S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 98–111 (2017) УДК 519.175
DOI 10.17377/semi.2017.14.011 MSC 05C30

ОБ ОДНОМ РЕКУРРЕНТНОМ СООТНОШЕНИИ В ЗАДАЧЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

В.И. РОДИОНОВ

Abstract. In the previous paper of the author the formula reduced the count of the number $T_0(n)$ of posets defined on n-set to the calculation of the numbers $W(p_1,\dots,p_k)$ of posets of a special form has been proved $(p_1+\ldots+p_k=n)$. In present paper we obtain the relations of recurrent nature connecting the individual values of $W(p_1,\dots,p_k)$ among themselves. As a result of these relations the partially folded formula for the number $T_0(n)$ is obtained.

Keywords: graph enumeration, poset, finite topology.

1. Введение

В работе [1] доказана формула

$$T_0(n)=\sum_{p_1+\ldots+p_k=n}(-1)^{n-k}\,\frac{n!}{p_1!\ldots p_k!}\,W(p_1,\dots,p_k), \tag{1}$$

сводящая подсчет числа $T_0(n)$ всех частичных порядков, определенных на n-множестве (помеченных T_0-топологий), к вычислению чисел $W(p_1,\dots,p_k)$ частичных порядков специального вида. Суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1,\dots,p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1+\ldots+p_k=n$. Показано, что если D_k — группа диэдра, то для любых $p_1,\dots,p_k\in\mathbb{N}$ и $\pi\in D_k$ имеет место равенство

$$W(\,p_{\pi(1)},\dots,p_{\pi(k)})=W(p_1,\dots,p_k). \tag{2}$$

В настоящей работе в дополнение к (2) получены соотношения рекуррентного характера, связывающие между собой отдельные значения $W(p_1,\dots,p_k)$.

Rodionov, V.I., On recurrence relation in the problem of enumeration of finite posets.

Поступила 1 октября 2016 г., опубликована 10 февраля 2017 г.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Всякое бинарное отношение $\sigma \subseteq X^2$ (где X — произвольное множество) порождает характеристическую функцию $\sigma' : X^2 \to \{0,1\}$ (если $(x,y) \in \sigma$, то $\sigma'(x,y) = 1$, иначе $\sigma'(x,y) = 0$), и это отображение биективно. В силу этого обстоятельства мы называем подмножества $\sigma \subseteq X^2$ как отношениями, так и функциями (иногда орграфами). В случае $\operatorname{card} X < \infty$ характеристическую функцию можно интерпретировать как бинарную матрицу (матрицу, состоящую из 0 и 1). В работе применяются оба представления.

Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X. В терминах характеристических функций справедливо утверждение: $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} \sigma(x,x) = 1 \ \textit{для всех } x \in X, \\ \sigma(x,y)\,\sigma(y,z) \leqslant \sigma(x,z) \ \textit{для всех } x,y,z \in X, \\ \sigma(x,y)\,\sigma(y,x) = \delta_{xy} \ \textit{для всех } x,y \in X \ (\textit{где } \delta_{xy} \textit{ — символ Кронекера}). \end{gathered} \tag{3}$$

Если $X \doteq \{1,\ldots,n\}$, то существует биекция между множеством $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством всех помеченных транзитивных орграфов, определенных на X; существует биекция между $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством всех помеченных T_0-топологий, определенных на множестве X. Обозначим через $T_0(n)$ число таких топологий (в частности, $\operatorname{card}\mathcal{V}_0(X) = T_0(n)$). Для любого частичного порядка $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ определено опорное множество

$$S(\sigma) \doteq \{\, y \in X \colon \sigma(x,y) = \delta_{xy} \ \text{ для всех } \ x \in X \,\} \neq \varnothing, \tag{4}$$

а если $\varnothing \neq Y \subseteq X$, то сужение $\sigma|_{Y^2}$ принадлежит $\mathcal{V}_0(Y)$ (является частичным порядком на множестве Y).

Пусть $(p_1,\ldots,p_k) \in \mathbb{N}^k$, $n \doteq p_1 + \ldots + p_k$, $X \doteq \{1,\ldots,n\}$. Набор $(p_1,\ldots,p_k)$ будем называть *разбиением* числа n. Разбиению $(p_1,\ldots,p_k)$ соответствует представление отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в блочном виде

$$\begin{Vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \ldots & \sigma^{1k} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \ldots & \sigma^{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma^{k1} & \sigma^{k2} & \ldots & \sigma^{kk} \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

в котором на пересечении i-ой горизонтальной и j-ой вертикальной полос стоит блок σ^{ij} с p_i строками и p_j столбцами. Запись отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в виде (5) будем называть блочным представлением *типа* $(p_1,\ldots,p_k)$.

Через $\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (5) типа $(p_1,\ldots,p_k)$

1) все блоки σ^{ij}, $1 \leqslant j < i \leqslant k$, состоят из нулей;

2) все диагональные блоки σ^{ii}, $i = 1,\ldots,k$, — единичные матрицы,

и пусть $W(p_1,\ldots,p_k) \doteq \operatorname{card}\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k)$.

Пусть $(p_1,\ldots,p_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$, $p \doteq p_1 + \ldots + p_k$, $m \doteq p_{k+1}$,

$$X \doteq \{1,\ldots,p+m\}, \quad M \doteq \{p+1,\ldots,p+m\}.$$

Через $\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (5) типа $(p_1,\ldots,p_{k+1})$

1) все блоки σ^{ij}, $1 \leqslant j < i \leqslant k+1$, состоят из нулей;

2) все диагональные блоки σ^{ii}, $i = 1,\ldots,k$, — единичные матрицы;

3) диагональный блок $\sigma^{k+1,k+1}$ — частичный порядок (принадлежит $\mathcal{V}_0(M)$), и пусть $W(p_1,\ldots,p_k;m) \doteq \operatorname{card}\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m)$. Дополнительно полагаем

$$\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;0) \doteq \mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k), \quad \mathcal{W}(0,p_1,\ldots,p_k;m) \doteq \mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m),$$

$$W(p_1,\ldots,p_k;0) \doteq W(p_1,\ldots,p_k), \quad W(0,p_1,\ldots,p_k;m) \doteq W(p_1,\ldots,p_k;m).$$

Пусть $(p_1,\ldots,p_{k+2}) \in \mathbb{N}^{k+2}$, $p \doteq p_1+\ldots+p_k$, $m \doteq p_{k+1}$, $n \doteq p_{k+2}$,

$$X \doteq \{1,\ldots,p+m+n\}, \quad M \doteq \{p+1,\ldots,p+m\}, \quad N \doteq \{p+m+1,\ldots,p+m+n\}. \tag{6}$$

Через $\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m,n)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (5) типа $(p_1,\ldots,p_{k+2})$

1) все блоки σ^{ij}, $1 \leqslant j < i \leqslant k+2$, состоят из нулей;

2) все диагональные блоки σ^{ii}, $i=1,\ldots,k$, — единичные матрицы;

3) диагональный блок $\sigma^{k+1,k+1}$ — частичный порядок (принадлежит $\mathcal{V}_0(M)$);

4) диагональный блок $\sigma^{k+2,k+2}$ — частичный порядок (принадлежит $\mathcal{V}_0(N)$), и пусть $W(p_1,\ldots,p_k;m,n) \doteq \operatorname{card}\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m,n)$. Дополнительно полагаем

$$\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;0,n) \doteq \mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;n), \quad \mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m,0) \doteq \mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m), \tag{7}$$

$$W(p_1,\ldots,p_k;0,n) \doteq W(p_1,\ldots,p_k;n), \quad W(p_1,\ldots,p_k;m,0) \doteq W(p_1,\ldots,p_k;m).$$

Пусть $(p_1,p_2) \in \mathbb{N}^2$, $m \doteq p_1$, $n \doteq p_2$,

$$X \doteq \{1,\ldots,m+n\}, \quad M \doteq \{1,\ldots,m\}, \quad N \doteq \{m+1,\ldots,m+n\}.$$

Через $\mathcal{V}_0(m,n)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (5) типа (p_1,p_2)

1) блок σ^{21} состоит из нулей;

2) диагональный блок σ^{11} — частичный порядок (принадлежит $\mathcal{V}_0(M)$);

3) диагональный блок σ^{22} — частичный порядок (принадлежит $\mathcal{V}_0(N)$), и пусть $T_0(m,n) \doteq \operatorname{card}\mathcal{V}_0(m,n)$. Дополнительно полагаем

$$T_0(0,n) \doteq T_0(n), \quad T_0(m,0) \doteq T_0(m).$$

Лемма 1 (см. [1])**.** *Для натурального n справедливы равенства* (1) *и*

$$T_0(n) = \sum_{q=1}^{n} (-1)^{q-1} \binom{n}{q} W(q;n-q).$$

Для натуральных $p_1,\ldots,p_k$ и m справедливы равенства

$$W(p_1,\ldots,p_k;m) = \sum_{q=1}^{m} (-1)^{q-1} \binom{m}{q} W(p_1,\ldots,p_k,q;m-q),$$

$$W(p_1,\ldots,p_k;m) = \sum_{(q_1,\ldots,q_r)} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1!\ldots q_r!} W(p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_r),$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $(q_1,\ldots,q_r)$ числа m.

Лемма 2. *Для натуральных $p_1,\ldots,p_k$ и m и целого неотрицательного числа n справедливо равенство*

$$W(p_1,\ldots,p_k;m,n) = \sum_{q=1}^{m} (-1)^{q-1} \binom{m}{q} W(p_1,\ldots,p_k,q;m-q,n). \tag{8}$$

Доказательство. Числа $p_1, \dots, p_k, m, n$ порождают множества (6) (в силу соглашения (7) допускается, что $N = \varnothing$ при $n = 0$). Так как $S(\sigma|_{M^2}) \neq \varnothing$ (см. (4)) для всех $\sigma \in \mathcal{W}(p_1, \dots, p_k; m, n)$, то для любого непустого подмножества $\alpha \subseteq M$ определено множество

$$\mathcal{W}_\alpha(p_1, \dots, p_k; m, n) \doteq \{\, \sigma \in \mathcal{W}(p_1, \dots, p_k; m, n) \colon\ \alpha \subseteq S(\sigma|_{M^2}) \,\}.$$

Очевидно, включение $\varnothing \neq \alpha \subseteq \beta \subseteq M$ влечет включение

$$\mathcal{W}_\beta(p_1, \dots, p_k; m, n) \subseteq \mathcal{W}_\alpha(p_1, \dots, p_k; m, n),$$

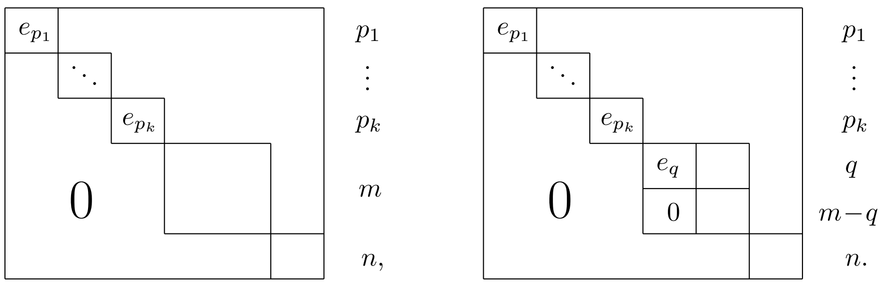
поэтому в соответствии с принципом включения-исключения имеет место равенство

$$\operatorname{card} \mathcal{W}(p_1, \dots, p_k; m, n) = \sum_{\varnothing \neq \alpha \subseteq M} (-1)^{|\alpha|-1} \operatorname{card} \mathcal{W}_\alpha(p_1, \dots, p_k; m, n),$$

в котором суммирование ведется по всем непустым подмножествам α из M, а $|\alpha|$ обозначает число элементов в α. Очевидно, если непустые $\alpha, \beta \subseteq M$ таковы, что $|\alpha| = |\beta|$, то

$$\operatorname{card} \mathcal{W}_\alpha(p_1, \dots, p_k; m, n) = \operatorname{card} \mathcal{W}_\beta(p_1, \dots, p_k; m, n) = \operatorname{card} \mathcal{W}_\gamma(p_1, \dots, p_k; m, n),$$

где $\gamma \doteq \{\, p+1, \dots, p+q \,\} \subseteq M$, $q \doteq |\alpha| = |\beta| \in [1, m]$. Итак, для элементов множеств $\mathcal{W}(p_1, \dots, p_k; m, n)$ и $\mathcal{W}_\gamma(p_1, \dots, p_k; m, n)$ справедливы представления



(Правое представление справедливо в силу (4).) Следовательно,

$$\mathcal{W}_\gamma(p_1, \dots, p_k; m, n) = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_k, q; m-q, n),$$

$$\operatorname{card} \mathcal{W}(p_1, \dots, p_k; m, n) = \sum_{q=1}^{m} (-1)^{q-1} \binom{m}{q} \operatorname{card} \mathcal{W}(p_1, \dots, p_k, q; m-q, n). \qquad \square$$

Лемма 3. *Для натуральных $p_1, \dots, p_k$ и m и целого неотрицательного числа n справедливо равенство*

$$W(p_1, \dots, p_k; m, n) = \sum_{(q_1, \dots, q_r)} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \dots q_r!} W(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_r; n), \tag{9}$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $(q_1, \dots, q_r)$ числа m.

Доказательство. (Проводится индукцией по m.) При $m = 1$ формула (9) превращается в равенство $W(p_1, \dots, p_k; 1, n) = W(p_1, \dots, p_k, 1; n)$, справедливое в силу определений этих чисел. Данное равенство составляет базу индукции. Пусть $m > 1$, и предположим, что равенство (9) верно для всех $\ell < m$ (вместо m следует писать ℓ) и всех $p_1, \dots, p_k$ и n. Покажем, что оно верно также для $\ell = m$ и всех $p_1, \dots, p_k$ и n.

Применив индукционное предположение к слагаемым, стоящим в правой части равенства (8), получаем, что

$$(10)\quad W(p_1,\dots,p_k;m,n)-(-1)^{m-1}W(p_1,\dots,p_k,m;0,n)$$
$$=\sum_{q=1}^{m-1}(-1)^{q-1}\binom{m}{q}W(p_1,\dots,p_k,q;m-q,n)$$
$$=\sum_{q=1}^{m-1}(-1)^{q-1}\binom{m}{q}\sum_{q_1+\ldots+q_r=m-q}(-1)^{m-q-r}\frac{(m-q)!}{q_1!\ldots q_r!}W(p_1,\dots,p_k,q,q_1,\dots,q_r;n).$$

Далее воспользуемся соглашениями (7). Переходя от двойного суммирования к суммированию по всем переменным одновременно, получаем равенство

$$W(p_1,\dots,p_k;m,n)-(-1)^{m-1}W(p_1,\dots,p_k,m;n)$$
$$=\sum_{\substack{q+q_1+\ldots+q_r=m\\ q<m}}(-1)^{m-1-r}\frac{m!}{q!\,q_1!\ldots q_r!}W(p_1,\dots,p_k,q,q_1,\dots,q_r;n).$$

Сделав замену переменных $q_1'=q$, $q_i'=q_{i-1}$, $i=2,\dots,r'=r+1$, получаем

$$(11)\quad W(p_1,\dots,p_k;m,n)-(-1)^{m-1}W(p_1,\dots,p_k,m;n)$$
$$=\sum_{\substack{q_1+\ldots+q_r=m\\ q_1<m}}(-1)^{m-r}\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}W(p_1,\dots,p_k,q_1,\dots,q_r;n)$$

(штрихи у новых переменных не пишем), что и доказывает утверждение. □

Лемма 4. *Для целых чисел $m\geqslant 1$ и $n\geqslant 0$ справедливо равенство*

$$T_0(m,n)=\sum_{q=1}^{m}(-1)^{q-1}\binom{m}{q}W(q;m-q,n).$$

Доказательство. (Проводится по аналогии с доказательством леммы 2.) Пусть $M\doteq\{1,\dots,m\}$. Для произвольного непустого подмножества $\alpha\subseteq M$ определено множество $\mathcal{V}_0^{\alpha}(m,n)\doteq\{\,\sigma\in\mathcal{V}_0(m,n)\colon\ \alpha\subseteq S(\sigma|_{M^2})\,\}$.

Если $\varnothing\neq\alpha\subseteq\beta\subseteq M$, то $\mathcal{V}_0^{\beta}(m,n)\subseteq\mathcal{V}_0^{\alpha}(m,n)$, поэтому

$$T_0(m,n)=\operatorname{card}\mathcal{V}_0(m,n)=\sum_{\varnothing\neq\alpha\subseteq M}(-1)^{|\alpha|-1}\operatorname{card}\mathcal{V}_0^{\alpha}(m,n).$$

Наконец, имеет место равенство $\mathcal{V}_0^{\alpha}(m,n)=\mathcal{W}(q;m-q,n)$, где $q\doteq|\alpha|\in[1,m]$. □

Лемма 5. *Для натуральных m и n имеет место равенство*

$$T_0(m,n)=\sum_{(q_1,\dots,q_r)}(-1)^{m-r}\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}$$
$$\times\sum_{(s_1,\dots,s_k)}(-1)^{n-k}\frac{n!}{s_1!\ldots s_k!}W(q_1,\dots,q_r,s_1,\dots,s_k),$$

где внешнее суммирование ведется по всем разбиениям $(q_1,\dots,q_r)$ числа m, а внутреннее — по всем разбиениям $(s_1,\dots,s_k)$ числа n.

Доказательство. В силу лемм 4 и 3 справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} T_0(m,n)-(-1)^{m-1}W(m;0,n) &= \sum_{q=1}^{m-1}(-1)^{q-1}\binom{m}{q}W(q;m-q,n) \\ &= \sum_{q=1}^{m-1}(-1)^{q-1}\binom{m}{q}\sum_{q_1+\ldots+q_r=m-q}(-1)^{m-q-r}\,\frac{(m-q)!}{q_1!\ldots q_r!}\,W(q,q_1,\ldots,q_r;n) \\ &= \sum_{\substack{q_1+\ldots+q_r=m\\ q_1<m}}(-1)^{m-r}\,\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}\,W(q_1,\ldots,q_r;n). \end{aligned}$$

(В конце цепочки воспользовались равенством правых частей цепочек (10) и (11), полагая в них $p_1=\ldots=p_k=0$.) В силу соглашения (7) для числа $W(m;0,n)$ и третьей формулы из леммы 1 получаем требуемый результат. □

3. Основные утверждения

Теорема 1. *Для целых чисел $p\geqslant 0$ и $m\geqslant 1$ справедливо равенство*

$$W(p+1;m)=\sum_{(q_1,\ldots,q_r)}(-1)^{m-r}\,\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}\,(r+1)\,W(p,q_1,\ldots,q_r), \tag{12}$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $(q_1,\ldots,q_r)$ числа m.

Доказательство. При $m=1$ равенство (12) имеет вид $W(p+1;1)=2\,W(p,1)$, что всегда верно, поскольку $W(p;1)=W(p,1)=2^p$.

Пусть $m\geqslant 2$ и $p\geqslant 1$. Для любого подмножества α множества индексов $M\doteq\{\,p+2,\ldots,p+1+m\,\}$ через $\mathcal{W}_\alpha(p+1;m)$ обозначим совокупность всех тех $\sigma\in\mathcal{W}(p+1;m)$, у которых $\sigma(1,j)=0$ при $j\in\alpha$ и $\sigma(1,j)=1$ при $j\in M\backslash\alpha$.

Очевидно, если $\alpha,\beta\subseteq M$ таковы, что $|\alpha|=|\beta|$, то

$$\operatorname{card}\mathcal{W}_\alpha(p+1;m)=\operatorname{card}\mathcal{W}_\beta(p+1;m)=\operatorname{card}\mathcal{W}_\gamma(p+1;m),$$

где $\gamma\doteq\{\,p+2,\ldots,p+1+q\,\}\subseteq M$, $q\doteq|\alpha|=|\beta|\in[\,0,m]$. Любое отношение σ из $\mathcal{W}_\gamma(p+1;m)$ таково, что $\sigma(1,j)=0$ при $j\in\gamma$ и $\sigma(1,i)=1$ при $i\in M\backslash\gamma$. Следовательно, в силу (3) для всех $(i,j)\in(M\backslash\gamma)\times\gamma$ имеет место цепочка

$$\sigma(i,j)=\sigma(1,i)\,\sigma(i,j)\leqslant\sigma(1,j)=0,$$

поэтому $\sigma(i,j)=0$ для всех $(i,j)\in(M\backslash\gamma)\times\gamma$. Таким образом, для элементов множеств $\mathcal{W}(p+1;m)$ и $\mathcal{W}_\gamma(p+1;m)$ справедливы представления

$$\begin{array}{|c|c|}\hline e_{p+1} & \\ \hline 0 & \\ \hline\end{array}\;,\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline e_{p+1} & \begin{smallmatrix}0\ldots0 & 1\ldots1\end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} & \\ \hline 0 & \end{array} \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{l} \\ \gamma \\ M\backslash\gamma. \end{array}$$

поэтому процедура удаления первой строки и первого столбца из отношения σ является биективным отображением из множества $\mathcal{W}_\gamma(p+1;m)$ на множество

$\mathcal{W}(p;|\gamma|,m-|\gamma|)$. Следовательно, справедливы равенства

$$(13)\quad W(p{+}1;m)=\sum_{q=0}^{m}\binom{m}{q}W(p;q,m{-}q)=2\,W(p;m)+\sum_{q=1}^{m-1}\binom{m}{q}W(p;q,m{-}q).$$

(Во втором равенстве воспользовались соглашением (7).) В силу (9) для всех $q=1,\dots,m-1$ имеет место равенство

$$W(p;q,m-q)=\sum_{p_1+\ldots+p_s=q}(-1)^{q-s}\,\frac{q!}{p_1!\ldots p_s!}\,W(p,p_1,\dots,p_s;m-q),$$

а в соответствии с третьей формулой из леммы 1 справедливо

$$W(p,p_1,\dots,p_s;m-q)=\sum_{t_1+\ldots+t_k=m-q}(-1)^{m-q-k}\,\frac{(m-q)!}{t_1!\ldots t_k!}\,W(p,p_1,\dots,p_s,t_1,\dots,t_k),$$

$$W(p;q,m-q)=\sum_{p_1+\ldots+p_s=q}\ \sum_{t_1+\ldots+t_k=m-q}F,$$

где через $F=F(p_1,\dots,p_s,t_1,\dots,t_k)$ обозначена величина

$$(-1)^{m-s-k}\,\frac{q!\,(m-q)!}{p_1!\ldots p_s!\,t_1!\ldots t_k!}\,W(p,p_1,\dots,p_s,t_1,\dots,t_k).$$

Следовательно, имеет место цепочка равенств

$$W(p+1;m)-2\,W(p;m)=\sum_{q=1}^{m-1}\binom{m}{q}W(p;q,m-q)$$
$$=\sum_{q=1}^{m-1}\ \sum_{t_1+\ldots+t_k=m-q}\ \sum_{p_1+\ldots+p_s=q}\binom{m}{q}F=\sum_{\substack{q+t_1+\ldots+t_k=m\\ q<m}}\ \sum_{p_1+\ldots+p_s=q}\binom{m}{q}F.$$

Перешли от двойного внешнего суммирования к суммированию по всем переменным одновременно. Переходя еще раз от двойного суммирования к суммированию по всем переменным одновременно, получаем равенство

$$W(p+1;m)=2\,W(p;m)+\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_s+t_1+\ldots+t_k=m\\ p_1+\ldots+p_s<m}}(-1)^{m-s-k}$$
$$\times\frac{m!}{p_1!\ldots p_s!\,t_1!\ldots t_k!}\,W(p,p_1,\dots,p_s,t_1,\dots,t_k).$$

Зафиксируем разбиение $(q_1,\dots,q_r)$ числа m такое, что $q_1<m$. Существует ровно $r-1$ способ представления разбиения $(q_1,\dots,q_r)$ в виде конкатенации двух подразбиений, следовательно, среди всех слагаемых, стоящих в правой части последнего равенства, находится в точности $r-1$ слагаемых вида

$$(-1)^{m-r}\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}\,W(p,q_1,\dots,q_r),$$

поэтому имеет место равенство

$$W(p+1;m)=2\,W(p;m)+\sum_{\substack{q_1+\ldots+q_r=m\\ q_1<m}}(-1)^{m-r}\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}\,(r-1)\,W(p,q_1,\dots,q_r).$$

Ограничение $q_1 < m$ можно снять, поскольку при $q_1 = m$ выполнено равенство $r-1 = 0$. В силу третьей формулы из леммы 1 справедливо

$$W(p;m) = \sum_{(q_1,\dots,q_r)} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1!\dots q_r!} W(p,q_1,\dots,q_r),$$

и это замечание завершает доказательство теоремы в случае $p \geqslant 1$.

При $p = 0$ справедливо равенство

$$W(1;m) = 2\,T_0(m) + \sum_{q=1}^{m-1} \binom{m}{q} T_0(q,m-q),$$

которое выводится так же, как и равенство (13). Для величины $T_0(m)$ справедлива первая формула из леммы 1, а для величины $T_0(q,m-q)$ справедлива формула из леммы 5. Далее доказательство дословно повторяет доказательство предыдущего случая (требуется лишь положить $p = 0$). □

Теорема 2. *Для натурального $n \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$T_0(n) = n\,T_0(n-1) + \sum_{(p_1,\dots,p_k)} (-1)^{n-1-k} \frac{n!}{(p_1+1)!\,p_2!\dots p_k!}\, k\, p_1\, W(p_1,\dots,p_k), \tag{14}$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $(p_1,\dots,p_k)$ числа $n-1$.

Доказательство. При $n = 2$ равенство (14) легко проверяется. Пусть $n \geqslant 3$. В соответствии с первой формулой из леммы 1 справедливо равенство

$$T_0(n) = n\,W(1;n-1) + \sum_{q=2}^{n-1} (-1)^{q-1} \binom{n}{q} W(q;n-q) + (-1)^{n-1} W(n;0).$$

Очевидно, $W(n;0) = 1$. Подставив в последнее равенство вместо величины $W(q;n-q)$ правую часть формулы (12), получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&T_0(n) - n\,W(1;n-1) - (-1)^{n-1} \\
&= \sum_{q=2}^{n-1} (-1)^{q-1} \binom{n}{q} \sum_{q_1+\dots+q_r = n-q} (-1)^{n-q-r} \frac{(n-q)!}{q_1!\dots q_r!} (r+1)\, W(q-1,q_1,\dots,q_r) \\
&\qquad = \sum_{\substack{q+q_1+\dots+q_r = n \\ 2 \leqslant q < n}} (-1)^{n-1-r} \frac{n!}{q!\,q_1!\dots q_r!} (r+1)\, W(q-1,q_1,\dots,q_r).
\end{aligned}$$

Перешли от двойного суммирования к суммированию по всем переменным одновременно. Сделаем замену переменных суммирования, а именно, обозначим $p_1 \doteq q-1$, и пусть $p_{i+1} \doteq q_i$ для всех $i = 1,\dots,r$. Пусть, наконец, $k \doteq r+1$. Тогда

$$\begin{aligned}
&T_0(n) - n\,W(1;n-1) - (-1)^{n-1} \\
&\qquad = \sum_{\substack{p_1+\dots+p_k = n-1 \\ p_1 < n-1}} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(p_1+1)!\,p_2!\dots p_k!}\, k\, W(p_1,\dots,p_k),
\end{aligned}$$

$$T_0(n) = n\,W(1;n-1) + \sum_{p_1+\dots+p_k = n-1} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(p_1+1)!\,p_2!\dots p_k!}\, k\, W(p_1,\dots,p_k),$$

а в силу формул (12) и (1) для выражения $n\,W(1;n-1)$ имеет место цепочка

$$n\,W(1;n-1) = n \sum_{p_1+\ldots+p_k=n-1} (-1)^{n-1-k}\, \frac{(\,n-1)!}{p_1!\ldots p_k!}\,(\,k+1)\,W(p_1,\ldots,p_k)$$

$$= n\,T_0(n-1) + \sum_{p_1+\ldots+p_k=n-1} (-1)^{n-1-k}\, \frac{n!}{(p_1+1)!\,p_2!\ldots p_k!}\,k\,(p_1+1)\,W(p_1,\ldots,p_k),$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

4. Значения $W(p_1,\ldots,p_k)$ при малых n

Равенства $W(p)=1,\ W(p,q)=2^{pq},\ T_0(1)=1$ очевидны в силу определения этих чисел. *Справедливо равенство*

$$W(p,1,q) = \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r}\,(\,2^r + 2^q\,)^p. \tag{15}$$

Действительно. Пусть $\alpha \subseteq P \doteq \{\,1,\ldots,p\,\},\ \omega \subseteq Q \doteq \{\,p+2,\ldots,p+1+q\,\}$. Через $\mathcal{W}_{\alpha\,\omega}(p,1,q)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{W}(p,1,q)$ таких, что

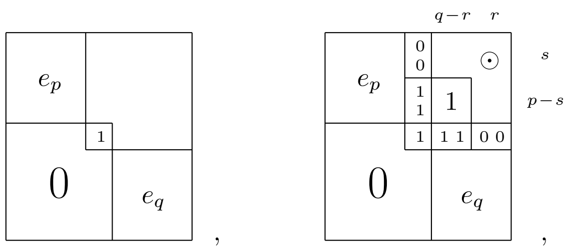
1) $\sigma(i,p+1)=0$ при $i\in\alpha$ и $\sigma(i,p+1)=1$ при $i\in P\setminus\alpha$;
2) $\sigma(p+1,j)=0$ при $j\in\omega$ и $\sigma(p+1,j)=1$ при $j\in Q\setminus\omega$.

В силу (3) для всех $(i,j)\in(P\setminus\alpha)\times(Q\setminus\omega)$ справедливо

$$1=\sigma(i,p+1)\,\sigma(p+1,j)\leqslant\sigma(i,j),$$

поэтому $\sigma(i,j)=1$ для всех $(i,j)\in(P\setminus\alpha)\times(Q\setminus\omega)$. Таким образом, для элементов множеств $\mathcal{W}(p,1,q)$ и $\mathcal{W}_{\alpha\,\omega}(p,1,q)$ справедливы представления

(16)



где $s\doteq|\alpha|$ и $r\doteq|\omega|$. В области $\odot$ может стоять любая комбинация нулей и единиц, следовательно,

$$W(p,1,q)=\sum_{s=0}^{p}\sum_{r=0}^{q}\binom{p}{s}\binom{q}{r}\,\big(\,2^q\big)^s\,\big(\,2^r\big)^{p-s} = \sum_{r=0}^{q}\binom{q}{r}\,\big(\,2^r+2^q\,\big)^p.$$

Таким образом, при фиксированном $n\in\mathbb{N}$ формулы (2) и (12) порождают систему линейных уравнений относительно величин $W(p_1,\ldots,p_k)$:

$W(n)=1,$

$W(p,q)=2^{pq},\quad p+q=n,\quad p,\,q>0,$

$W(p,1,q)=\sum_{r=0}^{q}\binom{q}{r}\,\big(\,2^q+2^r\big)^p,\quad p+q=n-1,\quad p,\,q>0$

$W(\,p_{\pi(1)},\ldots,p_{\pi(k)})=W(p_1,\ldots,p_k),\quad p_1+\ldots+p_k=n,\quad p_i>0,\quad \pi\in D_k,$

$$\begin{aligned}(17)\qquad &\sum_{q_1+\ldots+q_r=m}(-1)^{m-r}\,\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}\,W(p+1,q_1,\ldots,q_r)\\ &\qquad=\sum_{q_1+\ldots+q_r=m}(-1)^{m-r}\,\frac{m!}{q_1!\ldots q_r!}\,(\,r+1)\,W(p,q_1,\ldots,q_r),\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p+m=n-1,\quad p\geqslant 0,\quad m>0.\end{aligned}$$

Количество неизвестных равно 2^{n-1}. Покажем, что при $n\leqslant 5$ ранг матрицы системы равен 2^{n-1}. При $n=1$ имеем $W(1)=1$ и $T_0(2)=3$ (в силу (14)).

При $n=2$ ранг матрицы системы (17) (выписываем все уравнения) равен 2:

$$W(2)=1,\quad W(1,1)=2,\quad W(1,1)=2.$$

В силу (14) справедливо равенство

$$T_0(3)=19.$$

При $n=3$ ранг матрицы системы (17) равен 4:

$$\begin{aligned}&W(3)=1,\quad W(2,1)=4,\quad W(1,2)=4,\quad W(1,1,1)=7,\\ &W(2,1)=W(1,2),\quad 2\,W(1,1,1)-W(1,2)=10,\quad W(2,1)=4.\end{aligned}$$

В силу (14) справедливо равенство

$$T_0(4)=219.$$

При $n=4$ ранг матрицы системы (17) равен 8:

$$\begin{aligned}&W(4)=1,\quad W(3,1)=8,\quad W(2,2)=16,\quad W(1,3)=8,\\ &W(2,1,1)=25,\quad W(1,1,2)=25,\\ &W(3,1)=W(1,3),\quad W(2,1,1)=W(1,2,1)=W(1,1,2),\\ &6\,W(1,1,1,1)-3\,W(1,1,2)-3\,W(1,2,1)+W(1,3)=98,\\ &2\,W(2,1,1)-W(2,2)=34,\quad W(3,1)=8.\end{aligned}$$

Следовательно, $W(1,2,1)=25$, $W(1,1,1,1)=40$, а в силу (14)

$$T_0(5)=4231.$$

При $n=5$ ранг матрицы системы (17) равен 16:

$$\begin{aligned}&W(5)=1,\quad W(4,1)=16,\quad W(3,2)=64,\quad W(2,3)=64,\quad W(1,4)=16,\\ &W(3,1,1)=91,\quad W(2,1,2)=161,\quad W(1,1,3)=91,\\ &W(4,1)=W(1,4),\quad W(3,2)=W(2,3),\\ &W(3,1,1)=W(1,3,1)=W(1,1,3),\quad W(2,2,1)=W(2,1,2)=W(1,2,2),\\ &W(2,1,1,1)=W(1,2,1,1)=W(1,1,2,1)=W(1,1,1,2),\\ &24\,W(1,1,1,1,1)-12\,W(1,1,1,2)-12\,W(1,1,2,1)+4\,W(1,1,3)\\ &\qquad\qquad -12\,W(1,2,1,1)+6\,W(1,2,2)+4\,W(1,3,1)-W(1,4)=1678,\\ &6\,W(2,1,1,1)-3\,W(2,1,2)-3\,W(2,2,1)+W(2,3)=526,\\ &2\,W(3,1,1)-W(3,2)=118,\quad W(4,1)=16.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&W(2,2,1)=W(1,2,2)=161,\\ &W(2,1,1,1)=W(2,1,1,1)=W(1,1,2,1)=W(1,1,1,2)=238,\\ &W(1,3,1)=91,\quad W(1,1,1,1,1)=357,\end{aligned}$$

а в силу (14)

$$T_0(6)=130023.$$

При $n = 6$ ранг матрицы системы (17) равен 29:

$$
\begin{aligned}
&W(6) = 1, \quad W(5,1) = 32, \quad W(4,2) = 256,\\
&W(3,3) = 512, \quad W(2,4) = 256, \quad W(1,5) = 32,\\
&W(4,1,1) = 337, \quad W(3,1,2) = 1069, \quad W(2,1,3) = 1069, \quad W(1,1,4) = 337,\\
&W(5,1) = W(1,5), \quad W(4,2) = W(2,4), \quad W(4,1,1) = W(1,4,1) = W(1,1,4),\\
&W(3,2,1) = W(3,1,2) = W(2,3,1) = W(2,1,3) = W(1,3,2) = W(1,2,3),\\
&W(3,1,1,1) = W(1,3,1,1) = W(1,1,3,1) = W(1,1,1,3),\\
&W(2,2,1,1) = W(2,1,1,2) = W(1,1,2,2) = W(1,2,2,1),\\
&W(2,1,2,1) = W(1,2,1,2),\\
&W(2,1,1,1,1) = W(1,2,1,1,1)\\
&\qquad\qquad\qquad = W(1,1,2,1,1) = W(1,1,1,2,1) = W(1,1,1,1,2),\\
&120\,W(1,1,1,1,1,1) - 60\,W(1,1,1,1,2) - 60\,W(1,1,1,2,1) + 20\,W(1,1,1,3)\\
&\qquad -60\,W(1,1,2,1,1) + 30\,W(1,1,2,2) + 20\,W(1,1,3,1) - 5\,W(1,1,4)\\
&\qquad -60\,W(1,2,1,1,1) + 30\,W(1,2,1,2) + 30\,W(1,2,2,1) - 10\,W(1,2,3)\\
&\qquad\qquad +20\,W(1,3,1,1) - 10\,W(1,3,2) - 5\,W(1,4,1) + W(1,5) = 46922,\\
&24\,W(2,1,1,1,1) - 12\,W(2,1,1,2) - 12\,W(2,1,2,1) + 4\,W(2,1,3)\\
&\qquad\qquad -12\,W(2,2,1,1) + 6\,W(2,2,2) + 4\,W(2,3,1) - W(2,4) = 13618,\\
&6\,W(3,1,1,1) - 3\,W(3,1,2) - 3\,W(3,2,1) + W(3,3) = 2942,\\
&2\,W(4,1,1) - W(4,2) = 418, \quad W(5,1) = 32.
\end{aligned}
$$

Третье с конца уравнение дает значение $W(3,1,1,1) = 1474$. Ниже доказаны формулы (18) – (20), аналогичные (15), позволяющие вычислить три числа:

$$W(2,2,2) = 1699, \quad W(2,1,1,2) = 2386, \quad W(2,1,2,1) = 2388,$$

что позволяет найти числа

$$W(2,1,1,1,1) = 3377, \quad W(1,1,1,1,1,1) = 4824$$

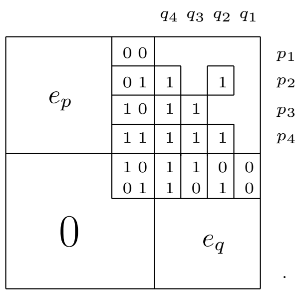
и, в конечном счете, получить значение

$$T_0(7) = 6129859.$$

Справедливо равенство

$$W(p,2,q) = \sum_{q_1+\ldots+q_4=q} \frac{q!}{q_1!\ldots q_4!}\Big(2^{q_1} + 2^{q_1+q_2} + 2^{q_1+q_3} + 2^{q}\Big)^{p}. \tag{18}$$

Действительно. Наборы целых неотрицательных чисел $(p_1,\ldots,p_4)$ и $(q_1,\ldots,q_4)$ такие, что $p_1+\ldots+p_4 = p$ и $q_1+\ldots+q_4 = q$, порождают совокупность отношений $\sigma \in \mathcal{W}(p,2,q)$ вида



В блоке σ^{12} строения $p \times 2$ (см. (5)) мы поместили p_1 строк вида 0 0; p_2 строк вида 0 1; p_3 строк вида 1 0; p_4 строк вида 1 1. В блоке σ^{23} строения $2 \times q$ размещены аналогичные столбцы. В силу (3) в блоке σ^{13} строения $p \times q$ имеются подблоки, состоящие целиком из единиц (мы делали необходимые пояснения в похожей ситуации при обосновании представления (16)). В остальных подблоках может стоять любая комбинация нулей и единиц, следовательно,

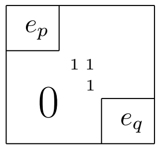
$$\begin{aligned} &W(p,2,q) \\ &= \sum_{p_1+\ldots+p_4=p}\ \sum_{q_1+\ldots+q_4=q} \frac{p!}{p_1!\ldots p_4!}\,\frac{q!}{q_1!\ldots q_4!}\,\bigl(2^{q}\bigr)^{p_1}\bigl(2^{q_1+q_3}\bigr)^{p_2}\bigl(2^{q_1+q_2}\bigr)^{p_3}\bigl(2^{q_1}\bigr)^{p_4} \\ &\qquad\qquad = \sum_{q_1+\ldots+q_4=q}\frac{q!}{q_1!\ldots q_4!}\Bigl(2^{q_1}+2^{q_1+q_2}+2^{q_1+q_3}+2^{q}\Bigr)^{p}. \end{aligned}$$

Заметим, что по аналогии с формулами (15) и (18) могут быть получены формулы для величин $W(p,r,q)$ при любом $r>2$.

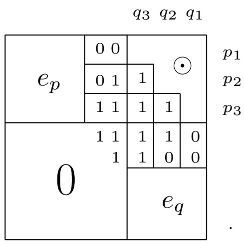
Справедливо равенство

$$W(p,1,1,q)-W(p,2,q)=\sum_{q_1+q_2+q_3=q}\frac{q!}{q_1!\,q_2!\,q_3!}\Bigl(2^{q_1}+2^{q_1+q_2}+2^{q}\Bigr)^{p}. \tag{19}$$

Действительно. Включение $\mathcal{W}(p,2,q)\subseteq\mathcal{W}(p,1,1,q)$ очевидно. Более того, если $\Delta(p,q)\doteq\mathcal{W}(p,1,1,q)\setminus\mathcal{W}(p,2,q)$, то для отношений $\sigma\in\Delta(p,q)$ имеет место представление

$\sigma =$  .

Целые неотрицательные числа p_1,p_2,p_3 и q_1,q_2,q_3 такие, что $p_1+p_2+p_3=p$ и $q_1+q_2+q_3=q$, порождают совокупность отношений $\sigma\in\Delta(p,q)$ вида



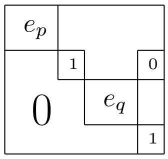
В области $\odot$ может стоять любая комбинация нулей и единиц, следовательно,

$$\begin{aligned} &W(p,1,1,q)-W(p,2,q)=\operatorname{card}\Delta(p,q) \\ &\quad= \sum_{p_1+p_2+p_3=p}\ \sum_{q_1+q_2+q_3=q}\frac{p!}{p_1!\,p_2!\,p_3!}\,\frac{q!}{q_1!\,q_2!\,q_3!}\,\bigl(2^{q}\bigr)^{p_1}\bigl(2^{q_1+q_2}\bigr)^{p_2}\bigl(2^{q_1}\bigr)^{p_3} \\ &\qquad\qquad = \sum_{q_1+q_2+q_3=q}\frac{q!}{q_1!\,q_2!\,q_3!}\Bigl(2^{q_1}+2^{q_1+q_2}+2^{q}\Bigr)^{p}. \end{aligned}$$

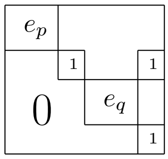
Справедливо равенство

$$W(p,1,q,1)=\sum_{r=0}^{q}\binom{q}{r}\bigl(2^{q-r}+1\bigr)^{p}\,W(p,r,1)+\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}\bigl(2^{p-r}+1\bigr)^{q}\,W(r,q,1). \tag{20}$$

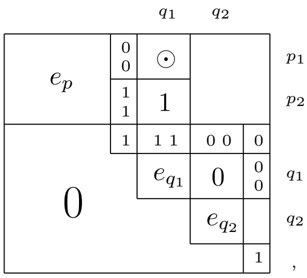
Действительно. Совокупность $\mathcal{W}(p,1,q,1)$ состоит из семейств $\mathcal{W}_0(p,1,q,1)$ и $\mathcal{W}_1(p,1,q,1)$, для элементов σ которых справедливы представления



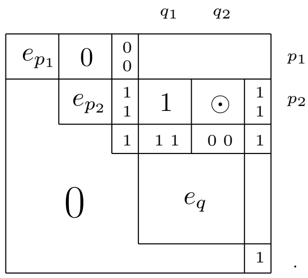
и



(полагаем $\sigma(p+1,p+2+q)=0$ и $\sigma(p+1,p+2+q)=1$ соответственно). Целые неотрицательные числа p_1,p_2 и q_1,q_2 такие, что $p_1+p_2=p$ и $q_1+q_2=q$, порождают подсемейства вида



,



.

В обоих представлениях в блоке σ^{12} строения $p\times 1$ (см. (5)) расположены p_1 нулей и p_2 единиц, а в блоке σ^{23} строения $1\times q$ расположены q_1 единиц и q_2 нулей. В силу (3) в левом представлении для элементов последнего столбца горизонтальной полосы, помеченной символом q_1, справедливо

$$\sigma(i,p+2+q)=\sigma(p+1,i)\,\sigma(i,p+2+q)\leqslant\sigma(p+1,p+2+q)=0,$$

поэтому $\sigma(i,p+2+q)=0$. В силу транзитивности σ все элементы подблока под условным обозначением $p_2\times q_1$ равны единице. Легко убедиться, что в блоке $\odot$ может стоять любая комбинация нулей и единиц, а в остальных непомеченных (пустых) блоках левого представления может стоять любая комбинация нулей и единиц множества $\mathcal{W}(p,q_2,1)$, следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\mathcal{W}_0(p,1,q,1)&=\sum_{p_1+p_2=p}\;\sum_{q_1+q_2=q}\frac{p!}{p_1!\,p_2!}\,\frac{q!}{q_1!\,q_2!}\,2^{p_1q_1}W(p,q_2,1)\\&=\sum_{r=0}^{q}\binom{q}{r}\,\bigl(2^{q-r}+1\bigr)^p\,W(p,r,1).\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения справедливы для правого представления, поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\mathcal{W}_1(p,1,q,1)&=\sum_{p_1+p_2=p}\;\sum_{q_1+q_2=q}\frac{p!}{p_1!\,p_2!}\,\frac{q!}{q_1!\,q_2!}\,2^{p_2q_2}W(p_1,q,1)\\&=\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}\,\bigl(2^{p-r}+1\bigr)^q\,W(r,q,1).\end{aligned}$$

Замечание 1. Известные автору алгоритмы перечисления конечных частичных порядков имеют вычислительную сложность экспоненциального типа, что затрудняет вычисление значений $T_0(n)$ даже при малых n. Здесь уместно отметить прямые вычисления чисел $T_0(n)$, представленные в работах [2, 3, 4, 5], и компьютерные вычисления, представленные в [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Благодаря разработке эффективных алгоритмов вычислений [12] в настоящее время известны значения $T_0(n)$ для всех $n \leqslant 18$. В рамках настоящей работы мы получили ряд соотношений (явного и рекуррентного характера) между числами $W(p_1, \ldots, p_k)$, что вселяет определенный оптимизм. Например, при $n = 7$ ранг матрицы системы (17) – (20) равен 61, и если добавить к системе еще три уравнения (доведя ранг до 64), то найдем значение $T_0(8)$. Таким образом, имеются основания предполагать наличие некоторой общей закономерности, генерирующей уравнения связи вида (2), (12), (15), (18) – (20). Отметим также, что уравнение (12) породило для числа $T_0(n)$ формулу (14), количество слагаемых в которой в 2 раза меньше, чем в исходной формуле (1).

References

[1] V.I. Rodionov, *On enumeration of posets defined on finite set*, Siberian Electr. Math. Reports, **13** (2016), 318–330.

[2] L. Comtet, *Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini*, C. R. Acad. Sci., **262** (1966), A1091–A1094. MR201325

[3] V. Krishnamurthy, *On the number of topologies on a finite set*, Amer. Math. Monthly, **73**:2 (1966), 154–157. MR201324, Zbl 0135.40704

[4] M. Erne, *Struktur- und anzahlformeln fur topologien auf endlichen mengen*, Manuscripta Math., **11** (1974), 221–259. MR360300, Zbl 0269.54001

[5] Z.I. Borevich, *Enumeration of finite topologies*, J. Sov. Math., **20**:6 (1982), 2532–2545. MR541003, Zbl 0498.05007

[6] J.W. Evans, F. Harary, M.S. Lynn, *On the computer enumeration of finite topologies*, Comm. ACM, **10**:5 (1967), 295–297. Zbl 0166.01003

[7] S.K. Das, *A machine representation of finite T_0 topologies*, J. Assoc. Comput. Mach., **24**:4 (1977), 676–692. MR0472543

[8] Z.I. Borevich, W. Wieslaw, E. Dobrowolski, V.I. Rodionov, *The number of labeled topologies on nine points*, J. Sov. Math., **37**:2 (1987), 937–942. MR503838, Zbl 0612.05004

[9] Z.I. Borevich, V.V. Bumagin, V.I. Rodionov, *Number of labeled topologies on ten points*, J. Sov. Math., **17**:4 (1981), 1941–1945. MR535474, Zbl 0459.05011

[10] V.I. Rodionov, *Some recurrence relations in finite topologies*, J. Sov. Math., **27**:4 (1984), 2963–2968. MR669569, Zbl 0557.05007

[11] M. Erne, K. Stege, *Counting finite posets and topologies*, Order, **8**:3 (1991), 247–265. MR1154928

[12] G. Brinkmann, B.D. McKay, *Posets on up to 16 points*, Order, **19**:2 (2002), 147–179. MR2134160, Zbl 1006.06003

Vitalii Ivanovich Rodionov
Udmurt State University,
ul. Universitetskaya, 1,
426034, Izhevsk, Russia
E-mail address: rodionov@uni.udm.ru