. Mangum, J.J. Filliben, S.B. Tillett, *An investigation of the stability of thermistors*, J. Research of the National Bureau of Standards, **83:3** (1978), 247–263.
- [6] J.L. Riddle, G.T. Furikava, H.H. Plumb, *Platinum resistance thermometry. National Bureau of Standards, Monograph 126.*, Washington: U.S. Government printing office, 1972.
- [7] *Standard specification and temperature-electromotive force (EMF) tables for standardized thermocouples. Vol. ASTM E230-98*, West Conshohocken: American Society for Testing and Material, 1998.
- [8] J.P. Caltagirone, *Reseau maille de conducteurs electriques, notamment pour mesure de temperatures*, France: Demande de brevet d'invention № 2315689, Intern. Classification G01K7/04, 1977.

- [9] A.A. Korneeva, V.V. Shaydurov, *Numerical analysis of temperature data from film thermistors of electronic boards*, Computing technologies, **22**:3 (2017), 32–44. (in Russ.)
- [10] V.A. Derevyanko, A.F. Latypov, *Recovery of the temperature distribution of the medium in the two-dimensional domain by the tomographic method from the measurements of the electric resistance of oriented conductors*, Computing technologies, **22**:5 (2017). (in Russ, in print)
- [11] A.I. Maltsev, *Fundamentals of linear algebra*, M.: Nauka, 1970. (in Russ.)
- [12] I.R. Shafarevich, A.O. Ramezov, *Fundamentals of linear algebra*, M.: Fizmatlit, 2009. (in Russ.)

SHAYDUROV VLADIMIR VIKTOROVICH,
INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MODELING SB RAS,
AKADEMGORODOK, 50/44,
660036, KRASNOYARSK, RUSSIA
E-mail address: shaidurov04@mail.ru

KORNEEVA ANNA ANATOLIEVNA,
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,
79 SVOBODNY PR.,
660041, KRASNOYARSK, RUSSIA
E-mail address: korneeva_ikit@mail.ru