S⓪MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 946–971 (2017) УДК 512.55

DOI 10.17377/semi.2017.14.080 MSC 16Y60

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУКОЛЕЦ

В.В. ЧЕРМНЫХ, О.В. ЧЕРМНЫХ

Abstract. The paper is devoted to lattice–ordered semirings (*drl*-semirings) and their representations by sections of sheaves. We build two sheaves of *drl*-semirings. The first sheaf construction is generalization of Keimel sheaf of *l*-rings, the second sheaf is analogy of Lambek sheaf of abstract semirings. The classes of Gelfand, Rickart, biregular and strongly regular *f*-semirings are investigated in this paper. The main aim is to study sheaf representations of such algebras.

Keywords: lattice–ordered semiring, functional semiring, sheaf representation.

Введение

В предлагаемой статье основным объектом изучения является решеточно упорядоченное полукольцо, называемое нами *drl*-полукольцом. Появление таких алгебр тесно связано с двумя проблемами. Это 115 проблема Г. Биркгофа [1]: построить общую абстрактную конструкцию, которая как частные случаи включала бы в себя булевы алгебры (кольца) и решеточно упорядоченные группы. И 37 проблема Л. Фукса [2] описания решеточно упорядоченных полуколец. Их частичными решениями можно считать построение теорий *drl*-полугрупп и *drl*-полуколец. В [3] дан исторический обзор подходов к решению проблемы Биркгофа.

Поскольку такие алгебры как полугруппа или упорядоченная полугруппа недостаточно богаты для получения содержательных структурных теорем, при их изучении накладываются дополнительные условия. Полугруппы, решетки и

Chermnykh, V.V., Chermnykh, O.V., Functional representations of lattice–ordered semirings.

Поступила 8 февраля 2017 г., опубликована 22 сентября 2017 г.

полурешетки с делением явились основными источниками появления *drl*-полугрупп. Определение *drl*-полугруппы (dually residuated lattice ordered semigroup) было дано К. Л. Н. Свами в работах [4],[5], после которых появилась серия статей о *drl*-полугруппах [6]–[9], и др.

В 1981 г. Ранга Рао [10] объявил о решении проблемы Л. Фукса, представив под названием «*l*-полукольцо» решеточно упорядоченное полукольцо, определение которого основывалось на *drl*-полугруппе. Мы используем для этой алгебры термин *drl*-полукольца, оставляя название *l*-полукольца для более широкого класса.

drl-Полукольцо оказалось удачным объектом в смысле применимости к его изучению функциональных (пучковых) методов. Пучок был открыт в 1945 г. Ж. Лере, а начало представлений алгебр сечениями пучков идет с 1960 г. от работы [11]. Именно, А. Гротендик показал, что произвольное коммутативное кольцо R с единицей изоморфно кольцу всех глобальных сечений пучка локализаций кольца R по всем его простым идеалам. После этого пучковые представления активно использовались сначала для колец (Даунс, Гофманн, Ламбек, Пирс, Малви, Кох, Симмонс и др.), а с рубежа 70-х г.г. при исследовании дистрибутивных решеток, почти-колец, MV-алгебр, некоторых других типов универсальных алгебр. С 90-х г.г. идет развитие теории функциональных представлений полуколец [12]–[14], а позже — полутел [15].

В 1971 г. появилась фундаментальная статья К. Креймеля [16], посвященная представлениям решеточно упорядоченных колец. В этой работе для произвольного *l*-кольца строится пучок, названный автором пучком ростков. Даются представления, а в некоторых случаях и характеризации, различных *l*-колец. Наиболее удачные представления получаются для функциональных колец — это решеточно упорядоченные кольца, являющиеся подпрямым произведением линейно упорядоченных колец. Кроме цитированной статьи Кеймеля нам известны еще несколько работ [17], [18], посвященных представлениям *l*-колец.

В нашей работе предпринимается следующее. Для произвольного *drl*-полукольца S строится пучок $(\Pi(S), \operatorname{Irr} S)$ *drl*-полуколец на пространстве $\operatorname{Irr} S$ неприводимых *l*-идеалов из S со стоуновской топологией (на самом деле, несколько более общая конструкция). В теореме 1 осуществляется реализация элементов из S сечениями этого пучка. Указанная конструкция и представление обобщают результаты К. Кеймеля [16, theorem 3.1, theorem 3.7, corollary 3.11]. Пучок Кеймеля и его полукольцевое обобщение похожи на известную конструкцию пучка ростков непрерывных функций. Но на наш взгляд, не всегда понятно строение слоев этих пучков. По этой причине авторам более удобно работать с пучком $(L(S), \operatorname{Irr} S)$, определяемым для произвольного функционального полукольца. Эта конструкция ближе к пучку колец И. Ламбека [19] и его полукольцевому аналогу [13].

В классе функциональных полуколец (*f*-полуколец) определяется гельфандово *f*-полукольцо, аналог гельфандовых и строго гармонических полуколец в абстрактной теории полуколец (и колец). В теореме 2 устанавливается, что гельфандово *f*-полукольцо S с единицей изоморфно *f*-полукольцу всех глобальных сечений пучка $(L(S), \operatorname{Max} S)$. Слои этого пучка являются *f*-полукольцами с единственным максимальным *l*-идеалом, а максимальный спектр $\operatorname{Max} S$ — хаусдорфово компактное пространство.

Далее в классе f-полуколец определяются риккартовы, бирегулярные и строго регулярные f-полукольца, для которых рассматриваются представления сечениями пучка $L(S)$ на пространстве минимальных неприводимых l-идеалов (теоремы 3, 4 и 5). Слоями для указанных f-полуколец будут линейно упорядоченные f-полукольца, l-простые f-полукольца и f-полутела соответственно, а накрывающие пространства в каждом случае будут хаусдорфовыми. Для этих f-полуколец доказаны также утверждения, обратные к теоремам об их пучковых представлениях. Характеризации риккартовых и бирегулярных f-полуколец обобщают результаты К. Кеймеля для f-колец [16, theorem 6.12, theorem 7.4]; соответствующие алгебры названы Кеймелем проективными и квазирегулярными f-кольцами.

1. Начальные понятия о *drl*-полукольцах и пучковых представлениях

Под *полукольцом* будем понимать систему $(S, +, \cdot, 0)$, которая является коммутативной полугруппой с нулем относительно сложения, полугруппой относительно умножения и умножение дистрибутивно справа и слева относительно сложения. В общем, не предполагается наличие единицы (ср. с определением Дж. Голана [20]). Заметим, что мультипликативность нуля (справедливость тождества $a0 = 0 = 0a$), часто постулируемая для полуколец, будет простым следствием определения *drl*-полукольца.

Определение 1. [10] *Алгебра* $(S, +, \cdot, \vee, \wedge, -, 0)$ *называется drl-полукольцом, если выполняются условия:*

(1) $(S, +, \cdot, 0)$ — *полукольцо;*
(2) $(S, \vee, \wedge)$ — *решетка (с порядком* $\leq$*);*
(3) *сложение* $+$ *дистрибутивно относительно* $\vee$ *и* $\wedge$*;*
(4) $a - b$ — *наименьший элемент* z *такой, что* $b + z \geq a$*;*
(5) $(a - b) \vee 0 + b \leq a \vee b$ *для любых* $a, b \in S$*;*
(6) $a(b - c) = ab - ac$ *и* $(a - b)c = ac - bc$ *для любых* $a, b, c \in S$*;*
(7) $ab \geq 0$ *для любых* $a, b \geq 0$ *из* S.

Если не использовать аксиомы, в которых задействовано умножение, то получим определение *drl*-полугруппы, введенной в обиход К. Л. Н. Свами [4]. Первоначально определение *drl*-полугруппы содержало условие $a - a \geq 0$, вытекающее из остальных аксиом [7].

Класс всех *drl*-полуколец является многообразием [4, theorem 1].

Отметим основные примеры *drl*-полуколец (также см. [9]). Это l-кольцо с обычной кольцевой разностью; брауэрова алгебра, в частности булева алгебра. Полукольцо целых неотрицательных чисел с обычными сложением, умножением и отношением порядка становится *drl*-полукольцом, если определить $a - b = 0$ в случае $a \leq b$, и как обычную разность целых чисел в противном случае. Таким же образом получаем *drl*-полукольца на множестве $\mathbb{R}^+$ неотрицательных действительных чисел и его подполукольцах. Любая *drl*-полугруппа с нулевым умножением является *drl*-полукольцом. Наконец, скажем о кольце и полукольце непрерывных функций $C(X)$ и $C^+(X)$ на топологическом пространстве X.

Обозначим через $S^+ = \{s \in S : s \geq 0\}$ множество всех *положительных* элементов *drl*-полукольца S.

Элементы $a^+ = a \vee 0$ и $a^- = a \wedge 0$ называются *положительной* и *отрицательной частями элемента* a. Для любого элемента *drl*-полукольца выполняется $a = a^+ + a^-$.

Важную роль при работе с *drl*-полукольцами, в частности при факторизации *drl*-полуколец, играет *симметрическая разность*, определяемая как операция

$$a * b = (a - b) \vee (b - a).$$

По [4, lemma 11] $a * b = (a-b) \vee (b-a) = a \vee b - a \wedge b$, следовательно, для любого $a \in S$ справедливо равенство $a * 0 = a^+ - a^-$. Обозначим *модуль элемента* a через $|a| = a * 0$.

Гомоморфизм *drl*-полуколец, конгруэнция на *drl*-полукольце определяются обычным образом. Ясно, что любой гомоморфизм *drl*-полукольца является изотонным отображением, сохраняет симметрическую разность и ноль. Описание конгруэнций на *drl*-полукольце приводит к понятию *l*-идеала.

Определение 2. *Непустое подмножество A drl-полукольца S называется l-идеалом, если выполняются следующие условия:*

(1) *если $a, b \in A$, то $a + b \in A$;*

(2) *если $a \in A, s \in S$, то $as, sa \in A$;*

(3) *если $|b| \leq |a|, a \in A$, то $b \in A$.*

Несложно показать, что *l*-идеал замкнут относительно всех операций *drl*-полукольца и одновременно является полукольцевым идеалом и выпуклой подрешеткой. Важно, что конгруэнция на *drl*-полукольце в точности определяется своим классом нуля [10, theorem 1.1]. Именно, каждой конгруэнции соответствует *l*-идеал, являющийся классом нуля. Обратно, каждый *l*-идеал A *drl*-полукольца S однозначно определяет конгруэнцию $a \equiv b \pmod{A} \Leftrightarrow a * b \in A$, класс нуля которой совпадает с A, и для равенства двух конгруэнций на S достаточно совпадения их классов нуля.

Для *l*-идеалов A и B *drl*-полукольца S определяется сумма $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, которая является *l*-идеалом [10, remark 1.6]. Понятно, что пересечение *l*-идеалов *drl*-полукольца снова будет *l*-идеалом. Отметим, что сумма и пересечение *l*-идеалов являются точными гранями в решетке *l*-идеалов *drl*-полукольца.

Сейчас укажем свойства, имеющие самостоятельный интерес, а (3) и (4) в дополнение активно используются нами в дальнейшем при пучковых представлениях *drl*-полуколец.

Предложение 1. *Пусть S — drl-полукольцо. Справедливы утверждения:*

(1) $(S, \vee, \wedge)$ — *дистрибутивная решетка;*

(2) *множество всех l-идеалов из S образуют ограниченную дистрибутивную решетку;*

(3) *каждый элемент из S представим в виде разности двух положительных элементов, именно, $a = a^+ - (0 - a^-)$;*

(4) *если $b \in A_1 + \ldots + A_n, A_i$ — l-идеал, и $b \geq 0$, то $b = a_1 \vee \ldots \vee a_n$ для некоторых положительных $a_i \in A_i$.*

Доказательство. (1) [9, предложение 6].

(2) [10, remark 1.8].

(3) При доказательстве мы используем простые свойства *drl*-полугрупп, которые можно найти, например, в [4, lemma 6, lemma 8, lemma 7, lemma 13].

Пусть $a \in S$. Тогда $(a^+ - (0 - a^-)) - a = a^+ - ((0 - a^-) + a) = a^+ - ((0 - a^-) + (a^- + a^+)) = a^+ - (((0 - a^-) + a^-) + a^+) = a^+ - (0 + a^+) = 0$, откуда получаем $a^+ - (0 - a^-) \leq a$. Обратно, $a - (a^+ - (0 - a^-)) \leq (a - a^+) + (0 - a^-) = ((a^- + a^+) - a^+) + (0 - a^-) \leq a^- + (a^+ - a^+) + (0 - a^-) = a^- + (0 - a^-) = 0$, откуда $a \leq a^+ - (0 - a^-)$. Следовательно, $a = a^+ - (0 - a^-)$, и $a^+ \geq 0, 0 - a^- \geq 0$.

(4) Доказательство в точности совпадает с доказательством для l-кольца [16, lemma 1.11]. $\square$

Пусть M — непустое подмножество *drl*-полукольца S. Наименьший l-идеал, содержащий M, называется *l-идеалом, порожденным множеством M*. Обозначим его через (M); понятно, что (M) совпадает с пересечением всех l-идеалов, содержащих множество M. В случае одноэлементного множества $\{a\}$ получаем *главный* l-идеал, который будем обозначать (a).

Лемма 1. *Конечно порожденный l-идеал drl-полукольца S является главным.*

Доказательство. Достаточно показать справедливость утверждения для двухпорожденного l-идеала. Сперва заметим, что элемент a лежит в l-идеале A в точности тогда, когда $|a| \in A$. Пусть $a, b \in S^+$, тогда $0 \leq a, b \leq a \vee b \leq a + b$. В силу выпуклости l-идеала $a, b \in (a \vee b)$ и $a \vee b \in (a + b)$, откуда $(\{a, b\}) \subseteq (a \vee b) \subseteq (a + b) \subseteq (a) + (b) \subseteq (\{a, b\})$. $\square$

Известна роль первичных идеалов и первичного спектра при изучении абстрактных колец и полуколец. При работе с решеточно упорядоченными алгебрами более удобны неприводимые l-идеалы.

Лемма 2. *Для l-идеала P drl-полукольца S равносильны условия:*

(1) *$A \cap B = P$ влечет $A = P$ или $B = P$ для любых l-идеалов A, B;*

(2) *$A \cap B \subseteq P$ влечет $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$ для любых l-идеалов A, B;*

(3) *$(a) \cap (b) \subseteq P$ влечет $(a) \subseteq P$ или $(b) \subseteq P$ для любых $a, b \in S$.*

Доказательство. Импликации (2) $\Rightarrow$ (3) и (3) $\Rightarrow$ (1) очевидны.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $A \cap B \subseteq P$, тогда $P = A \cap B + P = (A + P) \cap (B + P)$ в силу дистрибутивности решетки l-идеалов. Из (1) следует $A + P = P$ или $B + P = P$, что влечет $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$. $\square$

Определение 3. *Собственный l-идеал P drl-полукольца, удовлетворяющий условиям предыдущей леммы, называется неприводимым.*

Лемма 3. *Произвольный собственный l-идеал drl-полукольца есть пересечение всех неприводимых l-идеалов его содержащих; в частности, пересечение всех неприводимых l-идеалов drl-полукольца является нулевым l-идеалом.*

Доказательство. Пусть A — l-идеал и $a \notin A$. Стандартное применение леммы Цорна гарантирует существование максимального l-идеала P среди l-идеалов, содержащих A и не содержащих элемент a. Если l-идеалы B и C не лежат в P, то l-идеалы $P + B$ и $P + C$ содержат элемент a, поэтому $a \in (P + B) \cap (P + C) = P + B \cap C$ в силу дистрибутивности решетки l-идеалов. Получаем, что $B \cap C$ не лежит в P, так как в противном $a \in P$. Следовательно, P неприводим. $\square$

На множестве $\operatorname{Irr} S$ всех неприводимых l-идеалов из S введем стоуновскую топологию. Напомним, что множества вида $D(A) = \{P \in \operatorname{Irr} S : P \not\supseteq A\}$, A — l-идеал, образуют базу открытых множеств в $\operatorname{Irr} S$. В случае $A = (a)$ открытое множество $D(A)$ будем обозначать $D(a)$.

Элемент u, не содержащийся ни в каком собственном l-идеале из S, называется *формальной единицей.* Кроме единицы *drl*-полукольца S формальной единицей будет такой элемент $u \in S$, что для любого $a \in S$ и некоторого натурального n выполняется $a \leq nu$, где nu — сумма из n слагаемых. Так, любой ненулевой элемент *drl*-полукольца $\mathbb{N}$ является формальной единицей.

Лемма 4. *Пусть S — drl-полукольцо.*

(1) *Для любых l-идеалов A и B $D(A) = D(B)$ тогда и только тогда, когда $A = B$.*

(2) *Множество $D(a)$ является компактным в $\operatorname{Irr} S$, и каждое открытое компактное множество в $\operatorname{Irr} S$ имеет вид $D(a)$ для некоторого $a \in S$.*

(3) *Пространство $\operatorname{Irr} S$ компактно тогда и только тогда, когда S содержит формальную единицу.*

Доказательство. (1) Если $D(A) = D(B)$ для l-идеалов A и B, то $\operatorname{Irr} S \setminus D(A) = \operatorname{Irr} S \setminus D(B)$. По лемме 3 получаем $A = B$.

(2) Пусть $D(a) \subseteq \cup D(A_\alpha)$ для l-идеалов A_α. Тогда $a \in A_{\alpha(1)} + \ldots + A_{\alpha(k)}$ для подходящих представителей семейства $\{A_\alpha\}$. Следовательно, $D(a) \subseteq D(A_{\alpha(1)} \cup \ldots \cup A_{\alpha(k)})$. Пусть сейчас U — произвольное открытое компактное в $\operatorname{Irr} S$ множество, $\{U_1, \ldots, U_k\}$ — его подпокрытие. В силу открытости множества U можно считать, что U в точности совпадает с объединением $U_1 \cup \ldots \cup U_k$, а каждое U_i имеющим вид базисного открытого множества $D(a_i)$. Поэтому $U = D(a_1) \cup \ldots \cup D(a_k) = D((a_1) + \ldots + (a_k))$. По лемме 1 $(a_1) + \ldots + (a_k) = (a)$ для подходящего $a \in S$, поэтому $U = D(a)$.

(3) Следует из (2), поскольку $\operatorname{Irr} S$ открыто, и $\operatorname{Irr} S = D(u)$ для любой формальной единицы $u \in S$. □

Пусть α — конгруэнция на алгебре A. Сравнимость элементов a, b из A по отношению α договоримся обозначать через $a \equiv b(\alpha)$. Семейство конгруэнций $\{\alpha_x\}$ на алгебре A, индексированных точками топологического пространства X, называется *открытым*, если множество $\{x \in X : a \equiv b(\alpha_x)\}$ открыто в X для любых $a, b \in A$. Адаптируя это определение к *drl*-полукольцу S, назовем семейство l-идеалов $\{A_x : x \in X\}, X$ — топологическое пространство, *открытым*, если множество $\{x \in X : a * b \in A_x\}$ открыто в X для любых $a, b \in S$. Конгруэнция на *drl*-полукольце однозначно определяется классом нуля, поэтому семейство l-идеалов $\{A_x : x \in X\}$ открыто в точности тогда, когда для любого элемента $a \in S$ множество $\{x \in X : a \in A_x\}$ открыто в X.

Пусть X — подпространство $\operatorname{Irr} S$, Y — топологическое пространство, $\varphi : X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение. Для любого открытого в Y подмножества U и любой точки $y \in Y$ положим:

$$0_U = \cap \varphi^{-1}(U) = \cap\{P \in \operatorname{Irr} S : \varphi(P) \in U\},$$
$$0_y = \cup\{0_V : V \text{ — открыто в } Y \text{ и } y \in V\}.$$

В частном случае, когда $X = Y = \operatorname{Irr} S$ и φ — тождественное отображение, для $P \in \operatorname{Irr} S$ и открытого в $\operatorname{Irr} S$ подмножества U получаем:

$$0_U = \cap\{Q \in \operatorname{Irr} S : Q \in U\},$$
$$0_P = \cup\{0_V : V \text{ — открыто в } \operatorname{Irr} S \text{ и } P \in V\}.$$

Очевидно, что 0_U в любом случае является l-идеалом *drl*-полукольца S.

Подпространство $X \subseteq \operatorname{Irr} S$ называется *плотным в* $\operatorname{Irr} S$, если замыкание $\overline{X}$ совпадает с $\operatorname{Irr} S$. Стандартно проверяется, что подмножество X плотно в $\operatorname{Irr} S$ в точности тогда, когда $\cap X = 0$. Подпространство $X \subseteq \operatorname{Irr} S$ называется *полным в* $\operatorname{Irr} S$, если $D_X(A) = D(A) \cap X \neq X$ для любого собственного l-идеала A. Понятно, что полнота X равносильна условию $X \not\subseteq D(A)$, т. е. произвольный собственный l-идеал лежит по крайней мере в одном неприводимом l-идеале из X.

Лемма 5. *Пусть S — drl-полукольцо, X — подпространство $\operatorname{Irr} S$, Y — топологическое пространство, $\varphi : X \to Y$ — непрерывное отображение.*

(1) *Если $\varphi(P) = y$, то $0_y \subseteq P$.*

(2) *$0_U = \cap\{0_y : y \in U\}$ для любого открытого множества $U \subseteq Y$.*

(3) *$\cap\{0_y : y \in Y\} = \cap X$; в частности, если X — плотное подмножество, то $\cap\{0_y : y \in Y\} = 0$.*

Доказательство. (1) Если $a \in 0_y$, то найдется такая окрестность U точки y, что $a \in 0_U$. Элемент a лежит в каждом неприводимом $P' \in \varphi^{-1}(U)$, в том числе и в P.

(2) По (1) $0_y \subseteq P$ для каждого $P \in \varphi^{-1}(y)$, поэтому $\cap\{0_y\ y \in U\} \subseteq \cap\{P \in \operatorname{Irr} S : \varphi(P) \in U\} = 0_U$. Обратно, если $y \in U$, то $0_U \subseteq 0_y$ по построению l-идеала 0_y. Поэтому $0_U \subseteq \cap\{0_y : y \in U\}$.

(3) следует из (2) при $U = Y$. □

Предложение 2. *Пусть S — drl-полукольцо, X — подпространство $\operatorname{Irr} S$, Y — топологическое пространство, $\varphi : X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *0_y является l-идеалом для любого $y \in Y$;*

(2) *множество всех l-идеалов вида $0_y, y \in Y$, образуют открытое множество l-идеалов;*

(3) *0_P является l-идеалом для любого $P \in \operatorname{Irr} S$;*

(4) *множество всех l-идеалов вида $0_P, P \in \operatorname{Irr} S$, образуют открытое множество l-идеалов.*

Доказательство. (1) Пусть $a, b \in 0_y$. Тогда найдутся такие открытые окрестности U и V точки y, что $a \in 0_U$ и $b \in 0_V$. Из включения $U \supseteq U \cap V$ следует $0_U \subseteq 0_{U\cap V}$; аналогично, $0_V \subseteq 0_{U\cap V}$. Получаем $a, b \in 0_{U\cap V}$, откуда $a+b \in 0_{U\cap V}$. Множество $U \cap V$ является открытой окрестностью точки y, следовательно, $a + b \in 0_y$. Очевидно, $as, sa \in 0_U \subseteq 0_y$ для любого $s \in S$. Пусть $|x| \leq |a|$. Поскольку a лежит в l-идеале 0_U, то $x \in 0_U$, откуда следует $x \in 0_y$.

(2) Обозначим $E_{a,b} = \{y \in Y : a * b \in 0_y\}$ и покажем, что это множество открыто в Y. Пусть y — произвольная точка из $E_{a,b}$. Тогда найдется такая открытая окрестность U точки y, что $a * b \in 0_U$. Для любой точки $y' \in U$ выполняется $0_{y'} \supseteq 0_U \ni a * b$. Получили, что $y' \in E_{a,b}$, и вместе с любой своей точкой y множество $E_{a,b}$ содержит и некоторую открытую окрестность U точки y. Поэтому $E_{a,b}$ открыто.

(3) и (4) следуют из (1) и (2). □

Определение 4. *Тройка (P, π, X) называется пучком алгебр сигнатуры Ω, если выполняются условия:*

(1) *X и P — топологические пространства, называемые соответственно базисным и накрывающим пространствами;*

(2) $\pi : P \to X$ — *локальный гомеоморфизм;*

(3) *для каждой точки* $x \in X$ *слой* $P_x = \pi^{-1}(x)$ *является алгеброй сигнатуры* Ω, *и* $P = \dot{\cup} P_x, x \in X$;

(4) *операции сигнатуры* Ω *непрерывны в* P.

Непрерывные отображения из X в P называются *сечениями*, а сечение, определенное на всем X, носит название *глобального сечения.* Множество $\Gamma(P)$ всех глобальных сечений пучка P является алгеброй той же сигнатуры Ω, что и у слоев пучка.

Идея использования пучков для изучения алгебр следующая. Для фиксированной алгебры A конструируется некоторый пучок $(P(A), X)$ и находится *представление* элементов алгебры A сечениями этого пучка — гомоморфизм $A \to \Gamma(P)$. Наиболее важными являются изоморфные представления алгебр в пучках, слои которых устроены в некотором смысле проще, чем у исходной алгебры A. Пучковые методы позволяют исследовать алгебры в терминах свойств слоев, базисного и накрывающего пространств.

Открытое семейство конгруэнций $\{\alpha_x : x \in X\}$ на универсальной алгебре A позволяет построить факторный пучок алгебр $(P(A), X)$ такой же сигнатуры как и у алгебры A (пучок называется *факторным*, если естественное ограничение алгебры глобальных сечений на каждый слой является эпиморфизмом). Для l-колец такая конструкция рассмотрена в [16, p.20, standart construction], для полуколец в [14, теорема 1.2.2]. С наибольшей общностью построение пучка универсальных алгебр осуществлено Дейви [21]. Именно, если имеется открытая система конгруэнций $\{\alpha_x : x \in X\}$ на алгебре A, индесированных точками топологического пространства X, то $(\dot{\cup} A/\alpha_x, X)$ — факторный пучок алгебр-слоев той же сигнатуры, что и у A.

Вернемся к drl-полукольцам. Пусть S — drl-полукольцо, X — подпространство $\operatorname{Irr} S$, Y — топологическое пространство, $\varphi : X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение. Предложение 2 позволяет построить пучок $(\Pi(S), Y)$, где $\Pi(S)$ — дизъюнктное объединение drl-полуколец $S/0_y$, а y пробегает множество Y. Пучок $(\Pi(S), Y)$ близок к известной конструкции пучка ростков непрерывных функций.

Отметим, что в произвольном пучке (P, X) drl-полуколец отображение из X, принимающее нулевое значение $0(x)$ в каждом слое P_x, является глобальным сечением. Тогда *носителем* сечения $\sigma \in \Gamma(P)$ называется множество $\operatorname{supp} \sigma = \{x \in X : \sigma(x) \neq 0(x)\}$, а $z(\sigma) = X \setminus \operatorname{supp} \sigma$ называется *нуль–множеством* сечения σ. Известно (например, [22, §1]), что носитель произвольного глобального сечения пучка является замкнутым подмножеством базисного пространства.

Через $\hat{a}, a \in S$, обозначим глобальное сечение пучка $(\Pi(S), Y)$, заданное условием: $\hat{a}(y)$ — класс элемента a в слое $S/0_y$. Очевидно, множество $\hat{S} = \{\hat{a} : a \in S\}$ является drl-подполукольцом drl-полукольца $\Gamma(\Pi)$. Множество всех глобальных сечений из $\Gamma(\Pi)$ с компактными носителями образует drl-подполукольцо, которое обозначим через $\Gamma_{00}(\Pi)$.

Если отталкиваться от открытого семейства l-идеалов $\{0_P : P \in \operatorname{Irr} S\}$, то получим пучок $(\Pi'(S), \operatorname{Irr} S)$. Рассмотрим сейчас первые пучковые представления drl-полукольца сечениями пучков Π и Π'.

Теорема 1. *Пусть* S — *drl-полукольцо,* X — *подпространство* $\operatorname{Irr} S$, Y — *топологическое пространство,* $\varphi : X \to Y$ — *непрерывное сюръективное отображение. Тогда* $(\Pi(S), Y)$ — *пучок drl-полуколец, и справедливы утверждения:*

(1) *если X плотно в* $\mathrm{Irr}\, S$*, то S изоморфно drl-подполукольцу $\hat{S}$ drl-полукольца всех глобальных сечений пучка* Π*;*

(2) *если X полно в* $\mathrm{Irr}\, S$*, то* $\Gamma_{00}(\Pi) \subseteq \hat{S}$*, т. е. любое глобальное сечение с компактным носителем пучка Π имеет вид $\hat{a}$ для некоторого $a \in S$.*

Для пучка $(\Pi'(S), \mathrm{Irr}\, S)$ *справедливы утверждения:*

(3) *S изоморфно drl-подполукольцу $\hat{S}$ drl-полукольца всех глобальных сечений пучка Π', и* $\Gamma_{00}(\Pi') \subseteq \hat{S}$*;*

(4) *если S содержит формальную единицу, то S изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка* Π'.

Доказательство. (1) Рассмотрим гомоморфизм $\alpha : S \to \Gamma(\Pi)$ — представление, при котором $\alpha(a) = \hat{a}$ для любого $a \in S$. Покажем его точность (инъективность). Пусть $\hat{a} = \hat{b}$ для элементов $a, b \in S$. Совпадение этих сечений в каждом слое Π_y равносильно тому, что $a * b \in 0_y$ для любого $y \in Y$. Для любого неприводимого l-идеала P из X найдется такая точка $y \in Y$, что $\varphi(P) = y$. По лемме 5 $0_y \subseteq P$, откуда следует, что $a * b$ лежит в каждом неприводимом l-идеале из X. Тогда в силу плотности X получаем $a * b \in \cap X = 0$, откуда $a = b$.

(2) Пусть X полно в $\mathrm{Irr}\, S$. Покажем, что произвольное глобальное сечение σ с компактным носителем имеет вид $\hat{a}$ для подходящего $a \in S$. Сечение σ *drl*-полукольца $\Gamma(\Pi)$ есть разность двух положительных элементов σ^+ и $0 - \sigma^-$ по предложению 1. Носители этих сечений замкнуты и очевидно лежат в $\mathrm{supp}\, \sigma$, поэтому компактны, поскольку компактен $\mathrm{supp}\, \sigma$. Следовательно, достаточно показать, что сечение σ имеет вид $\hat{a}$ для случая $\sigma \geq 0$. В произвольной точке $y \in \mathrm{supp}\, \sigma$ сечение σ совпадает с некоторым сечением вида $\hat{a}_y, a_y \in S$, и по свойствам пучка эти сечения совпадают на некоторой открытой окрестности U_y точки y. Открытые множества U_y, где y пробегает все точки $\mathrm{supp}\, \sigma$, покрывают $\mathrm{supp}\, \sigma$. Носитель компактен, поэтому выберем конечное подпокрытие $\{U_1, \ldots, U_k\}$ и такие элементы $a_1, \ldots, a_k \in S$, что $\sigma = \hat{a}_i$ на U_i для любого $i = 1, \ldots, k$. Положим $U_0 = Y \setminus \mathrm{supp}\, \sigma$ и $a_0 = 0$.

Открытые множества $\varphi^{-1}(U_i)$ имеют вид $D_X(B_i) = D(B_i) \cap X$ для подходящих l-идеалов $B_i, i = 0, \ldots, k$. Имеем $D_X(B_0) \cup \ldots \cup D_X(B_k) = X$. Тогда $X = D_X(B_0 + \ldots + B_k)$ и поскольку X — полное подпространство, то l-идеал $B_0 + \ldots + B_k$ является несобственным. Получаем

$$b = a_0 \vee \ldots \vee a_k \in B_0 + \ldots + B_k,$$

и по предложению 1 найдутся такие положительные элементы $b_i \in B_i, i = 0, \ldots, k$, что $b = b_0 \vee \ldots \vee b_k$. Положим

$$a = (a_0 \wedge b_0) \vee \ldots \vee (a_k \wedge b_k)$$

и покажем, что $\hat{a} = \sigma$ на Y. Ясно, для этого достаточно показать, что $\hat{a}$ совпадает с сечением $\hat{a}_i$ на U_i для любого $i = 0, \ldots, k$. Поскольку равенство $\hat{a}|_{U_i} = \hat{a}_i|_{U_i}$ равносильно $a * a_i \in \cap\{0_y : y \in U_i\}$, а с учетом леммы 5 $a * a_i \in 0_{U_i}$, то достаточно показать, что $a \equiv a_i \pmod{P}$ для каждого $P \in U_i$.

Зафиксируем индекс $i \in \{0, \ldots, k\}$, и пусть P — произвольный неприводимый l-идеал из $\varphi^{-1}(U_i)$, а j — произвольный индекс. Допустим, $P \in \varphi^{-1}(U_j)$, тогда в точке $\varphi(P)$ сечения $\hat{a}_i$ и $\hat{a}_j$ совпадают с σ, следовательно, $a_i \equiv a_j \pmod{0_{\varphi(P)}}$. Из $0_{\varphi(P)} \subseteq P$ получаем $a_i \equiv a_j \pmod{P}$, откуда $a_i \wedge b_j \equiv a_j \wedge b_j \pmod{P}$.

Пусть сейчас $P \notin \varphi^{-1}(U_j) = D_X(B_j)$. Тогда $B_j \subseteq P$ и $b_j \in P$. В этом случае $a_i \wedge b_j \equiv a_j \wedge b_j \pmod P$ в силу положительности элементов a_i, a_j и выпуклости l-идеала P. Получили, что $a_i \wedge b_j \equiv a_j \wedge b_j \pmod P$ справедливо для любого $P \in \varphi^{-1}(U_i)$.

Пусть P — произвольный неприводимый l-идеал из $\varphi^{-1}(U_i)$. Используя дистрибутивность решетки S, получаем:

$$\begin{aligned} a = (a_0 \wedge b_0) \vee \ldots \vee (a_k \wedge b_k) &\equiv \\ \equiv (a_i \wedge b_0) \vee \ldots \vee (a_i \wedge b_k) &= \\ = a_i \wedge (b_0 \vee \ldots \vee b_k) = a_i \wedge b = a_i &\pmod P. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Gamma_{00}(\Pi) \subseteq \hat{S}$.

(3) следует из (1) и (2) в силу плотности и полноты $\operatorname{Irr} S$ в себе.

(4) Если S содержит формальную единицу, то $\operatorname{Irr} S$ является компактным пространством. Ясно, что носитель произвольного глобального сечения будет компактным, а из (3) следует $\hat{S} \subseteq \Gamma(\Pi') \subseteq \Gamma_{00}(\Pi') \subseteq \hat{S} \cong S$. □

2. Функциональные полукольца

Г. Биргкгоф и Р. С. Пирс [23] определили функциональное кольцо (f-кольцо) как решеточно упорядоченное кольцо с условием

$$\text{если } a \wedge b = 0 \text{ и } c \geq 0, \text{ то } ca \wedge b = ac \wedge b = 0. \qquad (*)$$

Для l-кольца R условие $(*)$ равносильно тому, что R является подпрямым произведением линейно упорядоченных колец. Очевидно, что *drl*-полукольцо, представимое как подпрямое произведение линейно упорядоченных полуколец, удовлетворяет $(*)$, однако, его не достаточно, чтобы *drl*-полукольцо было подпрямым произведением линейно упорядоченных *drl*-полуколец. В качестве примера, подтверждающим это, можно рассмотреть одноатомную брауэрову решетку, не являющуюся цепью (см. также [10, remark 2.1, example 5]).

Элементы $a, b \in S$ назовем *ортогональными*, если $|a| \wedge |b| = 0$. Для любого подмножества A *drl*-полукольца S обозначим через A^* множество всех элементов из S ортогональных каждому элементу из A. Для $a \in S$ будем писать $a^* = \{a\}^*$ и $A^{**} = (A^*)^*$. Из определения легко следуют свойства, которые будем использовать без дополнительных ссылок:

$$A \subseteq B \Rightarrow B^* \subseteq A^*, A \subseteq A^{**}, A^* = A^{***}.$$

В дальнейшем неоднократно будем применять два простых результата.

Лемма 6. *Пусть S — drl-полукольцо, $a, b, c \in S$. Тогда выполняются утверждения:*

(1) *если $a \wedge c = 0$ и $b \wedge c = 0$, то $(a + b) \wedge c = 0$;*

(2) *если S удовлетворяет условию $(*)$, то из $a \wedge b = 0$ следует $ab = 0$.*

Доказательство. (1) Утверждение справедливо в (аддитивном) решеточно упорядоченном моноиде (см., например, [1, гл. XIV, § 4, теорема 3]), а значит, и в *drl*-полукольце.

(2) $a \wedge b = 0 \Rightarrow a \wedge ab = 0 \Rightarrow ab \wedge ab = 0 \Rightarrow ab = 0$. □

Лемма 7. *Для drl-полукольца S равносильны условия* (1) *и* (2), *из которых следует* (3)*:*

(1) *S удовлетворяет* $(*)$;

(2) *для любого* $M \subseteq S$ *множество* M^* *является l-идеалом drl-полукольца* S;

(3) *для любого l-идеала* B *из* S *выполняется* $B \cap B^* = 0$, *и* B^* *— наибольший среди l-идеалов, пересекающихся с* B *по нулю.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если $a, b \in M^*$, то для любого $x \in M$ выполняется $|a| \wedge |x| = 0, |b| \wedge |x| = 0$. Тогда в силу [24, предложение 3] и предыдущей леммы $0 \leq |a+b| \wedge |x| \leq (|a|+|b|) \wedge |x| = 0$, откуда получаем $a+b \in M^*$. Если $|c| \leq |a|$ и $a \in M^*$, то для любого $x \in M$ $|a| \wedge |x| = 0$. Поэтому $0 \leq |c| \wedge |x| \leq |a| \wedge |x| = 0$, следовательно, $c \in M^*$. Наконец, пусть $a \in M^*$, $x \in M$ и $s \in S$. По [10, prop. 1.1] для произвольных элементов *drl*-полукольца $|as| \leq |a||s|$. Тогда $0 \leq |as| \wedge |x| \leq |a||s| \wedge |x| = 0$ по свойству $(*)$. Отсюда $|as| \wedge |x| = 0$ и $as \in M^*$. Таким же образом показывается, что $sa \in M^*$, значит, M^* — *l*-идеал.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $a \wedge b = 0$. Тогда $a \in b^*$. Поскольку b^* является по условию *l*-идеалом, то $ac \in b^*$. В случае $c \geq 0$ $ac = |ac|$, поэтому $ac \wedge b = |ac| \wedge |b| = 0$. Таким же образом показывается, что $ca \wedge b = 0$.

(3) Пусть S — *drl*-полукольцо со свойством $(*)$ и B — его *l*-идеал. Если $u \in B \cap B^*$, то $|u| \wedge |u| = 0$, поэтому $B \cap B^* = 0$. Пусть сейчас A — такой *l*-идеал, что $A \cap B = 0$. Для произвольных $a \in A$ и $x \in B$ из $|a| \wedge |x| \leq |a| \in A$ следует $|a| \wedge |x| \in A$. Такими же рассуждениями получаем $|a| \wedge |x| \in B$. Следовательно, $|a| \wedge |x| = 0$ и $A \subseteq B^*$. □

Лемма 8. [10, prop. 1.4] *Пусть* S *— drl-полукольцо,* $a \in S$. *Тогда множество*

$$(a) = \{s \in S : |s| \leq m|a| + x|a| + |a|y + u|a|v\}$$

для некоторых неотрицательного целого числа m *и* $x, y, u, v \in S^+$ *является главным l-идеалом, порожденным элементом* a.

Определение 5. *Функциональным полукольцом (или, короче, f-полукольцом) назовем drl-полукольцо, являющееся подпрямым произведением линейно упорядоченных drl-полуколец.*

Для описания *f*-полуколец нам потребуется еще одно свойство, впервые рассмотренное для исследования *drl*-полугрупп и *drl*-полуколец, видимо, Ранга Рао в [10]:

$$(a-b) \wedge (b-a) \leq 0 \text{ для любых } a, b \in S. \qquad (**)$$

Предложение 3. *Пусть* S *— drl-полукольцо со свойствами* $(*)$ *и* $(**)$, P *— собственный l-идеал в* S. *Тогда равносильны условия:*

(1) S/P *— линейно упорядоченное drl-полукольцо;*

(2) $P \in \operatorname{Irr} S$;

(3) *для любых* $a, b \in S$ $a \wedge b = 0$ *влечет* $a \in P$ *или* $b \in P$;

(4) *для любых* $a, b \in S^+$ $a \wedge b \in P$ *влечет* $a \in P$ *или* $b \in P$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если S/P — линейно упорядоченное *drl*-полукольцо, то *l*-идеалы, содержащие P, также линейно упорядочены относительно включения. Отсюда вытекает неприводимость *l*-идеала P.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $a \wedge b = 0$. Очевидно, что $a \in a^{**}$. По лемме 6 $|b| \wedge m|a| = 0$ для любого натурального m. Применив несколько раз свойство $(*)$, получаем, что $|b| \wedge x|a| = 0$, $|b| \wedge |a|y = 0$, $|b| \wedge u|a|v = 0$ для произвольных $x, y, u, v \in S^+$. Вновь воспользовавшись леммой 6 и строением главного *l*-идеала *drl*-полукольца (лемма 8), получаем $|b| \wedge |s| = 0$ для любого $s \in (a)$. Таким образом

показали, что $b \in a^*$. По лемме 7 $a^* \cap a^{**} = 0$, и в силу неприводимости P выполняется $a^* \subseteq P$ или $a^{**} \subseteq P$. Следовательно, $a \in P$ или $b \in P$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть $a, b \in S^+$ удовлетворяют $a \wedge b \in P$. Положим $u = a - a \wedge b$ и $v = b - a \wedge b$. Тогда $u + a \wedge b = (a - a \wedge b) + a \wedge b = a$, так как $a \geq a \wedge b$ [4, lemma 8]. Аналогично $v + a \wedge b = b$. Далее используем [4, lemma 5], дистрибутивность и условие $(**)$:

$$\begin{aligned} u \wedge v &= (a - a \wedge b) \wedge (b - a \wedge b) = \\ &= (0 \vee (a - b)) \wedge (0 \vee (b - a)) = \\ &= 0 \vee ((a - b) \wedge (b - a)) = 0. \end{aligned}$$

Тогда получаем $u \in P$ или $v \in P$, поэтому $a = u + a \wedge b \in P$ или $b = v + a \wedge b \in P$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in S/P$ для произвольных $a, b \in S$. Для элементов $u = a - a \wedge b, v = b - a \wedge b$ как и выше $u \wedge v = 0$. Заметим, что $u, v \in S^+$, поэтому $u \in P$ или $v \in P$. Далее, $\bar{a} = \bar{a} \wedge \bar{b} + \bar{u}$, $\bar{b} = \bar{a} \wedge \bar{b} + \bar{v}$, откуда следует $\bar{a} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ или $\bar{b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$. В любом случае получаем, что элементы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сравнимы. $\square$

Предложение 4. *Для drl-полукольца S равносильны условия:*

(1) *S — f-полукольцо;*

(2) *S удовлетворяет свойствам $(*)$ и $(**)$;*

(3) *S/P — линейно упорядоченно для любого неприводимого l-идеала P.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) поскольку условия $(*)$ и $(**)$ выполняются в линейно упорядоченных *drl*-полукольцах.

(2) $\Rightarrow$ (3) по предложению 3.

(3) $\Rightarrow$ (1). По лемме 3 пересечение всех неприводимых *l*-идеалов является нулевым *l*-идеалом, поэтому S разлагается в подпрямое произведение линейно упорядоченных *drl*-полуколец S/P, где P пробегает множество $\operatorname{Irr} S$. $\square$

Если P — произвольный неприводимый *l*-идеал, то множество $S^+ \setminus P$ *не содержит ноль и замкнуто относительно взятия точной нижней грани.* Назовем непустое подмножество *drl*-полукольца S с указанным свойством *f-системой.* Роль *f*-систем такая же, как у мультипликативно замкнутых систем кольца с их связью с первичными идеалами.

Лемма 9. *Если F — f-система drl-полукольца, то максимальный среди непересекающихся с F l-идеал неприводим.*

Доказательство. Существование максимального непересекающегося с F *l*-идеала P гарантирует лемма Цорна. Предположим, что *l*-идеалы A и B не содержатся в P, но $A \cap B \subseteq P$. В силу максимальности P *l*-идеалы $A + P$ и $B + P$ пересекаются с F, и пусть $a \in (A + P) \cap F$, $b \in (B + P) \cap F$. Решетка *l*-идеалов *drl*-полукольца дистрибутивна, поэтому $a \wedge b \in (A + P) \cap (B + P) = A \cap B + P = P$. Но с другой стороны, $a \wedge b \in F$, противоречие. $\square$

Для описания минимальных неприводимых *l*-идеалов *drl*-полукольца S рассмотрим максимальную *f*-систему F. Опять же ее существование стандартно доказывается с помощью леммы Цорна. По предыдущей лемме существует неприводимый *l*-идеал M, не пересекающийся с F. Если M строго содержит неприводимый *l*-идеал N, то *f*-система $S^+ \setminus N$ строго содержит *f*-систему F. Противоречие показывает, что M — минимальный неприводимый *l*-идеал; более того, понятно, что $S^+ \setminus M = F$.

Для неприводимого l-идеала P положим

$$0(P) = \{a \in S : a^* \nsubseteq P\}.$$

Лемма 10. *Пусть S — f-полукольцо, $P, Q \in \operatorname{Irr} S$. Тогда справедливы утверждения:*

(1) $0(P)$ *— l-идеал;*

(2) $0(P) \subseteq P$*;*

(3) *если $P \subseteq Q$, то $0(Q) \subseteq 0(P)$;*

(4) $0(P) = P$ *тогда и только тогда, когда P — минимальный неприводимый l-идеал.*

Доказательство. (1) Пусть $a, b \in 0(P)$, тогда найдутся такие $x, y \notin P$, что $|a| \wedge |x| = 0$ и $|b| \wedge |y| = 0$. По предложению 3 $u = |x| \wedge |y| \notin P$, а по лемме 6 $(|a| + |b|) \wedge u = 0$. Поскольку $|a + b| \leq |a| + |b|$, то получаем $0 \leq |a + b| \wedge u \leq (|a| + |b|) \wedge u = 0$, откуда $a + b \in 0(P)$. Для любого $s \in S$ благодаря свойству $(*)$ имеем $0 \leq |as| \wedge |x| \leq |a||s| \wedge |x| = 0$, откуда $as \in 0(P)$; таким же образом $sa \in 0(P)$. Наконец, если $|t| \leq |a|$, то $0 \leq |t| \wedge |x| \leq |a| \wedge |x| = 0$, что влечет $t \in 0(P)$, и $0(P)$ — l-идеал.

(2) Для $a \in 0(P)$ найдется ортогональный к a элемент, не лежащий в P, поэтому по предложению 3 $a \in P$.

(3) очевидно.

(4) Пусть P — минимальный неприводимый l-идеал, и предположим, что найдется такой элемент, что $a \in P \setminus 0(P)$. Воспользуемся тем, что $a = a^+ + a^-$. Заметим, если $a^+ \in 0(P)$, то $a^- \notin 0(P)$. Тогда $0 - a^- \in P \setminus 0(P)$, ибо в противном $a^- = 0 - (0 - a^-) \in 0(P)$. Получили, что в любом случае найдется положительный элемент $b \in P^+ \setminus 0(P)$. Для любого элемента x f-системы $F = S^+ \setminus P$ выполняется $b \wedge x \neq 0$, поскольку иначе $b \in 0(P)$. Легко проверить, что множество $F' = F \cup \{b\} \cup \{b \wedge x : x \in F\}$ — f-система, строго большая F, противоречие. Следовательно, $0(P) = P$. Обратная импликация вытекает из условия (3). □

Предложение 5. *Пусть S — f-полукольцо.*

(1) $\{0(P) : P \in \operatorname{Irr} S\}$ *— открытое семейство l-идеалов.*

(2) $\cap\{0(P) : P \in \operatorname{Irr} S\} = 0$.

Доказательство. (1) Пусть $a \in S$ и $U_a = \{P \in \operatorname{Irr} S : 0(P) \ni a\}$. Для фиксированной точки $P \in U_a$ из $a \in 0(P)$ вытекает, что $a^* \nsubseteq P$, поэтому $P \in D(a^*)$. Если $Q \in D(a^*)$, то $a^* \nsubseteq Q$, а значит $a \in 0(Q)$, т. е. $D(a^*) \subseteq U_a$. Получили, что U_a вместе с произвольной своей точкой содержит и некоторую ее окрестность, поэтому U_a открыта в $\operatorname{Irr} S$.

(2) По утверждению (2) предыдущего предложения и лемме 3

$$\cap\{0(P) : P \in \operatorname{Irr} S\} \subseteq \cap\{P : P \in \operatorname{Irr} S\} = 0.$$

□

Доказанный результат позволяет для любого f-полукольца S построить пучок f-полуколец:

$$(L(S), \operatorname{Irr} S) = (\dot{\cup} S/0(P), \operatorname{Irr} S).$$

Произвольное f-полукольцо S вкладывается в f-полукольцо всех глобальных сечений пучка $L(S)$. Однако, различие между $\hat{S} \cong S$ и f-полукольцом $\Gamma(L(S))$ всех глобальных сечений пучка может быть существенным. Так, $\hat{S}$ не обязано содержать сечения с компактными носителями даже в случае функционального кольца (см. [16, p. 52]). Нашей задачей поэтому является нахождение свойств, с которыми f-полукольцо S будет допускать «хорошие» представления в пучке $L(S)$.

Лемма 11. *Несравнимые неприводимые l-идеалы f-полукольца S отделимы в* $\operatorname{Irr} S$*; в частности,* $\operatorname{Max} S$ *и* $\operatorname{Min} S$ *— подпространства максимальных и минимальных неприводимых l-идеалов — хаусдорфовы.*

Доказательство. Пусть $P, Q \in \operatorname{Irr} S$ и $P \nsubseteq Q$, $Q \nsubseteq P$. Тогда найдутся такие $a, b \in S^+$, что $a \in P \setminus Q$ и $b \in Q \setminus P$. Рассмотрим элементы $u = a - a \wedge b$ и $v = b - a \wedge b$. Как было показано при доказательстве предложения 3, $u \wedge v = 0$. Тогда $u \notin Q$, поскольку $a = u + a \wedge b$ не лежит в Q; таким же образом $v \notin P$. Пусть $c \in (u) \cap (v)$, тогда по лемме 8

$$|c| \leq m_1 u + x_1 u + u y_1 + s_1 u t_1 = u_c,$$
$$|c| \leq m_2 v + x_2 v + v y_2 + s_2 v t_2 = v_c$$

для некоторых неотрицательных целых m_i и $x_i, y_i, s_i, t_i \in S^+$. По свойству $(*)$ элемент v ортогонален второму, третьему и четвертому слагаемым первого соотношения, а по лемме 6 v ортогонален u_c. По таким же соображениям u ортогонален v_c. Повторяя рассуждения, получаем, что u_c ортогонален v_c. Следовательно, $c = 0$, поскольку $|c| \leq u_c \wedge v_c = 0$. Таким образом, $D(u) \cap D(v) = \varnothing$. Остается заметить, что $P \in D(v)$ и $Q \in D(u)$. □

3. Гельфандовы функциональные полукольца

Определение 6. *Назовем f-полукольцо S гельфандовым, если для любых различных максимальных l-идеалов M и N из S найдутся такие элементы $a \in M \setminus N$ и $b \in N \setminus M$, что $|a| \wedge |b| = 0$.*

Гельфандовыми f-полукольцами будут полукольцо $C^+(X)$ непрерывных неотрицательных функций на компакте X, f-полукольцо с единственным максимальным l-идеалом, в частности, l-простое f-полукольцо.

Подпространство $\operatorname{Max} S$ всех максимальных l-идеалов из S назовем *максимальным спектром* drl-полукольца S. Открытые множества максимального спектра будем обозначать через $D_1(A) = D(A) \cap \operatorname{Max} S$, где A — произвольный l-идеал; множества вида $D_1(a), a \in S$, являются базисными.

Предложение 6. *Для f-полукольца S с формальной единицей равносильны условия:*

(1) *S — гельфандово f-полукольцо;*

(2) *для каждого максимального l-идеала M l-идеал $0(M)$ содержится в однозначно определенном максимальном l-идеале (именно, в M);*

(3) *если $P \in \operatorname{Irr} S$, то $0(P)$ содержится в однозначно определенном максимальном l-идеале;*

(4) *если $P, Q \in \operatorname{Irr} S$ не лежат в одном максимальном l-идеале, то $0(P) + 0(Q) = S$;*

(5) *$0(M) + 0(N) = S$ для любых различных максимальных l-идеалов M и N.*

Доказательство. Очевидны импликации (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5), поскольку для произвольных $P, M \in \operatorname{Irr} S$ включение $P \subseteq M$ влечет $0(M) \subseteq 0(P) \subseteq P$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Если $M \neq N \in \operatorname{Max} S$, то $|a| \wedge |b| = 0$ для некоторых $a \in M \setminus N$ и $b \in N \setminus M$. Поэтому $a \in 0(M) \setminus N$. По лемме 10 $0(M) \subseteq M$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $0(M) + 0(N) = S$ для различных $M, N \in \operatorname{Max} S$. Тогда для некоторых $a \in 0(M), b \in 0(N)$ получаем $a + b = u$ — формальная единица из S. По определению $0(M)$ найдется элемент $x \notin M$ такой, что $|a| \wedge |x| = 0$. Заметим, что $a \notin N$ (в противном $u \in N$), а в силу неприводимости l-идеала N элемент x лежит в N. Таким образом, $a \in M \setminus N, x \in N \setminus M$, и S — гельфандово. $\square$

Предложение 7. *Пусть S — f-полукольцо с формальной единицей. Тогда справедливы утверждения:*

(1) $\cap\{0(M) : M \in \operatorname{Max} S\} = 0$*;*

(2) $\operatorname{Max} S$ *— компакт;*

(3) $S/0(M)$ *— f-полукольцо с единственным максимальным l-идеалом.*

Доказательство. (1) Следует из предложения 5 и того, что $0(M)$, $M \in \operatorname{Max} S$, являются минимальными элементами в упорядоченном множестве l-идеалов вида $0(P)$, где $P \in \operatorname{Irr} S$.

(2) Пространство $\operatorname{Max} S$ хаусдорфово по лемме 11. Если $\cup D_1(A_\alpha) = \operatorname{Max} S$, то $\sum A_\alpha = S$. Пусть u — формальная единица, тогда $u = a_{\alpha(1)} + \ldots + a_{\alpha(k)}$ для подходящих представителей l-идеалов A_α. Тогда $A_{\alpha(1)} + \ldots + A_{\alpha(k)} = S$ и $D_1(A_{\alpha(1)}) + \ldots + D_1(A_{\alpha(k)}) = \operatorname{Max} S$.

(3) Следует из предложения 6. $\square$

Теорема 2. *Гельфандово f-полукольцо S с единицей 1 изоморфно f-полукольцу всех глобальных сечений пучка $(L(S), \operatorname{Max} S)$; каждый слой пучка является f-полукольцом с единственным максимальным l-идеалом, а базисное пространство — компакт.*

Доказательство. Точность представления $a \to \hat{a}$ следует из того, что пересечение всех l-идеалов $0(M), M \in \operatorname{Max} S$, равно нулю. Покажем, что произвольное глобальное сечение пучка $L(S)$ имеет вид $\hat{a}$ для некоторого $a \in S$. Пусть $\sigma \in \Gamma(L)$, и так же как в теореме 1 будем считать, что $\sigma \geq 0$. В каждой точке $M \in \operatorname{Max} S$ сечение σ совпадает с некоторым сечением $\hat{a}_M$. По свойствам пучка $\sigma = \hat{a}_M$ на некоторой окрестности U_M точки M. В силу компактности $\operatorname{Max} S$ найдутся открытые множества $U_1, \ldots, U_k$, покрывающие $\operatorname{Max} S$, и соответствующие $a_i \in S$, совпадающие с σ на U_i. Обозначим $T = \{U_1, \ldots, U_k\}$.

Зафиксируем произвольные точку $M \in \operatorname{Max} S$ и множество $U_i \ni M$. Для $N \in \operatorname{Max} S \setminus U_i$ выполняется $0(M) + 0(N) = S$, поэтому $u_N + v_N = 1$ для подходящих $u_N \in 0(M)$ и $v_N \in 0(N)$. Сечение $\hat{v}_N$ совпадает с нулевым сечением на некотором открытом V_M, и $\{V_N : N \in \operatorname{Max} S \setminus U_i\}$ покрывают замкнутое множество $\operatorname{Max} S \setminus U_i$. Используя компактность, выберем открытые $V_1, \ldots, V_s$ и элементы $u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_s$ для которых $u_i + v_i = 1, u_i \in 0(M)$, и нуль-множества сечений $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_s$ покрывают U_i. Элемент v_i лежит в l-идеале $C_i = \cap\{0(Q) : Q \in z(\hat{v}_i)\}$. По предложению 1 найдутся такие положительные элементы $b_i \in 0(M), c_i \in C_i$, что $b_i \vee c_i = 1$. Поскольку умножение на положительный элемент дистрибутивно относительно операции $\vee$, то

$$1 = (b_1 \vee c_1) \ldots (b_k \vee c_k) = b_M \vee c_M,$$

где $b_M = b_1 \ldots b_k$, а c_M — точная верхняя грань остальных элементов после раскрытия скобок.

Таким образом, для произвольной точки $M \in \operatorname{Max} S$ существует открытая окрестность U_i и элементы $b_M, c_M \in S$ такие, что $b_M \vee c_M = 1, b_M \in 0(M)$ и $\hat{c}_M = \hat{0}$ на $\operatorname{Max} S \setminus U_i$.

Семейство нуль-множеств $z(\hat{b}_M)$, где M пробегает $\operatorname{Max} S$, покрывает максимальный спектр, поэтому существует конечное подпокрытие $\{z(\hat{b}_1), \ldots, z(\hat{b}_n)\}$ и соответствующие ему элементы $c_1, \ldots, c_n$. Заметим, что $z(\hat{b}_i)$ лежит в носителе $\operatorname{supp} \hat{c}_i$, который в свою очередь — в некотором открытом множестве из T. Сделаем при необходимости перенумерацию множеств из T таким образом, чтобы $z(\hat{b}_i) \subseteq U_i$, допуская при этом, что $U_i = U_j$ для некоторых $i \neq j$. Аналогичную процедуру проделаем с элементами множества $\{a_i\}$ и в результате получим, что $\sigma = \hat{a}_i$ на U_i.

Положим

$$\begin{aligned} w_1 &= c_1 \\ w_2 &= b_1 c_2 \\ &\ \cdots \\ w_n &= b_1 \ldots b_{n-1} c_n. \end{aligned}$$

Докажем индукцией, что $w_1 \vee \ldots \vee w_i \vee b_1 \ldots b_i = 1$. Во-первых, $w_1 \vee b_1 = c_1 \vee b_1 = 1$. Во-вторых,

$$\begin{aligned} & w_1 \vee \ldots \vee w_i \vee b_1 \ldots b_i = \\ =& w_1 \vee \ldots \vee w_{i-1} \vee (b_1 \ldots b_{i-1} c_i) \vee b_1 \ldots b_i = \\ =& w_1 \vee \ldots \vee w_{i-1} \vee b_1 \ldots b_{i-1}(c_i \vee b_i) = \\ =& w_1 \vee \ldots \vee w_{i-1} \vee b_1 \ldots b_{i-1} = 1. \end{aligned}$$

Заметим, что $b_1 \ldots b_n = 0$, так как нуль-множества $z(\hat{b}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, покрывают все пространство $\operatorname{Max} S$. Поэтому $w_1 \vee \ldots \vee w_n = 1$. Рассмотрим элемент $a = a_1 w_1 \vee \ldots \vee a_n w_n$ и покажем, что $\sigma = \hat{a}$. Пусть M — произвольная точка из $\operatorname{Max} S$, и пусть $\{U_i\}, i \in I$, — все открытые множества из T, содержащие M. Для произвольных индексов $i, j \in I$ сечения $\hat{a}_i$ и $\hat{a}_j$ совпадают в точке M с σ, а значит и между собой. Если $j \notin I$, то $M \notin U_j$, поэтому $\hat{c}_j = \hat{0}$ на $\operatorname{Max} S \setminus U_j$, в частности, $\hat{c}_j(M) = \hat{0}(M)$. Для любого положительного элемента $r(M)$ слоя в точке M получаем $r(M) \wedge \hat{c}_j(M) = \hat{0}(M)$, а по свойству $(*)$ f-полукольца — $r(M) \wedge \hat{w}_j(M) = \hat{0}(M)$, и, наконец, $r(M)\hat{w}_j(M) = \hat{0}(M)$ по лемме 6.

Получаем, что для любого $i \in I$ и любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо равенство $\hat{a}_i(M)\hat{w}_j(M) = \hat{a}_j(M)\hat{w}_j(M)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{a}(M) &= \hat{a}_1(M)\hat{w}_1(M) \vee \ldots \vee \hat{a}_n(M)\hat{w}_n(M) = \\ &= \hat{a}_i(M)\hat{w}_1(M) \vee \ldots \vee \hat{a}_i(M)\hat{w}_n(M) = \\ &= \hat{a}_i(M)(\hat{w}_1(M) \vee \ldots \vee \hat{w}_n(M)) = \hat{a}_i(M) = \sigma(M), \end{aligned}$$

и $\sigma = \hat{a}$. □

4. Представления на минимальном спектре

Пусть S — f-полукольцо. Обозначим через $\operatorname{Min} S$ подпространство всех минимальных неприводимых l-идеалов пространства $\operatorname{Irr} S$. Базисные открытые множества *минимального спектра* $\operatorname{Min} S$ имеют вид

$$d(a) = D(a) \cap \operatorname{Min} S = \{M \in \operatorname{Min} S : a \notin M\}, a \in S.$$

Лемма 12. *Пусть S — f-полукольцо и $P \in \operatorname{Irr} S$, $M \in \operatorname{Min} S$. Справедливы утверждения:*

(1) *для любого $a \in S$ $a \in P$ или $a^* \subseteq P$;*

(2) *для любого $a \in S$ либо $a \in M$, либо $a^* \subseteq M$;*

(3) *если $a \in M$, то $a^{**} \subseteq M$;*

(4) *для любого $a \in S$ $\operatorname{Min} S \setminus d(a) = d(a^*)$.*

Доказательство. (1) Если $a \notin P$, то по предложению 3 любой ортогональный к a элемент лежит в P.

(2) Если $a \in M$, то $a^* \nsubseteq M$, поскольку $M = 0(M)$, а если $a \notin M$, то $a^* \subseteq M$ по утверждению (1).

(3) Если $a \in M$, то $a^* \nsubseteq M$. По лемме 7 $a^* \cap a^{**} = 0 \subseteq M$, поэтому $a^{**} \subseteq M$ в силу неприводимости M.

(4) Следует из (2). □

Пусть S — f-полукольцо, и M — его минимальный неприводимый l-идеал. Сравним сейчас l-идеал $0(M)$ и l-идеал 0_M, определенный при построении пучка $(\Pi(S), \operatorname{Irr} S)$.

Пусть $a \in 0_M$. Тогда $a \in 0_V$ для некоторой окрестности $V = D(A)$ точки M. Поскольку $0_V = \cap\{P \in \operatorname{Irr} S : P \not\supseteq A\}$, то элемент a лежит в каждом неприводимом l-идеале, не содержащем A, в частности, $a \in M$. С учетом леммы 10, $a \in 0(M)$. Обратно, пусть $a \in 0(M) = M$, и предположим, что $a \notin 0_M$. Тогда $a \notin 0_V$ для любой окрестности V точки M. По лемме 12 $a^* \nsubseteq M$, поэтому при $V = D(a^*)$ получаем $a \notin 0_V$. Следовательно, a не лежит в некотором неприводимом $P \in D(a^*)$. Тогда $a^* \nsubseteq P$, противоречие с неприводимостью l-идеала P. Сформулируем этот результат и опишем более общий для неприводимого l-идеала.

Лемма 13. *Пусть S — f-полукольца, M — минимальный неприводимый, а P — неприводимый l-идеалы.*

(1) $0_M = 0(M) = M$.

(2) $0(P) \subseteq 0_P = \cap\{A \in \operatorname{Min} S : A \subseteq P\}$.

Доказательство. (1) доказано выше.

(2) Пусть $D(s)$ — произвольное открытое базисное множество из $\operatorname{Irr} S$. Заметим, что если l-идеал содержится в минимальном неприводимом l-идеале, то, учитывая лемму 3, он совпадает с пересечением всех минимальных неприводимых, его содержащих. Поэтому по лемме 12 получаем:

$$\begin{aligned} 0_{D(s)} &= \cap\{Q \in \operatorname{Irr} S : Q \in D(s)\} \\ &= \cap\{Q \in \operatorname{Irr} S : Q \not\ni s\} \\ &= \cap\{A \in \operatorname{Min} S : A \not\ni s\} \\ &= \cap\{A \in \operatorname{Min} S : A \supseteq s^*\} \\ &= \cap\{Q \in \operatorname{Irr} S : Q \supseteq s^*\} = s^*. \end{aligned}$$

Далее:

$$\begin{aligned}0_P &= \cup\{0_V : V \ni P\}\\ &= \cup\{0_{D(s)} : D(s) \ni P\}\\ &= \cup\{0_{D(s)} : s \notin P\}\\ &= \cup\{s^* : s \notin P\}.\end{aligned}$$

Пусть сейчас A — произвольный минимальный неприводимый l-идеал, лежащий в P. Если $s \notin P$, то $s \notin A$, поэтому $s^* \subseteq A$. Следовательно, $0_P = \cup\{s^* : s \notin P\} \subseteq \cap\{A \in \operatorname{Min} S : A \subseteq P\}$. Обратно, пусть $b \notin 0_P$. Тогда $|b| \notin a^*$, т. е. $|b| \wedge |a| \neq 0$, для любого $a \notin P$. Поэтому f-систему $F = S^+ \setminus P$ можно расширить с помощью элемента $|b|$ до f-системы $F' = F \cup \{|b|\} \cup \{|b| \wedge |a| : a \notin P\}$, а F' — до максимальной f-системы. Поэтому существует минимальный неприводимый l-идеал, лежащий в P и не содержащий элемент b. Значит, $0_P \supseteq \cap\{A \in \operatorname{Min} S : A \subseteq P\}$. Включение $0(P) \subseteq 0_P$ очевидно. □

По лемме 12 для любого элемента a f-полукольца S множество $U_a = \{M \in \operatorname{Min} S : a \in M\} = \operatorname{Min} S \setminus d(a) = d(a^*)$ открыто в $\operatorname{Min} S$, а это означает, что семейство всех минимальных неприводимых l-идеалов открыто. Соответствующий пучок $(L(S), \operatorname{Min} S)$ является ограничением рассмотренного выше пучка $(L(S), \operatorname{Irr} S)$, а по лемме 13 — ограничением пучка $(\Pi(S), \operatorname{Irr} S)$.

Пучок $(L(S), \operatorname{Min} S)$ обладает некоторыми замечательными свойствами. Его слои, во-первых, по предложению 4 являются линейно упорядоченными f-полукольцами, а по леммам 9 и 12 $\operatorname{Min} S$ является хаусдорфовым пространством с базой открыто-замкнутых множеств вида $d(a), a \in S$.

Во-вторых, накрывающее пространство $L(S)$ хаусдорфово (пучок с хаусдорфовым накрывающим пространством называется *хаусдорфовым*). Действительно, пусть $x, y \in L(S)$ — различные точки накрывающего пространства. Если они лежат в разных слоях L_M и L_N, то M и N имеют непересекающиеся окрестности U и V в хаусдорфовом пространстве $\operatorname{Min} S$. В силу факторности пучка $L(S)$ точки x, y имеют вид $\hat{a}(M)$ и $\hat{b}(N)$ для некоторых $a, b \in S$. Поэтому $\hat{a}|_U$ и $\hat{b}|_V$ являются непересекающимися окрестностями точек x и y соответственно. Если точки $x = \hat{a}(N)$ и $y = \hat{b}(N)$ различны, но лежат в одном слое, то $a * b \notin N$. Рассмотрим носитель сечения $\widehat{a * b}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\widehat{a * b}) &= \{M \in \operatorname{Min} S : \hat{a}(M) \neq \hat{b}(M)\}\\ &= \{M \in \operatorname{Min} S : a * b \notin M\} = d(a * b)\end{aligned}$$

— открытое множество в $\operatorname{Min} S$, и $N \in \operatorname{supp}(\widehat{a * b}) = W$. Вновь нашлись непересекающиеся окрестности $\hat{a}|_W$ и $\hat{b}|_W$ точек x и y.

Замечание 1. Если пучок (P, X) хаусдорфов, то множество, на котором совпадают два произвольных сечения, не только открыто, но и замкнуто (см., например, [22, §1, 1.2]). В случае нашего пучка при обосновании хаусдорфовости можно ограничиться рассмотрением сечений вида $\hat{a}, a \in S$. Причина этого заключается в том, что через каждую точку накрывающего пространства проходит сечение указанного вида.

Предложение 8. *Пусть S — f-полукольцо, $(L(S), \operatorname{Min} S)$ — пучок, индуцированный открытым семейством минимальных неприводимых l-идеалов.*

(1) *$(L(S), \operatorname{Min} S)$ — хаусдорфов пучок линейно упорядоченных drl-полуколец.*

(2) $\operatorname{Min} S$ — *нульмерное хаусдорфово пространство.*

(3) S *изоморфно f-полукольцу* $\hat{S}$ *глобальных сечений пучка* $(L(S), \operatorname{Min} S)$.

Доказательство. Первые два утверждения обоснованы выше, а (3) верно, поскольку пересечение всех минимальных неприводимых l-идеалов равно нулю. □

Определение 7. *Назовем f-полукольцо S риккартовым, если $a^* + a^{**} = S$ для любого $a \in S$.*

Лемма 14. *Каждый неприводимый l-идеал риккартова f-полукольца S содержит однозначно определенный минимальный неприводимый l-идеал.*

Доказательство. Пусть $P \in \operatorname{Irr} S$ и допустим, $M \neq N$ — минимальные неприводимые l-идеалы, лежащие в P. Тогда найдется элемент $a \in M \setminus N$. По лемме 12 получаем $a^* \subseteq N \setminus M$ и поэтому $a^{**} \subseteq M$. Тогда $S = a^* + a^{**} \subseteq N + M \subseteq P$, противоречие. □

Подпространство Y топологического пространства X называется *ретрактом*, если существует *ретракция* — непрерывное отображение $\varphi : X \to Y$ такое, что $\varphi(y) = y$ для любого $y \in Y$.

Предложение 9. $\operatorname{Min} S$ *является ретрактом пространства* $\operatorname{Irr} S$ *для любого риккартова f-полукольца S; ретракция* $\varphi : \operatorname{Irr} S \to \operatorname{Min} S$ *является открытым отображением.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : \operatorname{Irr} S \to \operatorname{Min} S$, переводящее неприводимый l-идеал P в минимальный неприводимый l-идеал M_P, лежащий в P; по предыдущей лемме такой l-идеал M_P для $P \in \operatorname{Irr} S$ определяется однозначно. Для произвольных $a \in S$ и $M \in \operatorname{Min} S$ по лемме 12 из $a \notin M$ следует $a^* \subseteq M$. Поскольку $S = a^* + a^{**} \not\subseteq M$, то $a^{**} \not\subseteq M$. Если же $a \in M$, то $a^* \not\subseteq M$, а значит, $a^{**} \subseteq M$ в силу неприводимости M. Следовательно, для любого минимального неприводимого l-идеала M риккартова f-полукольца S условия $a \in M$ и $a^{**} \subseteq M$ равносильны. А это означает $d(a) = d(a^{**})$ для любого $a \in S$. Пусть $U = d(a) = d(a^{**})$ — произвольное базисное открытое подмножество в $\operatorname{Min} S$. Покажем, что $\varphi^{-1}(U)$ открыто в $\operatorname{Irr} S$. Если $P \in \varphi^{-1}(d(a^{**}))$, то $\varphi(P) = M_P \in d(a^{**})$ и $M_P \not\supseteq a^{**}$. В силу неприводимости $a^* \subseteq M_P$, и следовательно, $a^* \subseteq P$, а это влечет $a^{**} \not\subseteq P$. Получили, что $P \in D(a^{**})$. Обратно, пусть $P \in D(a^{**})$. Тогда $P \not\supseteq a^{**}$, откуда $M_P \in d(a^{**})$ и $P \in \varphi^{-1}(d(a^{**}))$. Доказали, что $\varphi^{-1}(U) = D(a^{**})$, а тем самым — непрерывность отображения φ.

Очевидно, что для любого $a \in S$ верно $d(a) \subseteq \varphi(D(a))$. Из справедливости импликаций $P \in D(a) \Rightarrow a \notin P \Rightarrow a \notin M_P \Rightarrow M_P \in d(a)$ вытекает $\varphi(D(a)) \subseteq d(a)$. Получили, что для любого $a \in S$ выполняется $\varphi(D(a)) = d(a)$, следовательно, отображение φ открыто. □

Следующее утверждение можно считать неким обоснованием выбора нами терминологии (см. [25, с. 519], [14, § 3.4]).

Предложение 10. *Пусть S — f-полукольцо с 1, тогда равносильны утверждения:*

(1) S — *риккартово f-полукольцо;*

(2) *для любого $a \in S$ найдется такой центральный идемпотент $e \in S$, что $a^* = (e)$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $a^* + a^{**} = S$. Для произвольных элементов $x \in a^*$ и $y \in a^{**}$ из $|x| \wedge |y| = 0$ следует $0 = |x||y| = |xy|$, откуда $xy = 0$; аналогично, $yx = 0$. Поскольку $e + f = 1$ для некоторых $e \in a^*$ и $f \in a^{**}$, то $e = e(e+f) = e^2$. Покажем, что элемент $s = g + h$ для произвольных $g \in a^*, h \in a^{**}$ перестановочен с идемпотентом e. Во-первых, $eg = eg(e+f) = ege + egf = ege$ и $ge = (e+f)ge = ege$. Во-вторых, $es = eg + eh = eg$ и $se = ge + he = ge$. Следовательно, $se = ege = es$, и e — центральный идемпотент. Если $y \in a^*$, то $yf = 0$, откуда $y = y(e+f) = ye \in (e)$. Поскольку очевидно включение $(e) \subseteq a^*$, то $a^* = (e)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $a^* = (e)$ для центрального идемпотента e. По [10, theorem 3.1] элемент $1 - e$ также является центральным идемпотентом, выполняется $0 \leq e, 1 - e \leq 1$ и $e \wedge (1 - e) = 0$. Тогда $e + (1 - e) = 1$ по [4, lemma 8]. Очевидно, $1 - e \in a^{**}$, и поэтому $a^* + a^{**} = S$. $\square$

Через $\overline{Y}$ обозначим замыкание подмножества Y топологического пространства.

Предложение 11. *Пусть S — f-полукольцо. Равносильны условия:*

(1) *для любых $a \in S$ и $b \in a^*$ выполняется $a^* + b^* = S$;*

(2) *$0(P)$ — неприводимый l-идеал для любого $P \in \operatorname{Irr} S$;*

(3) *$0(P)$ — минимальный неприводимый l-идеал для любого $P \in \operatorname{Irr} S$;*

(4) *$0(M)$ — минимальный неприводимый l-идеал для любого $M \in \operatorname{Max} S$;*

(5) *$D(a) \cap D(b) = \varnothing \Rightarrow \overline{D(a)} \cap \overline{D(b)} = \varnothing$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $a \wedge b \in 0(P)$, тогда $(a \wedge b) \wedge c = 0$ для некоторого $c \notin P$. Отсюда следует, что $b \wedge c \in a^*$, поэтому $a^* + (b \wedge c)^* = S$ по условию. Неприводимый l-идеал является собственным, поэтому $e + f \notin P$ для некоторых $e \in a^*, f \in (b \wedge c)^*$. Предположим, что $a \notin 0(P)$. Тогда $a^* \subseteq P$ и следовательно, $e \in P$, а $f \notin P$. В силу неприводимости P получаем $c \wedge f \notin P$ и так как $b \wedge (c \wedge f) = 0$, то $b \in 0(P)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $P \in \operatorname{Irr} S$, и A — минимальный неприводимый l-идеал, лежащий в P. Поскольку $0(P) \subseteq 0(A)$ и $0(A) \in \operatorname{Min} S$ по лемме 10, то неприводимость l-идеала $0(P)$ влечет $0(P) = 0(A) = A \in \operatorname{Min} S$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что для некоторых $a \in S$ и $b \in a^*$ выполняется $a^* + b^* \neq S$. Тогда l-идеал $a^* + b^*$ лежит в некотором максимальном l-идеале M. Заметим сразу, что a^* и b^* лежат в M. По условию $0(M) \in \operatorname{Min} S$ и в силу его неприводимости и условия $|a| \wedge |b| = 0$ хотя бы один элементов, допустим a, лежит в $0(M)$. Но это влечет $a^* \not\subseteq M$, противоречие.

(1) $\Rightarrow$ (5). Условие $D(a) \cap D(b) = \varnothing$ равносильно $(a) \cap (b) = 0$ и, значит, условию $|a| \wedge |b| = 0$.

Покажем, что $\overline{D(a)} = \{P' \in \operatorname{Irr} S : P' \supseteq a^*\}$; множество в правой части доказываемого равенства обозначим через T. Если $P \in D(a)$, то $a \notin P$, и следовательно, $a^* \subseteq P$. Получили, что $D(a) \subseteq T$, а поскольку множество T замкнуто, то $\overline{D(a)} \subseteq T$. Обратно, пусть $P \notin \overline{D(a)}$. Рассмотрим некоторое базисное открытое множество $D(c)$, содержащее P и не пресекающееся с $\overline{D(a)}$. Но тогда $D(a) \cap D(c) = \varnothing$, откуда $|a| \wedge |c| = 0$, и $c \in a^*$. Поскольку $c \notin P$, то $a^* \not\subseteq P$, следовательно, $P \notin T$ и $T \subseteq \overline{D(a)}$.

Вернемся к доказательству импликации. Если неприводимый l-идеал P лежит в $\overline{D(a)} \cap \overline{D(b)}$, то P содержит как l-идеал a^*, так и l-идеал b^*, значит

$a^* + b^* \subseteq P$. Но поскольку $|a| \wedge |b| = 0$, то $a^* + b^* = S$, противоречие, показывающее, что $\overline{D(a)} \cap \overline{D(b)} = \varnothing$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $b \in a^*$, тогда $|a| \wedge |b| = 0$, следовательно, $D(a) \cap D(b) = \varnothing$ и по условию $\overline{D(a)} \cap \overline{D(b)} = \varnothing$. Но тогда произвольный неприводимый l-идеал P не содержит хотя бы один из l-идеалов a^* и b^*. Поэтому $a^* + b^* = S$. □

Указанные в предложении условия задают класс f-полуколец, содержащий риккартовы f-полукольца. Действительно, для произвольного элемента a риккартова f-полукольца S из $b \in a^*$, следует $a^{**} \subseteq b^*$, поэтому $S = a^* + a^{**} \subseteq a^* + b^*$.

Рассмотрим сейчас представление риккартова f-полукольца S сечениями пучка на минимальном спектре. Пространство $\operatorname{Irr} S$ полно и плотно в себе, а отображение $\varphi : \operatorname{Irr} S \to \operatorname{Min} S$ для риккартова f-полукольца является ретракцией. Поэтому, положив $X = \operatorname{Irr} S$ и $Y = \operatorname{Min} S$, получает пучок $(\Pi(S), Y)$, а именно, ограничение пучка $\Pi'(S)$ на пространство $\operatorname{Min} S$. Как было выяснено выше, этот пучок совпадает с пучком

$$(L(S), \operatorname{Min} S), \text{ где } L(S) = \dot\cup\{S/M : M \in \operatorname{Min} S\}.$$

Теорема 3. *Пусть S — риккартово f-полукольцо.*

(1) *$(L(S), \operatorname{Min} S)$ — хаусдорфов пучок линейно упорядоченных f-полуколец.*

(2) *$\operatorname{Min} S$ — хаусдорфово нульмерное пространство с базой компактных множеств $d(a), a \in S$.*

(3) *S изоморфно f-полукольцу всех глобальных сечений пучка $L(S)$ с компактными носителями.*

(4) *Если S с формальной единицей, то $\operatorname{Min} S$ — нульмерный компакт, и S изоморфно f-полукольцу всех глобальных сечений пучка $(L(S), \operatorname{Min} S)$*

(5) *Если (P, X) — хаусдорфов пучок линейно упорядоченных f-полуколец, то f-полукольцо $\Gamma_{00}(P)$ всех глобальных сечений с компактными носителями риккартово.*

Доказательство. Осталось показать справедливость утверждения (5). Ясно, что $\Gamma_{00}(P)$ является подполукольцом полукольца всех глобальных сечений. Покажем, что в случае пучка линейно упорядоченных f-полуколец $\Gamma_{00}(P)$ становится l-идеалом в $\Gamma(P)$. Сначала заметим, что для произвольных сечений $u, v \in \Gamma^+(P)$

$$\operatorname{supp}(u \wedge v) = \operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v.$$

Пусть далее $|x| \leq |y|$ для $x \in \Gamma(P)$ и $y \in \Gamma_{00}(P)$. Тогда $\operatorname{supp}|x| = \operatorname{supp}(|x| \wedge |y|) = \operatorname{supp}|x| \cap \operatorname{supp}|y| \subseteq \operatorname{supp}|y|$. Носитель $\operatorname{supp}|x| = \operatorname{supp} x$ — замкнутое подмножество компактного множества, поэтому $x \in \Gamma_{00}(P)$. По таким же соображениям из $\operatorname{supp} ys \subseteq \operatorname{supp} y$ для произвольных $y \in \Gamma_{00}(P), s \in \Gamma(P)$ следует $ys \in \Gamma_{00}(P)$. Итак, $\Gamma_{00}(P)$ — l-идеал.

Рассмотрим произвольное сечение a с компактным носителем. В силу хаусдорфовости пучка носитель $\operatorname{supp} a$ является открыто-замкнутым множеством в X (см. замечание 1). Для произвольного $s \in \Gamma_{00}(P)$ возникают два глобальных сечения:

$$s_1 = \begin{cases} 0, & \text{на } \operatorname{supp} a \\ s, & \text{на } X \setminus \operatorname{supp} a, \end{cases} \quad s_2 = \begin{cases} s, & \text{на } \operatorname{supp} a \\ 0, & \text{на } X \setminus \operatorname{supp} a. \end{cases}$$

Поскольку для любого $b \in a^*$ выполняется $\operatorname{supp} b \subseteq X \setminus \operatorname{supp} a$, то носители сечений b и s_2 не пересекаются, поэтому $s_2 \in b^*$, а отсюда следует $s_2 \in a^{**}$. Похожими рассуждениями получаем, что $s_1 \in a^*$. Кроме того, носители $\operatorname{supp} s_1$ и $\operatorname{supp} s_2$ лежат в компактных множествах $\operatorname{supp} s$ и $\operatorname{supp} a$ соответственно, поэтому компактны. Для сечения $a \in \Gamma_{00}(P)$ множество всех ортогональных к a элементов из $\Gamma_{00}(P)$ — это l-идеал $a^*_{00} = a^* \cap \Gamma_{00}(P)$. Тогда $s = s_1 + s_2 \in a^*_{00} + a^{**}_{00}$, и получили, что $a^*_{00} + a^{**}_{00} = \Gamma_{00}(P)$, т. е. $\Gamma_{00}(P)$ — риккартово f-полукольцо.

Случай, когда X — компактное множество, очевиден. □

Определение 8. *f-Полукольцо S назовем бирегулярным, если каждый главный l-идеал из S выделяется прямым слагаемым.*

Пусть l-идеал (a) выделяется прямым слагаемым, и $(a) \oplus A = S$ для некоторого l-идеала A. Из $(a) \cap A = 0$ получаем, что $A \subseteq a^*$. Поэтому $(a) + a^* = S$. Решетка l-идеалов drl-полукольца дистрибутивна, поэтому каждый l-идеал имеет не более одного дополнения, следовательно, $A = a^*$. Таким образом, *f-полукольцо бирегулярно в точности тогда, когда удовлетворяет условию $(a) + a^* = S$ для любого $a \in S$.*

При наличии единицы f-полукольцо S бирегулярно тогда и только тогда, когда любой главный l-идеал в S порождается центральным идемпотентом. Действительно, пусть S — бирегулярное f-полукольцо с 1, и $(a) + a^* = S$. Для подходящих $e \in (a)$, $f \in a^*$ имеем $e + f = 1$. Поскольку $|e| \wedge |f| = 0$, то $ef = 0$, а также $asf = 0$ для любого $s \in S$. Тогда $e = e^2 + ef = e^2$ и $ese + esf = es$, откуда $ese = es$. Аналогично показывается, что $ese = se$. Получили, что e — центральный идемпотент. Далее, $a = ea + fa = ea$, поскольку $f \in a^*$. Тогда $a \in (e)$, откуда следует $(a) = (e)$. Обратно, пусть $a \in S$ и $(a) = (e)$ для некоторого центрального идемпотента e. Так же как и при доказательстве предложения 10 центральные идемпотенты e и $1 - e$ ортогональны и $e + (1 - e) = 1$. Поэтому $(a) \oplus (1 - e) = (e) \oplus (1 - e) = S$.

Определение 9. *Неодноэлементное f-полукольцо S называется l-простым, если S не сдержит собственных l-идеалов, отличных от нулевого.*

Понятно, что l-простое f-полукольцо является линейно упорядоченным.

Предложение 12. *Пусть S — f-полукольцо. Равносильны условия:*

(1) *для любого $a \in S$ выполняется $(a) + a^* = S$;*

(2) *каждый главный l-идеал из S выделяется прямым слагаемым;*

(3) *каждый неприводимый l-идеал является максимальным;*

(4) *каждый линейно упорядоченный гомоморфный образ l-полукольца S является l-простым полукольцом;*

(5) *каждый собственный l-идеал A является пересечением всех максимальных l-идеалов, содержащих A.*

Доказательство. Равносильность (1) ⇔ (2) доказана выше.

Линейная упорядоченность гомоморфного образа равносильна по предложению 3 тому, что ядро гомоморфизма является неприводимым l-идеалом. Отсюда следует (3) ⇔ (4).

(1) ⇒ (3). Пусть $P \in \operatorname{Irr} S$ и $a \notin P$. Тогда $a^* \subseteq P$. Получаем $S = (a) + a^* \subseteq (a) + P$, т. е. P не содержится строго ни в каком собственном l-идеале.

Импликация (3) ⇒ (5) очевидна.

(5) $\Rightarrow$ (1). Допустим, $(a)+a^* \neq S$ для некоторого $a \in S$, и поэтому $(a)+a^*$ лежит в некотором неприводимом l-идеале P. По лемме 12 P не может быть минимальным неприводимым l-идеалом. Для минимального неприводимого l-идеала A, лежащего в P, множество l-идеалов, содержащих A, образуют цепь (предложение 3), поэтому A не может быть пересечением максимальных l-идеалов. $\square$

Для произвольного f-полукольца S и $a \in S$ выполняется $(a) \subseteq a^{**}$, поэтому бирегулярное f-полукольцо является риккартовым. Кроме того, бирегулярное f-полукольцо является гельфандовым. Действительно, пусть S — бирегулярное f-полукольцо и $M \neq N$ — различные максимальные l-идеалы из S. По предыдущему предложению $\operatorname{Min} S = \operatorname{Irr} S = \operatorname{Max} S$. Тогда для элемента $a \in M \setminus N$ выполняется $a \in 0(M)$, поэтому $a^* \nsubseteq M$. Возьмем произвольный элемент $b \in a^* \setminus M$. Если $b \notin N$, то для $c \in N \setminus M$ выполняется $|c| \wedge |b| \in N \setminus M$ в силу выпуклости N и неприводимости M. Поскольку $|a| \wedge (|c| \wedge |b|) = 0$, то S — гельфандово f-полукольцо.

Таким образом, пучки $(\Pi(S), \operatorname{Irr} S)$, $(\Pi'(S), \operatorname{Min} S)$ и $(L(S), \operatorname{Max} S)$ для бирегулярного f-полукольца S совпадают. Слои пучков $S/M, M \in \operatorname{Max} S$ являются l-простыми f-полукольцами.

Теорема 4. *Пусть S — бирегулярное f-полукольцо S.*

(1) $(L(S), \operatorname{Min} S)$ — *хаусдорфов пучок l-простых, следовательно линейно упорядоченных, f-полуколец.*

(2) $\operatorname{Min} S = \operatorname{Irr} S = \operatorname{Max} S$ — *хаусдорфово нульмерное пространство с базой компактных множеств $d(a), a \in S$.*

(3) *S изоморфно f-полукольцу всех глобальных сечений пучка $L(S)$ с компактными носителями.*

(4) *Если S с формальной единицей, то* $\operatorname{Min} S$ *— нульмерный компакт, и S изоморфно f-полукольцу всех глобальных сечений пучка* $(L(S), \operatorname{Min} S)$.

(5) *Если (P, X) — хаусдорфов пучок l-простых f-полуколец, то f-полукольцо $\Gamma_{00}(P)$ всех глобальных сечений с компактными носителями бирегулярно.*

Доказательство. Как и в теореме 3, и опираясь на нее, докажем утверждение, обратное к теореме о представлении бирегулярного f-полукольца. Пусть (P, X) — хаусдорфов пучок l-простых f-полуколец, и пусть $a \in \Gamma_{00}(P)$. Слои пучка линейно упорядочены, поэтому по теореме 3 $\Gamma_{00}(P)$ — риккартово. Для произвольного $s \in \Gamma_{00}(P)$ найдутся такие $s_1 \in a^*$ и $s_2 \in a^{**}$, что $s = s_1 + s_2$. Нам достаточно показать, что $s_2 \in (a)$. Не умаляя общности будем считать, что $a \geq 0$. Вспомним, что $\operatorname{supp} s_2 \subseteq \operatorname{supp} a$. Для каждой точки $x \in \operatorname{supp} a$ имеем $a(x) \neq 0$, поэтому главный l-идеал, порожденный $a(x)$, совпадает со всем слоем P_x. Пусть $|s_2(x)| = (m_x a + \alpha_x a + a\beta_x + \gamma_x a\delta_x)(x)$ для подходящих целого неотрицательного m_x и $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x, \delta_x \in \Gamma^+(P)$. Сечение в правой части равенства совпадает с $|s_2|$ на некоторой окрестности $U_x \ni x$, и $\{U_x : x \in \operatorname{supp} a\}$ покрывают компактное множество $\operatorname{supp} a$. Выберем конечное подпокрытие $\{U_1, \ldots, U_k\}$ и соответствующие сечения $m_i a + \alpha_i a + a\beta_i + \gamma_i a\delta_i$, каждое из которых совпадает с $|s_2|$ на U_i. Положим:

$$\begin{aligned} m &= \max m_i, \\ \alpha &= \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_k, \\ \beta &= \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_k, \\ \gamma &= \gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_k, \\ \delta &= \delta_1 \vee \ldots \vee \delta_k. \end{aligned}$$

Очевидно, что $ma + \alpha a + a\beta + \gamma a \delta \geq |s_2|$ на каждом U_i, следовательно, на всем $\operatorname{supp} a$. Получили, что $s_2 \in (a)$, поэтому $s = s_1 + s_2 \in a^* + (a)$, и $\Gamma_{00}(P)$ — бирегулярное f-полукольцо. □

Определение 10. *f-полукольцо S с 1 назовем строго регулярным, если для любого $a \in S$ найдется такой $s \in S$, что $a^2 s = a$.*

Лемма 15. *Если в drl-полугруппе $a - b = 0 = b - a$, то $a = b$.*

Доказательство. Из $a - b = 0$ следует $a \leq b$ по [4, lemma 7], а из $b - a = 0$ следует $b \leq a$, поэтому $a = b$. □

Предложение 13. *Пусть S — строго регулярное f-полукольцо.*

(1) *S — полукольцо без нильпотентных элементов.*

(2) *Для любых $a, b, c \in S$ справедливо $ab = ac \Leftrightarrow ba = ca$.*

(3) *Каждый идемпотент из S централен.*

(4) *Каждый главный правый (левый) l-идеал является l-идеалом, порожденным центральным идемпотентом.*

(5) *Для любого $M \in \operatorname{Max} S$ S/M является f-полутелом.*

Доказательство. (1) Пусть $a^n = 0$ для целого $n \geq 2$. Тогда найдется такой элемент $s \in S$, что $(a^{n-1})^2 s = a^{n-1}$. Получаем, $a^{n-1} = 0$, и по индукции $a = 0$.

(2) Пусть $xy = 0$. Тогда $(yx)^2 = y(xy)x = 0$, откуда $yx = 0$. Пусть сейчас $ab = ac$. Тогда $a(b-c) = 0$ и $a(c-b) = 0$. По доказанному получаем $(b-c)a = 0$ и $(c-b)a = 0$, следовательно, $ba - ca = 0$ и $ca - ba = 0$. По лемме 15 $ba = ca$. Обратная импликация доказывается таким же образом.

(3) Для любых $e = e^2 \in S$ и $s \in S$ из $es = ees$ по утверждению (2) следует $se = ese$. Аналогично, $es = ese$, значит, $es = se$.

(4) Для $a \in S$ найдется такой $s \in S$, что $asa = a$. Центральный идемпотент $e = as$ лежит в aS, поэтому $eS \subseteq aS$. А поскольку $a = ea$, то $aS \subseteq eS$. Следовательно, $aS = eS = Se$ — l-идеал.

(5) Пусть $\bar{a}, a \in S,$ — произвольный ненулевой элемент из S/M. Тогда $a \notin M$. Поскольку aS является l-идеалом, то $aS + M = S$, и $as + m = 1$ для некоторых $s \in S$ и $m \in M$. Получаем $\bar{a}\bar{s} = \bar{1}$. Обратимость слева элемента $\bar{a}$ доказывается таким же образом благодаря тому, что Sa — l-идеал. □

Напомним, что в случае f-полукольца с единицей бирегулярность равносильна порождаемости любого главного l-идеала центральным идемпотентом. Поэтому свойство (4) доказанного предложения гарантирует, что строго регулярное f-полукольцо является бирегулярным. Получаем, следовательно, уточнение теоремы 4 для строго регулярного f-полукольца.

Теорема 5. *f-Полукольцо S строго регулярно тогда и только тогда, когда S изоморфно f-полукольцу всех глобальных сечений хаусдорфова пучка P линейно упорядоченных f-полутел над нульмерным компактом X.*

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что S изоморфно f-полукольцу всех глобальных сечений пучка $(L(S), \mathrm{Min}\, S)$. По предложению 13 слои пучка — f-полутела, а компактность базисного пространства $\mathrm{Min}\, S = \mathrm{Max}\, S$ следует из наличия в S единицы. Обратно, пусть (P, X) — пучок f-полутел на нульмерном компакте X. Для любого $a \in \Gamma(P)$ и любой точки $x \in \mathrm{supp}\, a$ справедливо $a(x) \neq 0$. Стандартным рассуждениями получаем сечения $b_1, \ldots, b_k \in \Gamma(P)$ и разбиение $\mathrm{supp}\, a$ на такие открыто-замкнутые множества $U_1, \ldots, U_k$, что $ab_i = 1$ на U_i. Положив

$$b = \begin{cases} b_i & \text{на } U_i \\ 0 & \text{на } X \setminus \mathrm{supp}\, a, \end{cases}$$

получим, $b \in \Gamma(P)$ и $a^2 b = a$ на всем пространстве X. Следовательно, f-полукольцо $\Gamma(P)$ строго регулярно. $\square$

Замечание 2. В формулировке теоремы указанная линейная упорядоченность является необходимым условием f-полутел. Действительно, предположим, что в f-полутеле S есть два несравнимых элемента. Как и в предложении 3 отсюда следует существование таких положительных несравнимых элементов $u, v \in S$, что $u \wedge v = 0$. Но тогда $uv = 0$, и нашлись делители нуля.

References

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967. MR0227053

[2] L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris, 1963. MR0171864

[3] F. Paoli, C. Tsinakis, *On Birkhoff's common abstraction problem*, Studia Logica, **100** (2012), 1079–1105. MR3001048

[4] K. L. N. Swamy, *Dually residuated lattice ordered semigroups*, Math. Ann., **159** (1965), 105–114. MR0183797

[5] K. L. N. Swamy, *Dually residuated lattice ordered semigroups, II* , Math. Ann., **160** (1965), 64–71. MR0191851

[6] N. A. Kovar, *A general theory of dually residuated lattice-ordered monoids*, Ph.D Thests, Palacky Univ., Olomouc., 1996.

[7] T. Kovar, *Two remarks on dually residuated lattice ordered semigroups*, Math. Slovaka, **49** (1999), 17–18. MR1804468

[8] J. Kuhr, *Representable dually residuated lattice-ordered monoids*, Discuss. Math. General Alg. and Appl., **23** (2003), 115–123. MR2070377

[9] O. V. Chermnykh, *On drl-semigroups and drl-semirings.* Chebyshevskiy sbornik, **14**:4 (2016), 167–179.

[10] P. R. Rao, *Lattice ordered semirings*, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., **9** (1981), 119–149. Zbl 0476.06018

[11] A. Grothendieck, J. Dieudonne, *Elements de Geometrie Algebrique 1*, I.H.E.S., Publ. Math. **4**, Paris, 1960. MR0163908

[12] V. V. Chermnykh, *Representation of positive semirings by sections*, Uspehi matemat. nauk, **47**:5 (1992), 193–194. MR1211839

[13] V. V. Chermnykh, *Sheaf representations of semirings*, Uspehi matemat. nauk, **48**:5 (1993), 185–185. MR1258775

[14] V. V. Chermnykh, *Functional representation of semirings*, Fundament. i prikl. matemat., **17**:3 (2012), 111–227. MR2954727

[15] E. M. Vechtomov, A. V. Cheraneva, *Semifilds and their properties*, Fundament. i prikl. matemat., **14**:5 (2008), 3–54.

[16] K. Keimel, *The representation of lattice ordered groups and rings by sections in sheaves*, Lect. Notes Math., **248**, Springer–Verlag, 1971. MR0422107

[17] J. Dauns, *Representation of l-groups and f-rings*, Pacific J. Math., **31** (1969), 629–654. MR0255468

[18] K. Keimel, *Representations of lattice-ordered rings*, Proc Univ. of Houston. Lattice Theory Conf., (1973), 277–293. MR0401594

[19] J. Lambek, *On the representation of modules by sheaves of factor modules*, Can. Math. Bull., **41**:3 (1971), 359–368. MR0313324

[20] J. S. Golan, *Semirings and their applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999. MR1746739

[21] B. A. Davey, *Sheaf spaces and sheaves of universal algebras*, Math. Z., **134**:4 (1973), 275–290. MR0330006

[22] G. Bredon *Sheaf theory*, McGray–Hill, New York, 1967. MR0221500

[23] G. Birkhoff, R. S. Pierce, *Lattice–ordered rings*, An. Acad. Brasil. Ci., **28** (1956), 41–69. MR0080099

[24] A. V. Miklin, V. V. Chermnykh, *On drl-semirings*, Matematicheskiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona, **16** (2014), 87–95.

[25] *General algebra 1*, (By ed. L. A. Skornyakov), Nauka, Moscow, 1990. Zbl 0751.00002

Vasiliy Vladimirovich Chermnykh
Vyatka state universite,
Moskovskaya, 36,
610000, Kirov, Russia
E-mail address: vv146@mail.ru

Oksana Vladimirovna Chermnykh
Vyatka state universite,
Moskovskaya, 36,
610000, Kirov, Russia
E-mail address: vv146@mail.ru