S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 14, стр. 937–945 (2017)* УДК 512.5
DOI 10.17377/semi.2017.14.079 MSC 20E10 20E10

# О ГРУППАХ, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫМИ В КАЖДОМ КВАЗИМНОГООБРАЗИИ ГРУПП

А.И. БУДКИН

Abstract. We continue to study quasivarieties of groups closed under direct Z-wreath products. We show that such quasivarieties contain finitely generated groups which are not finitely defined in every quasivariety of groups. We establish the existence of continuum many finitely generated groups every of which is not finitely defined in each quasivariety of groups. We construct the group which is finitely defined in the class of all torsion-free groups and is not finitely defined in the class of all groups.

**Keywords:** group, finitely defined group, quasivariety, wreath product.

## 1. Введение

Будем говорить, что квазимногообразие $\mathcal{M}$ замкнуто относительно прямых $Z$-сплетений, если для любой группы $A \in \mathcal{M}$ её прямое сплетение $A \wr Z$ с бесконечной циклической группой $Z$ тоже принадлежит $\mathcal{M}$.

Толчком к исследованию квазимногообразий групп, замкнутых относительно прямых $Z$-сплетений, послужило то, что многие квазимногообразия (например, квазимногообразия всех $RN-$, $RI-$, $Z-$групп [1, 2], квазимногообразие линейно упорядочиваемых групп [3], квазимногообразие, порожденное всеми конечными группами [4]) являются таковыми. Затем [4, 5] было установлено, что квазимногообразия, замкнутые относительно прямых $Z$-сплетений обладают рядом интересных свойств. Например, в этих квазимногообразиях справедлив аналог известной теоремы вложения Б. Нейманна и Х. Нейманн

Budkin, A.I., On groups which are not finitely defined in every quasivariety of groups.



*Поступила 6 июня 2017 г., опубликована 15 сентября 2017 г.*

[6] счетной группы в конечно-порожденную группу; каждое из этих квазимногообразий порождается некоторой 2-порожденной группой [5]. В дальнейшем рассматриваемые квазимногообразия нашли применение при исследовании аксиоматических рангов и независимых базисов квазитождеств [7].

В данной работе продолжается изучение квазимногообразий, замкнутых относительно прямых $Z$-сплетений. Доказано существование в них конечно-порожденных групп $G$, которые не являются конечно определенными, во всех квазимногообразиях, содержащих $G$. Установлено существование континуального множества конечно порожденных групп, каждая из которых не является конечно определённой ни в каком квазимногообразии, её содержащем. Также мы строим конечно определённую в классе групп без кручения группу, не являющуюся конечно определенной в классе всех групп. Этот пример дает положительное решение проблемы Белеградека из Коуровской тетради ([8], вопрос 18.17).

## 2. Предварительные сведения

Напомним определение прямого сплетения двух групп $A$ и $B$. Возьмем прямую степень $\overline{A}$ группы $A$, состоящую из всех функций $f : B \to A$ с конечным носителем. Для каждого $b \in B$ определим отображение $\beta : f \to f^b$ по правилу: $f^b(y) = f(yb^{-1})$ для всех $y \in B$. Отображение $\beta$ является автоморфизмом группы $\overline{A}$, и множество всех таких автоморфизмов есть группа, изоморфная $B$. Расширение группы $\overline{A}$ при помощи этой группы автоморфизмов называется прямым сплетением групп $A$ и $B$ и обозначается $A \wr B$. Группа $\overline{A}$ называется базисной подгруппой сплетения. Подгруппу $\{f \mid f(x) = 1 \text{ при } x \neq 1\}$ сплетения $A \wr B$, изоморфную $A$, условимся обозначать через $\dot{A}$. Для $a \in A$ $\dot{a}$ — это элемент из $\overline{A}$ такой, что $\dot{a}(1) = a$ и $\dot{a}(x) = 1$ при каждом $x \neq 1$.

Всюду в работе $Z$ — бесконечная циклическая группа, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Как обычно, $q\mathcal{R}$ — квазимногообразие, порождённое классом $\mathcal{R}$ групп (пишем $qG$, если $\mathcal{R} = \{G\}$).

Группу, порожденную множеством $S$, обозначим через $gr(S)$. Если $S = \{x\}$, то вместо $gr(S)$ пишем $(x)$.

Будем говорить, что группа $H$ вложима в группу $G$, если группа $H$ изоморфна некоторой подгруппе группы $G$.

Любую нормальную подгруппу $N$ группы $G$, фактор группа $G/N$ по которой содержится в данном квазимногообразии $\mathcal{M}$, называем $\mathcal{M}$-подгруппой. Пусть $F$ — абсолютно свободная группа. Группа $F/N$ называется конечно определённой в квазимногообразии $\mathcal{M}$, если $F/N \in \mathcal{M}$ и $N$ (как $\mathcal{M}$-подгруппа) порождается конечным множеством элементов.

Элементы фильтрованного произведения $\prod\limits_{i\in I} G_i/D$ будем обозначать через $gD$, где $g$ — элемент декартова произведения $\overline{\prod\limits_{i\in I}} G_i$. Будем пользоваться следующим хорошо известным фактом: $gD = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\{i \in I \mid g(i) = 1\} \in D$ .

Отметим очевидный факт: *группа $G$ не является конечно определённой ни в каком квазимногообразии, её содержащем, тогда и только тогда, когда $G$ не конечно определена в $qG$.*

## 3. Основные результаты

**Лемма 1.** *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие групп, $G$ — конечно-порожденная группа из $\mathcal{M}$. Предположим, что $G$ содержит бесконечную строго возрастающую цепочку нормальных подгрупп $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots$ такую, что $G/N_i \in \mathcal{M}$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Пусть $R = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i$. Тогда группа $G/R$ не является конечно определенной в $\mathcal{M}$. Более того, если $\mathcal{M} = qG$, то группа $G \times G/R$ не является конечно определенной ни в каком квазимногообразии, содержащем $G \times G/R$.*

*Доказательство.* Считаем, что $G = F/A$, где $F$ — свободная группа конечного ранга, $\varphi : F \to F/A$ — естественный гомоморфизм. Пусть $A_i = \varphi^{-1}(N_i)$ — полный прообраз подгруппы $N_i$ группы $G$. Имеем следующую бесконечную строго возрастающую цепочку нормальных подгрупп группы $F$: $A \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$. Так как

$$F/A_i \cong (F/A)/(A_i/A) \cong G/N_i \in \mathcal{M},$$

то $A_i$ — $\mathcal{M}$-подгруппа. Известно ([9], следствие 1.4.11; [10], лемма 2.6.19), что объединение возрастающей последовательности $\mathcal{M}$-подгрупп снова $\mathcal{M}$-подгруппа. Пусть $T = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. $T$ — $\mathcal{M}$-подгруппа, т.е. $F/T \in \mathcal{M}$. Поскольку все $A_i$ – $\mathcal{M}$-подгруппы, то $T$ (как $\mathcal{M}$-подгруппа) не порождается конечным множеством элементов, значит, $F/T$ не является конечно определённой в $\mathcal{M}$. Так как

$$F/T \cong (F/A)/(T/A) \cong G/R,$$

то группа $G/R$ не является конечно определённой в $\mathcal{M}$.

Если $\mathcal{M} = qG$, то $G/R \in qG$, следовательно, $q(G \times G/R) = qG$. На $R$ можно смотреть как на объединение бесконечной возрастающей цепочки $\mathcal{M}$-подгрупп группы $G \times G$. Из доказанного следует, что $G \times G/R$ не является конечно определённой в $qG = q(G \times G/R)$. $\square$

**Теорема 1.** *Всякое квазимногообразие $\mathcal{M}$ групп, замкнутое относительно прямых $Z$-сплетений, содержит конечно-порожденную разрешимую класса 3 группу, не являющуюся конечно определённой в каждом квазимногообразии групп, ее содержащем.*

*Доказательство.* Пусть $F_i = (f_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ — бесконечные циклические группы, $F = \prod_{i\in\mathbb{N}} F_i$ — их прямое произведение, $B = F \wr (b)$ — прямое сплетение группы $F$ и бесконечной циклической группы $(b)$. Обозначение: $a_i = \dot{f}_i$.

Поскольку $Z \in \mathcal{M}$, то и $B \in \mathcal{M}$.

Рассмотрим отображение $\alpha : F \to B$, при котором $\alpha(f_i) = [a_i, b]$ $(i \in \mathbb{N})$. Нетрудно увидеть, что $\alpha$ продолжаемо до вложения группы $F$ в группу $B$, которое будем снова обозначать через $\alpha$. Пусть

$$A = gr([a_i, b] \mid i \in \mathbb{N}).$$

Вложим группу $A$ в 3-порожденную группу из $\mathcal{M}$, как это делалось в [4].

Возьмём группу $P = B \wr (C \times Z)$, где $C = (c)$, $Z = (z)$ — бесконечные циклические группы.

В [11] доказано, что если $\mathcal{F}$ — ультрафильтр над $I$, то существует вложение группы $H \wr (\prod\limits_{i\in I} H_i/\mathcal{F})$ в группу $\prod\limits_{i\in I}(H \wr H_i)/\mathcal{F}$. Несложно заметить, что отображение $x \to \tilde{u}\mathcal{F},\ y \to \tilde{v}\mathcal{F}$, где $\tilde{u}(n) = t$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{v}(n) = t^n$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, продолжаемо до вложения прямого произведения $(x)\times(y)$ бесконечных циклических групп $(x)$ и $(y)$ в ультрастепень бесконечной циклической группы $(t)$ по неглавному ультрафильтру $\mathcal{F}$ над $\mathbb{N}$. Отсюда получаем, что $P \in \mathcal{M}$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим элемент $s_n \in \overline{B}$ такой, что

$$s_n(c^{-2i+1}) = a_i,\ s_n(z^{-2i+1}) = b$$

при $0 < 2i-1 < 2n$; $s_n(y) = 1$ для остальных элементов $y \in C \times Z$. Пусть

$$g_i = [c^{-2i+1}s_n c^{2i-1}, z^{-2i+1}s_n z^{2i-1}] \in P,\ i = 1,\dots,n.$$

Легко проверяется, что для каждого $y \in C \times Z$

$$g_i(y) = s_n^{-1}(yc^{-2i+1})s_n^{-1}(zc^{-2i+1})s_n(yc^{-2i+1})s_n(yz^{-2i+1}).$$

Отсюда вытекает, что при $i = 1,\dots,n$ справедливы равенства:

$$g_i(1) = [a_i, b] = \alpha(f_i),$$

$$g_i(y) = 1,\ \text{при } y \neq 1,\ y \in C \times Z.$$

В частности, мы видим, что при каждом $n$ $(n \geq i)$ у нас возникает один и тот же элемент $g_i$ и $g_i = [\dot{a}_i, \dot{b}]$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Из вышесказанного следует, что отображение $\beta_n : gr(\alpha(f_1),\dots,\alpha(f_n)) \to P$, при котором $\beta_n(\alpha(f_i)) = g_i$, является вложением. Таким образом, мы построили вложение $\gamma_n = \beta_n\alpha$ $n$-порождённой подгруппы $gr(f_1,\dots,f_n)$ группы $F$ в группу $G_n = gr(s_n, c, z)$.

Пусть $D$ — произвольный неглавный ультрафильтр над $\mathbb{N}$, $G = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n/D$ — ультрапроизведение. Определим элементы $\check{s}, \check{c}, \check{z} \in \bar{\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}} G_n$ следующим образом:

$$\check{s}(n) = s_n,\ \check{c}(n) = c,\ \check{z}(n) = z.$$

Рассмотрим отображение $\delta : F \to G$ такое, что $\delta(f_i) = t_i D$ $(i \in \mathbb{N})$, где $t_i \in \bar{\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}} G_n$; $t_i(n) = g_i$ при $i \leq n$ и $t_i(n) = 1$ при $i > n$. Из того, что все $\gamma_n$ — вложения, несложно вытекает, что $\delta : F \to \breve{G} = gr(\check{s}D, \check{c}D, \check{z}D)$ — также вложение. Отметим ещё, поскольку квазимногообразие $\mathcal{M}$ замкнуто относительно взятия ультрапроизведений и подгрупп, то $\breve{G} \in \mathcal{M}$.

Существует известный способ ([12], теорема 22.11) продолжения любого гомоморфизма $\mu : U \to U^*$ произвольных групп $U$ и $U^*$ до гомоморфизма $\mu^* : U \wr W \to U^* \wr W$ сплетений. Причём, если даны два гомоморфизма $\mu_1, \mu_2 : U \to U^*$ и $\ker\mu_1 \subseteq \ker\mu_2$, то $\ker\mu_1^* \subseteq \ker\mu_2^*$. Воспользуемся этим способом для построения нужных гомоморфизмов.

Гомоморфизм $\varphi_n : F \to F$ определяем так:

$$\varphi_n(f_i) = 1 \text{ при } i \leq n,\ \varphi_n(f_{i+1}) = f_i \text{ при } i \geq n.$$

Гомоморфизм $\psi_n : B \to B$ задаём следующим образом:

$$\psi_n(\dot{f}_i) = 1 \text{ при } i \leq n,\ \psi_n(\dot{f}_{i+1}) = \dot{f}_i \text{ при } i \geq n,\ \psi_n(b) = b.$$

Ясно, что $\ker\psi_n|_A = gr([\dot{f}_1, b], \dots, [\dot{f}_n, b])$. Далее по $\psi_n$ строим гомоморфизм $\chi_n : P \to P$, полагая

$$\chi_n(\dot{y}) = \dot{\psi_n(y)} \text{ при } y \in B,\ \chi_n(c) = c, \chi_n(z) = z.$$

В частности,

$\chi_n(\dot{a}_i) = 1$ при $i \leq n$, $\chi_n(\dot{a}_{i+1}) = \dot{a}_i$ при $i \geq n$, $\chi_n(\dot{b}) = \dot{b}$.

Видим, что

$[\dot{a}_i, \dot{b}] \in \ker\chi_n$ при $i \leq n$, $[\dot{a}_i, \dot{b}] \notin \ker\chi_n$ при $i > n$.

Как было отмечено, $g_i = [\dot{a}_i, \dot{b}]$. Отсюда получаем, что

$$g_i \in \ker\chi_n \text{ при } i \leq n,\ g_i \notin \ker\chi_n \text{ при } i > n.$$

Следовательно, $\ker\chi_1 \subset \ker\chi_2 \subset \ker\chi_3 \subset \dots$

Пусть $P_n$ $(n \in \mathbb{N})$ — группа, изоморфная $P$, $\chi_n$ рассматриваем как гомоморфизм каждой группы $P_j$ в группу $P_j$ (т.е. $\chi_n : P_j \to P_j$). Возникает отображение $\xi_n : G \to \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} P_n/D$, определенное следующим образом:

$$\xi_n(gD) = \tilde{g}D, \text{ где } \tilde{g}(m) = \chi_n(g(m)) \text{ при каждом } m \in \mathbb{N},\ g \in \overline{\prod_{n\in\mathbb{N}}} G_n.$$

Хорошо известно (см., например, [13], §8.2, теорема 4), что это отображение является гомоморфизмом. Обозначим через $\breve{\xi}_n$ — ограничение $\xi_n$ на $\breve{G}$. Так как $gD \in \ker\xi_n$ тогда и только тогда, когда $\{m \in \mathbb{N} \mid \tilde{g}(m) \in \ker\chi_n\} \in D$, то имеем: $\ker\breve{\xi}_1 \subseteq \ker\breve{\xi}_2 \subseteq \ker\breve{\xi}_3 \subseteq \dots$.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ определим элемент $r_i \in \overline{\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}} G_n$ следующим образом:

$$r_i(m) = g_i \text{ при } i \leq m,$$

$$r_i(m) = 1 \text{ при } i > m.$$

Зафиксируем $n$. Пусть $i \leq n$. Тогда

$$\tilde{r}_i(m) = \chi_n(r_i(m)) = \begin{cases} \chi_n(g_i) & \text{при } i \leq m, \\ 1 & \text{при } i > m. \end{cases}$$

Следовательно, в этом случае, $\tilde{r}_i(m) = 1$ при каждом $m \geq n$. Отсюда

$$\{m \in \mathbb{N} \mid \tilde{r}_i(m) = 1\} \supseteq \{m \mid m \geq n\},$$

поэтому $\{m \in \mathbb{N} \mid \tilde{r}_i(m) = 1\} \in D$, т.е. $\tilde{r}_1 D = 1, \dots, \tilde{r}_n D = 1$, откуда

$$r_1 D, r_2 D, \dots, r_n D \in \ker\breve{\xi}_n.$$

При $i > n$ и $m > i$ имеем: $\tilde{r}_i(m) = g_i \neq 1$. Значит, для каждого $i > n$

$$\{m \in \mathbb{N} \mid \tilde{r}_i(m) \neq 1\} \supseteq \{m \mid m \geq i\} \in D,$$

поэтому $\tilde{r}_{n+1} D \neq 1, \tilde{r}_{n+2} D \neq 1, \dots$, т.е. $r_{n+1}D, r_{n+2}D, \dots \notin \ker\breve{\xi}_n$. У нас возникла строго возрастающая цепочка нормальных подгрупп группы $\breve{G}$:

$$\ker\breve{\xi}_1 \subset \ker\breve{\xi}_2 \subset \ker\breve{\xi}_3 \subset \dots$$

таких, что $\breve{G}/\ker\breve{\xi}_n \in \mathcal{M}$ при каждом $n$. Пусть $R = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \ker\breve{\xi}_n$. Тогда по лемме 1 группа $\breve{G} \times \breve{G}/N \in \mathcal{M}$, и она не является конечно определенной в каждом квазимногообразии групп, её содержащем. $\square$

**Теорема 2.** *Существует континуальное множество конечно порождённых групп, каждая из которых не является конечно определенной ни в каком квазимногообразии, её содержащем.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — произвольная конечно-порождённая нехопфова группа, $\varphi : G \to G$ — гомоморфизм группы $G$ на $G$, при котором $\ker\varphi \neq (1)$. Появилась последовательность гомоморфизмов:

$$G \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\varphi} \dots$$

Полагаем:

$$N_1 = \ker\varphi,\ N_2 = \varphi^{-1}(N_1) = \ker\varphi^2,\ N_3 = \varphi^{-1}(N_2) = \ker\varphi^3, \dots$$

Возникла бесконечная строго возрастающая последовательность групп $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots$ такая, что $G/N_i \cong G \in qG$. Пусть $R = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} N_i$. Применим теперь лемму 1, по которой группа $G \times G/R$ не является конечно определённой ни в каком квазимногообразии, содержащем $G \times G/R$. Известно [14], что существует континуум 3-порожденных нехопфовых групп, порождающих попарно различные многообразия групп. Отсюда получаем требуемое. □

Доказательство теоремы 2 указывает способ построения представлений конкретных групп, не являющихся конечно определенными в каждом квазимногообразии, их содержащем. В качестве примера стартуем со следующей нехопфовой группы Баумслага-Солитера ([15], §4.4):

$$G = gr(b, t \| b^{-3}t^{-1}b^2t = 1).$$

В [15] показано, что существует изоморфизм

$$\psi : G \to H = gr(b, t \| b^{-3}t^{-1}b^2t = 1, b^{-1}[b,t]^2 = 1)$$

группы $G$ на группу $H$, при котором $\psi(t) = t, \psi(b) = [b,t]$ и $b^{-1}[b,t]^2 \neq 1$ в $G$. Обозначение: $N_1 = (b^{-1}[b,t]^2)^G$ — нормальное замыкание элемента $b^{-1}[b,t]^2$ в $G$. Из вышесказанного следует, что $N_1 \neq (1)$.

Пусть $N_i = (N_{i-1}, [b, \underbrace{t,\dots,t}_{i-1}]^{-1}[b, \underbrace{t,\dots,t}_{i}]^2)^G$ — нормальное замыкание множества $\{N_{i-1}, [b, \underbrace{t,\dots,t}_{i-1}]^{-1}[b, \underbrace{t,\dots,t}_{i}]^2\}$ в $G$. Элементы $tN_i, bN_i$ группы $G/N_i$ будем снова обозначать через $t, b$, соответственно. По индукции существует изоморфизм $\psi_i : G \to G/N_i$, при котором $\psi_i(t) = t, \psi_i(b) = [b, \underbrace{t,\dots,t}_{i}]$.

Теперь, стартуя с порождающих $\psi_i(t), \psi_i(b)$, по аналогии с $N_1$ строим группу $R_1 = (\psi_i(b)^{-1}[\psi_i(b), \psi_i(t)]^2)^{\psi_i(G)} \neq (1)$ и изоморфизм $\chi : \psi_i(G) \to \psi_i(G)/R_1$, при котором $\chi(t) = t, \chi(\psi_i(b)) = [\psi_i(b), t]$. Легко заметить, что если $\overline{N}_{i+1}$ является полным прообразом группы $R_1$ при $\psi_i$, то $\psi_{i+1} = \chi\psi_i$ и $N_{i+1} = N_i\overline{N}_{i+1}$.

Пусть $R = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} N_n$. Теперь несложно выписать представление группы $G \times G/R$, которая в силу доказательства теоремы 2 не конечно определена в $q(G \times G/R)$. Получили

**Следствие 1.** *Группа $H$, заданная порождающими $x, y, b, t$ и определяющими соотношениями*

$$y^{-1}x^2y = x^3, [x,b] = 1, [x,t] = 1, [y,b] = 1, [y,t] = 1,$$

$$b^{-1}[b,t]^2 = 1, \dots, [b, \underbrace{t, \dots, t}_{i-1}]^{-1}[b, \underbrace{t, \dots, t}_{i}]^2 = 1, \dots,$$

*не является конечно определённой в каждом квазимногообразии, её содержащем.*

Заметим следующее. Пусть $\mathcal{N}$ — наименьшее квазимногообразие, замкнутое относительно прямых $Z$-сплетений. Как было уже отмечено во введении, $\mathcal{N}$ содержится в квазимногообразии, порожденном всеми конечными группами. Хорошо известно ([16], теорема 3, либо [10], теорема 2.3.9), что всякая конечно определённая группа из квазимногообразия, порождённого конечными группами, финитно аппроксимируема. Группа Баумслага-Солитера $G$ не является финитно аппроксимируемой, поэтому она и, следовательно, группа $H$ из следствия 1, не принадлежат наименьшему квазимногообразию $\mathcal{N}$, замкнутому относительно прямых $Z$-сплетений.

О. В. Белеградек в Коуровской тетради поставил проблему [8] (вопрос 18.17): *Существует ли группа без кручения, которая конечно определима в квазимногообрзии групп без кручения, но не конечно определима в многообразии всех групп?* Следующая теорема является положительным решением этой проблемы Белеградека.

**Теорема 3.** *Существует группа без кручения $G$, которая конечно определима в квазимногообразии групп без кручения, но не конечно определима в многообразии всех групп. Кроме того, $G$ не принадлежит наименьшему квазимногообразию $\mathcal{N}$ групп, замкнутому относительно прямых $Z$-сплетений.*

*Доказательство.* Пусть $A$ — группа, состоящая из треугольных матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ над кольцом $\mathbb{Q}_p$ $p$-ичных дробей с положительными диагональными элементами. Центр $Z(A)$ группы $A$ состоит из матриц с единственной звёздочкой в правом верхнем углу, следовательно, изоморфен аддитивной группе $\mathbb{Q}_p$. Пусть $G = A/Z(A)$. Ясно, что $G$ — группа без кручения. По лемме 1 группа $G$ не является конечно определенной в классе всех групп (этот факт ранее уже встречался в литературе). Абелс [17] (см. также [1] 19.1.9) показал, что группа $A$ является конечно определенной в классе всех групп. Им доказано, что группа $A$ порождается диагональными матрицами $d_2 = diag(1,p,1,1), d_2 = diag(1,1,p,1)$ и трансвекциями $t_{ij}, i < j$. В этих порождающих группа $A$ задается следующими определяющими соотношениями:

$$[d_2, d_3] = 1,\ [t_{ij}, t_{jl}] = t_{il},\ [t_{ij}, t_{kl}] = 1 \text{ при } j \neq k,$$
$$t^p_{i,i+1} d_i = d_i t_{i,i+1},\ t_{j-1,j} d_j = d_j t^p_{j-1,j},\ t_{i,i+1} d_j = d_j t_{i,i+1} \text{ при } i \neq j, i+1 \neq j.$$

Добавим к этим соотношениям равенство $t_{14} = 1$. Поскольку $Z(A)/(t_{14})$ — периодическая группа, то выписанное множество порождающих и определяющих соотношений в классе групп без кручения задаёт группу $G$. Итак, $G$ — искомая группа.

Покажем теперь, что $G \notin \mathcal{N}$. Заметим сначала, что в [4] (следствие 5) показано, что если $\mathcal{R}$ — произвольный класс групп,

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{R},\ \mathcal{N}_{i+1} = \{M \wr N \mid M, N \in \mathcal{N}_i\}\ (i = 1, 2, \dots),\ \mathcal{L} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_i,$$

то наименьшее квазимногообразие, замкнутое относительно прямых сплетений, совпадает с $q\mathcal{L}$. Ещё, при доказательстве теоремы 2 [18] установлено, что если квазитождество

$$\Phi = (\forall x, y)(x^{-1}yx = x^{n^2} \to y = 1)$$

($n$ — фиксированное натуральное число, $n \geq 2$) истинно в группах $A$ и $B$ без кручения, то $\Phi$ истинно в группе $A \wr B$. Из вышесказанного следует, что $\Phi$ истинно в каждой группе из $\mathcal{N}$.

В группе $G$ имеем: $d_1^2 t_{12} d_1^{-2} = t_{12}^{p^2}$, $t_{12} \neq 1$, значит $\Phi$ ложно в $G$. Таким образом, показано, что $G \notin \mathcal{N}$. □

Фактически нами доказано следующее

**Следствие 2.** *Группа $G$ из теоремы 3 является конечно определённой в конечно аксиоматизируемом квазимногообразии, заданном квазитождеством* $(\forall x)(x^p = 1 \to x = 1)$.

**Замечание**. В [17] рассматриваются и другие конечно определённые группы, центры которых не являются конечно порожденными. Отметим, что по ним точно так же, как и при доказательстве теоремы 3, можно построить группы, которые не являются конечно определёнными в классе всех групп, но конечно определены в классе групп без кручения.

## References

[1] M.I. Kargapolov, J.I. Merzljakov, *Fundamentals of the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1979. MR0551207

[2] C.R. Combrink, E.E. Dean, *Z-group wreath products*, Czechosl. Math. J., **33**:1 (1983), 34–36. MR0687414

[3] V.M. Kopytov, *Lattice-ordered groups*, Moscow, Nauka, 1984. MR0806956

[4] A.I. Budkin, *Quasivarieties of groups closed with respect to restricted wreath products*, Math. USSR-Sb., **49** (1984), 503—514. Zbl 0545.20016

[5] A.I. Budkin, *Quasivarieties of groups closed under wreath products and wreath Z-products*, Algebra and Logic, **38** (1999), 137–143. MR1766729

[6] B.H. Neumann, H. Neumann, *Embedding theorems for groups*, J. London Math. Soc., **34**, (1959), 465–479. MR0163968

[7] A. I. Budkin, *Q-theories of 2-generated groups with given axiomatic rank*, Algebra and Logic, **28** (1989), 341—348. MR1087569

[8] *Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook*, 18th edn (Eds. V.D. Mazurov and E.I. Khukhro), Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics, 2014.

[9] V.A. Gorbunov, *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Siberian School of Algebra and Logic, Consultants Bureau, 1998. MR1654844

[10] A.I. Budkin, *Quasivarieties of groups*, Altai State University, Barnaul, 2002.

[11] R.M. Bryant, J.R.J. Groves, *Wreath products and ultraproducts of groups*, Quart. J. Math. Oxford, **29** (1978), 301–308. MR0509696

[12] H. Neumann, *Varietis of Groups*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

[13] A.I.Malcev, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, 1973. MR0349384

[14] V.H. Mikaelian, *On finitely generated soluble non-Hopfian groups*, Journal of Mathematical Sciences **166** (2010), 743—755. Zbl 1288.20035

[15] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory*, Wiley, New York, 2nd Ed. Dover, New York, 1976. MR0422434

[16] A.I. Budkin, V.A. Gorbunov, *Quasivarieties of algebraic systems*, Algebra and Logic, **14** (1975), 73–84. MR0396373

[17] H. Abels, *An example of a finitely presented solvable group*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **36** (1979), 205–211. MR0564423

[18] A.I. Budkin, *Quasi-identities and direct wreath products of groups*, Algebra and Logic, **23**:4 (1984), 253—264. MR0781245

Aleksandr Ivanovich Budkin
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
*E-mail address*: budkin@math.asu.ru