S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 92–97 (2017) УДК 512.56, 512.57
DOI 10.17377/semi.2017.14.010 MSC 06B15, 08C15

О СЛОЖНОСТИ РЕШЕТОК КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

С.М. ЛУЦАК

Abstract. We prove that any AD-class of algebraic structures of finite signature contains continuum many proper subclasses, which have the Nurakunov non-computability property, but which are not Q-universal (among those are almost all the known Q-universal quasivarieties nowadays). A similar result holds for some classes of algebraic structures of countable signature. This provides a negative answer to an open question.

Keywords: computable set, lattice, quasivariety, Q-universality.

1. Введение

В работе рассматривается сложность строения решеток (относительных) квазимногообразий.

Определение 1. *Будем говорить, что класс* $\mathbf{K}$ *алгебраических систем фиксированной сигнатуры имеет свойство невычислимости* [*неперечислимости, соответственно*] *Нуракунова, если множество всех* (*типов изоморфизма*) *конечных подрешеток решетки* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ *не является вычислимым* [*вычислимо перечислимым*].

Таким образом, если класс $\mathbf{K}$ алгебраических систем фиксированной сигнатуры имеет свойство Нуракунова, то не существует алгоритма, который бы определял, вложима ли конечная решетка в решетку $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ или нет. В работе [1] А. М. Нуракунов построил первый пример квазимногообразия (а именно, квазимногообразие унаров), обладающего указанным в определении 1 свойством. В работе [2] он же построил аналогичный пример в квазимногообразии всех точечных абелевых групп. Существование квазимногообразий со свойством Нуракунова свидетельствует о том, что решетки квазимногообразий могут быть чрезвычайно сложными.

Lutsak, S.M., On the complexity of quasivariety lattices.

Поступила 14 ноября 2016 г., опубликована 10 февраля 2017 г.

Другую меру сложности решеток квазимногообразий отражает понятие *Q-универсальности.* Согласно М. В. Сапиру [3], квазимногообразие $\mathbf{R}$ *Q-универсально*, если для любого квазимногообразия $\mathbf{R}'$ конечной сигнатуры решетка $\mathrm{Lq}(\mathbf{R}')$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки в $\mathrm{Lq}(\mathbf{R})$. К настоящему моменту известно очень много различных Q-универсальных квазимногообразий, см. обзорную работу [4], а также [5, раздел 5.4.5]. Недавно А. М. Нуракунов [2] доказал Q-универсальность квазимногообразия точечных абелевых групп.

Основываясь на идеях А. М. Нуракунова из [1], в работе М. В. Швидефски и А. Замойской-Дженио [6] была установлена связь между этими свойствами, упомянутыми выше. А именно, было доказано, что класс $\mathbf{K}$ *всех* систем сигнатуры σ является Q-универсальным тогда и только тогда, когда он содержит подкласс, обладающий свойством невычислимости [неперечислимости] Нуракунова, см. [6, теорема 6.3]. В этой связи возникла следующая

Проблема 1. [6, проблема 2], [7, проблема 5.1] *Верно ли, что любой Q-универсальный класс систем $\mathbf{K}$ фиксированной сигнатуры содержит подкласс, обладающий свойством невычислимости [неперечислимости] Нуракунова? Существует ли класс $\mathbf{K}$, не являющийся Q-универсальным, но, тем не менее, обладающий указанным выше свойством?*

В работе М. В. Швидефски [7] был дан положительный ответ на первый вопрос для почти всех известных к настоящему времени Q-универсальных квазимногообразий, [7, теорема 4.2]. Здесь мы покажем, что и на второй вопрос ответ положителен. А именно, теоремы 2 и 3 устанавливают, что для различных сигнатур существует континуум классов, обладающих свойством невычислимости [неперечислимости] Нуракунова, но не являющихся Q-универсальными. Последнее имеет место в силу того, что нами найдено нетривиальное тождество, истинное на решетках квазимногообразий указанных классов, см. теорему 1. Заметим также, что теорема 2 имеет довольно широкий спектр применимости.

Настоящая работа организована следующим образом. Основные понятия определены в разделе 2. Отсутствующие там определения могут быть найдены в [5, 8]. В разделе 3 мы доказываем основные результаты: теоремы 1, 2 и 3.

2. Основные понятия

Для нижней полурешетки $\mathcal{S} = \langle S; \wedge \rangle$ обозначим через $\mathrm{Sub}(\mathcal{S})$ решетку всех нижних подполурешеток в $\mathcal{S}$. Для любых двух подполурешеток $S_0, S_1 \in \mathrm{Sub}(\mathcal{S})$ множество $S_0 + S_1 = \{s_0 \wedge s_1 \mid s_0 \in S_0,\ s_1 \in S_1\}$ является наименьшей нижней подполурешеткой в $\mathcal{S}$, содержащей $S_0 \cup S_1$; т. е., решеточным объединением S_0 и S_1 в $\mathrm{Sub}(\mathcal{S})$.

Обозначим через $\mathbf{K}(\sigma)$ класс всех систем сигнатуры σ; через $\mathbf{Q}(\mathbf{K})$ наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$, и через $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ класс всех систем из $\mathbf{K}(\sigma)$, изоморфных подсистемам систем из $\mathbf{K}$, [5, с. 24]. Пусть $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$. Тогда $\mathbf{K}'$ называется $\mathbf{K}$-*квазиэквациональным*, если $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathrm{Mod}(\Sigma)$ для некоторого множества Σ квазитождеств сигнатуры σ, [5, с. 117]. Множество всех $\mathbf{K}$-квазиэквациональных подклассов, упорядоченное по включению, образует полную решетку, которая называется *решеткой* $\mathbf{K}$-*квазимногообразий* или *решеткой квазимногообразий* для $\mathbf{K}$, или просто *решеткой*

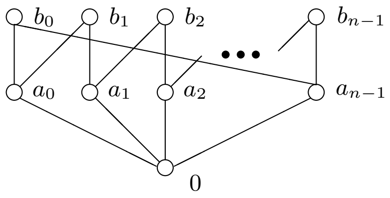

Рис. 1. Нижняя полурешетка $\mathcal{K}_n$ типа "корона"

относительных квазимногообразий, когда $\mathbf{K}$ легко восстанавливается из контекста, и обозначается $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, [5, с. 205]. Все рассматриваемые классы алгебраических систем являются *абстрактными*, т. е. замкнуты относительно изоморфизмов.

Нам потребуется также следующая

Лемма 1. [1, лемма 3] *Пусть $\mathbf{L}$ — бесконечное вычислимое множество попарно невложимых подпрямо неразложимых конечных решеток, содержащих, по крайней мере, 3 элемента. Пусть $\mathcal{K}$ — решетка и пусть множество $\mathbf{L}_0 \subseteq \mathbf{L} \cap \mathbf{S}(\mathcal{K})$ таково, что $\mathcal{K} \leq_s \prod\{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \in \mathbf{L}_0\} \times \mathbf{2}$, где $\mathbf{2}$ обозначает двухэлементную решетку.*

(1) *Если множество $\mathbf{L}_0$ вычислимо перечислимо, но не вычислимо, то множество всех конечных подрешеток решетки $\mathcal{K}$ также вычислимо перечислимо, но не вычислимо.*
(2) *Если множество $\mathbf{L}_0$ не является вычислимо перечислимым, то множество всех конечных подрешеток решетки $\mathcal{K}$ также не является вычислимо перечислимым.*

3. Основные результаты

Для $0 < n < \omega$ рассмотрим следующее тождество T_n, похожее на тождество H_n, которое рассматривалось в работе [9]:

$$U_n = \bigvee_{0 \leq i \leq n-1} V_{i,n},$$

где решеточные термы от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
&U_{n,n} = x_n; \\
&U_{i,n} = x_i \wedge (U_{i+1,n} \vee x_{i+1}'), && 0 \leqslant i \leqslant n-1; \\
&U_n = U_{0,n}; \\
&V_{i,i,n} = (x_i \wedge U_{i+1,n}) \vee (x_i \wedge x_{i+1}'), && 0 \leqslant i \leqslant n-1; \\
&V_{i,j,n} = x_j \wedge (V_{i,j+1,n} \vee x_{j+1}'), && 0 \leqslant j < i \leqslant n-1; \\
&V_{i,n} = V_{i,0,n}, && 0 \leqslant i \leqslant n-1.
\end{aligned}$$

Тогда тождество T_3 имеет вид:

$$U_3 = V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}.$$

Пусть $\mathcal{K}_n$, $n \in \omega \setminus \{0,1,2\}$, — конечная нижняя полурешетка типа “корона”, представленная на рис. 1.

Теорема 1. *Для любого $n \in \omega \setminus \{0,1,2\}$ решетка* $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ *удовлетворяет тождеству* T_3.

Доказательство. Согласно [9, лемма 5.2], для любого $n > 0$ неравенства

$$V_{i,n} \leq U_n, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

выполняются в любой решетке. Таким образом, достаточно проверить, что неравенство $U_3 \leq V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}$ выполняется в решетке $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$. Действительно, пусть A_0, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, $B_3 \in \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$. Мы используем те же обозначения, что используются для термов, и для значений этих термов в решетке $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ при означивании $x_i \mapsto A_i$, $0 \leqslant i \leqslant 3$, $x'_i \mapsto B_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Итак, пусть $a_0 \in U_3$. Тогда $a_0 \in A_0$ и $a_0 \in U_{1,3} + B_1$. В этом случае найдутся элементы $a_1 \in U_{1,3}$ и $b_1 \in B_1$, такие что $a_0 = a_1 \wedge b_1$ в $\mathcal{K}_n$. Если $a_0 = a_1$ или $a_0 = b_1$, то $a_0 \in (A_0 \cap U_{1,3}) \cup (A_0 \cap B_1) \subseteq V_{0,0,3} = V_{0,3}$. В противном случае $a_0 < a_1$, $a_0 < b_1$ и найдутся элементы $a_2 \in U_{2,3}$ и $b_2 \in B_2$, такие что $a_1 = a_2 \wedge b_2$ в $\mathcal{K}_n$. Если $a_1 = a_2$ или $a_1 = b_2$, то $a_1 \in (A_1 \cap U_{2,3}) \cup (A_1 \cap B_2) \subseteq V_{1,1,3}$. Поэтому $a_0 \in A_0 \cap (V_{1,1,3} + B_1) = V_{1,0,3} = V_{1,3}$. В противном случае $a_1 < a_2$, $a_1 < b_2$ и найдутся элементы $a_3 \in U_{3,3} = A_3$ и $b_3 \in B_3$, такие что $a_2 = a_3 \wedge b_3$ в $\mathcal{K}_n$. И снова если $a_2 = a_3$ или $a_2 = b_3$, то $a_2 \in (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap B_3) \subseteq V_{2,2,3}$. Поэтому $a_1 \in A_1 \cap (V_{2,2,3} + B_2) = V_{2,1,3}$ и $a_0 \in A_0 \cap (V_{2,1,3} + B_1) = V_{2,0,3} = V_{2,3}$.

В противном же случае, $a_2 < a_3$, $a_2 < b_3$, то есть $\mathcal{K}_n$ содержит цепь $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$, что невозможно, поскольку полурешетка $\mathcal{K}_n$ не содержит четырехэлементных цепей. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Поскольку тождества мультипликативно устойчивы [8, с. 189], справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Решетка* $\prod_{n\in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ *удовлетворяет тождеству* T_3, *для произвольного множества* $N \subseteq \omega \setminus \{0,1,2\}$.

Следствие 1 будет использовано при доказательстве основного результата для того, чтобы показать, что все те классы [квазимногообразия], существование которых утверждается в теоремах 2 и 3, не являются Q-универсальными.

В работе М. Адамса и В. Дзебяка [10] были рассмотрены определенные свойства (P_1)–(P_4) и было показано, что любое квазимногообразие алгебраических систем фиксированной сигнатуры, содержащее подкласс конечных систем, обладающих этими свойствами, является Q-универсальным. В работе М. В. Швидефски [7] были рассмотрены свойства (P_0)–(P_4), очень близкие к свойствам М. Адамса и В. Дзебяка, и было показано, что любой класс, содержащий подкласс со свойствами (P_0)–(P_4), Q-универсален и содержит подкласс, обладающий свойством невычислимости [неперечислимости] Нуракунова. Теорема 2 уточняет этот результат. Но сначала мы дадим определение свойств (P_0)–(P_4).

Определение 2. *Мы говорим, что класс* $\mathbf{K}$ *систем фиксированной сигнатуры является* AD*-классом, если* $\mathbf{K}$ *содержит подкласс* $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_X \mid X \in \mathcal{P}_{fin}(\omega)\}$ *со следующими свойствами:*

(P_0) *для любого* $X \in \mathcal{P}_{fin}(\omega)$ *система* $\mathcal{A}_X$ *l-проективна в* $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$, *а тривиальная конгруэнция является кокомпактным элементом в решетке относительных конгруэнций* $\mathrm{Con}_{\mathbf{Q}(\mathbf{A})}\mathcal{A}_X$;

(P$_1$) *$\mathcal{A}_\varnothing$ является тривиальной системой;*
(P$_2$) *если $X = Y \cup Z$ в $\mathcal{P}_{fin}(\omega)$, то $\mathcal{A}_X \in \mathbf{Q}(\mathcal{A}_Y, \mathcal{A}_Z)$;*
(P$_3$) *если $\varnothing \neq X \in \mathcal{P}_{fin}(\omega)$ и $\mathcal{A}_X \in \mathbf{Q}(\mathcal{A}_Y)$, то $X = Y$;*
(P$_4$) *если $\mathcal{A}_X \leq \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_1$ для некоторых систем $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1 \in \mathbf{Q}(\mathbf{A})$, то существуют Y_0, $Y_1 \in \mathcal{P}_{fin}(\omega)$, такие что $\mathcal{A}_{Y_0} \in \mathbf{Q}(\mathcal{B}_0)$, $\mathcal{A}_{Y_1} \in \mathbf{Q}(\mathcal{B}_1)$ и $X = Y_0 \cup Y_1$.*

Теорема 2. *Пусть класс $\mathbf{R}$ алгебраических систем конечной сигнатуры является* AD*-классом. Тогда существует континуум подклассов $\mathbf{K}$ в $\mathbf{R}$, обладающих свойством невычислимости* [*неперечислимости*] *Нуракунова, и не являющихся Q-универсальными.*

Доказательство. Пусть множество $N \subseteq \omega \setminus \{0, 1, 2\}$ вычислимо перечислимо, но не вычислимо [не является вычислимо перечислимым] и $\{\mathcal{K}_n \mid n \in N\}$ — класс конечных нижних полурешеток типа “корона”, см. рис. 1. Согласно теореме [7, теорема 3.4], примененной к классу $\{\mathcal{K}_n \mid n \in N\}$, существует класс $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$, такой что $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) \cong \prod_{n\in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$. Согласно [1, лемма 17], решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ подпрямо неразложима для любого $n > 2$. Согласно [1, лемма 18], $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_m)$ вложима в $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ тогда и только тогда, когда $m = n$. Пусть $\mathbf{L} = \{\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n) \mid n > 2\}$ и пусть $\mathbf{L}_0 = \{\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n) \mid n \in N\}$. Тогда $\mathbf{L}_0 \subseteq \mathbf{L} \cap \mathbf{S}\big(\mathrm{Lq}(\mathbf{K})\big)$. Следовательно, множество типов изоморфизма класса всех конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ вычислимо перечислимо, но не вычислимо [не является вычислимо перечислимым] согласно лемме 1(i) [(ii)].

Кроме того, решетка $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ удовлетворяет нетривиальному тождеству T_3 согласно следствию 1, т. е. класс $\mathbf{K}$ не является Q-универсрльным. Поскольку множество подмножеств счетного множества, не являющихся вычислимо перечислимыми, континуально, получаем утверждение теоремы. □

Следующая теорема является результатом применения теоремы 2 к различным классам алгебраических систем, которые, согласно [7, §5], являются AD-классами.

Теорема 3. *Для следующих классов алгебраических систем существует континуум подклассов $\mathbf{K}$, обладающих свойством невычислимости* [*неперечислимости*] *Нуракунова, но не являющихся Q-универсальными:*

(1) *многообразие всех унаров;*
(2) *многообразие всех точечных абелевых групп;*
(3) *квазимногообразие всех* [*ориентированных*] *графов;*
(4) *многообразие всех дифференциальных группоидов;*
(5) *многообразие всех одноэлементных систем бесконечной сигнатуры, состоящей из константных* [*одноместных предикатных*] *символов;*
(6) *многообразие всех коммутативных колец с единицей;*
(7) *“finite-to-finite” универсальные квазимногообразия;*
(8) *многообразие MV-алгебр;*
(9) *многообразие канторовых алгебр;*
(10) *минимальные многообразия унарных алгебр;*
(11) *многообразие модулярных решеток;*
(12) *квазимногообразие Сапира, порожденное одной полугруппой.*

В случаях (1) *и* (5) *классы $\mathbf{K}$ можно выбрать квазимногообразиями.*

Доказательство. Требуемые утверждения следуют из теоремы 2, а также из результатов работ, где было показано, что соответствующие классы алгебраических систем являются AD-классами, см. [10], [11], [4, §5], [5, раздел 5.4.5], [7, §5], а также библиографию в [7].

Согласно теореме [1, теорема 2], примененной к классу $\{\mathcal{K}_n \mid n \in N\}$, существует квазимногообразие $\mathbf{U}_N$ унаров, такое что $\mathrm{Lq}(\mathbf{U}_N) \leq_s \prod_{n\in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n) \times \mathbf{2}$, где $\mathbf{2}$ обозначает двухэлементную решетку. Отсюда, из леммы 1, а также из [6, теорема 5.3], [12, теорема 9.3] вытекает последнее утверждение. □

Доказанные теоремы 2 и 3 свидетельствуют о том, что ответ на второй вопрос проблемы 1 положителен. Теорема 2 может быть применена почти ко всем известным к настоящему времени Q-универсальным квазимногообразиям, поскольку в соответствующих работах установлено, что эти квазимногообразия являются AD-классами, см. [10], [11], [4, §5], [5, раздел 5.4.5], [7, §5], а также библиографию в [7]. В теореме 3 перечислены лишь некоторые, наиболее известные, из этих классов.

В заключение автор выражает свою признательность М. В. Швидефски за постановку вопроса и полезные обсуждения, а также анонимному рецензенту за ценные рекомендации.

References

[1] A. M. Nurakunov, *Unreasonable lattices of quasivarieties*, Internat. J. Algebra Comput., **22**:3 (2012), 1–17. MR2922379

[2] A. M. Nurakunov, *Quasivariety lattices of pointed Abelian groups*, Algebra and Logic, **53**:3 (2014), 372–400. MR3288442

[3] M. V. Sapir, *The lattice of quasivarieties of semigroups*, Algebra Universalis, **21**:2–3 (1985), 172–180. MR0855737

[4] M. E. Adams, K. V. Adaricheva, W. Dziobiak, A. V. Kravchenko, *Open questions related to the problem of Birkhoff and Maltsev*, Stud. Log., **78**:1–2 (2004), 357–378. MR2108035

[5] V. A. Gorbunov, *Algebraic Theory of Quasivarieties*, New York, Plenum, 1998. MR1654844

[6] M. V. Schwidefsky, A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of subclasses. II*, Internat. J. Algebra Comput., **24**:8 (2014), 1099–1126. MR3296358

[7] M. V. Schwidefsky, *On the complexity of quasivariety lattices*, Algebra and Logic, **54**:3 (2015), 381–398. Zbl 1339.08005

[8] A. I. Maltsev, *Algebraic Systems*, New York, Springer-Verlag, 1973. MR0349384

[9] M. V. Semenova, F. Wehrung, *Sublattices of lattices of order-convex sets. II. Posets of finite height*, Internat. J. Algebra Comput., **13**:5 (2003), 543–564. MR2027222

[10] M. E. Adams, W. Dziobiak, *Q-universal quasivarieties of algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **120**:4 (1994), 1053–1059. MR1172942

[11] M. E. Adams, W. Dziobiak, *Finite-to-finite universal quasivarieties are Q-universal*, Algebra Universalis, **46**1–2 (2001), 253–283. MR1835799

[12] M. V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, *On lattices of subclasses*, Siberian Math. J., **53**:5 (2012), 1111–1132. MR3057931

Svetlana Mihailovna Lutsak
The L.N. Gumilyov Eurasian National University
Satpaev str. 2
010000, Astana, Kazahstan
E-mail address: sveta_lutsak@mail.ru