S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1–10 (2018) УДК 517.23, 517.518.126
DOI 10.17377/semi.2018.15.001 MSC 26A33, 44A15

О ДРОБНЫХ СТЕПЕНЯХ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ НА ПОЛУОСИ

С.М. СИТНИК, Э.Л. ШИШКИНА

Abstract. In this paper we study fractional powers of the Bessel differential operator defined on a semiaxis. Some important properties of such fractional powers of the Bessel differential operator are proved. They include connections with Legendre functions for kernel representations, fractional integral operators of Liouville and Saigo, Mellin transform and index laws. Possible applications are indicated to differential equations with fractional powers of the Bessel differential operator.

Keywords: Bessel operator, fractional integral, fractional derivative, Mellin transform.

1. Введение

Мы рассматриваем вещественные степени сингулярного дифференциального оператора Бесселя

$$B_\nu = D^2 + \frac{\nu}{x}D, \qquad \nu \geq 0 \tag{1}$$

на вещественной полуоси $(0,\infty)$.

Определение 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $f(x) \in C^{[2\alpha]+1}(0,\infty)$. *Дробную степень оператора Бесселя на полуоси* $(0,\infty)$ *определим, следуя работам* [1]–[4], *формулой*

$$(IB^{\alpha}_{\nu,-}\, f)(x)=$$

Sitnik, S.M., Shishkina, E.L., On fractional powers of the Bessel operator on semiaxis.

Публикация подготовлена при финансовой поддержке Миноборнауки России (соглашение № 02.A03.21.0008).

Поступила 19 октября 2017 г., опубликована 4 января 2018 г.

$$(2) \qquad = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_x^{+\infty} \left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1-\frac{x^2}{y^2}\right) f(y)dy.$$

Для краткости будем также называть выражение (2) ***дробным интегралом Бесселя на полуоси***.

В работе [5] введены пространства, приспособленные для работы с операторами вида (2):

$$F_p = \left\{\varphi \in C^\infty(0,\infty) : x^k \frac{d^k\varphi}{dx^k} \in L^p(0,\infty) \text{ для } k=0,1,2,...\right\}, \qquad 1 \le p < \infty,$$

$$F_\infty = \left\{\varphi \in C^\infty(0,\infty) : x^k \frac{d^k\varphi}{dx^k} \to 0 \text{ при } x \to 0+, \text{ и при } x\to\infty \text{ для } k=0,1,2,...\right\}$$

и

$$F_{p,\mu} = \left\{\varphi : x^{-\mu}\varphi(x) \in F_p\right\}, \qquad 1 \le p \le \infty, \qquad \mu \in \mathbb{C}.$$

Кроме того, в [5] доказано, что (2) имеет обратный оператор.

Определение 2. ***Дробную производную Бесселя на полуоси*** *определим равенством*

$$(3) \qquad (DB^\alpha_{\nu,-}f)(x) = B^n_\nu(IB^{n-\alpha}_{\nu,-}f)(x), \qquad \alpha > 0.$$

Можно показать, что на подходящем классе функций $DB^\alpha_{\nu,-}$ есть левый обратный оператор к $IB^\alpha_{\nu,-}$.

В этой работе мы получим для интегрального оператора (2) формулу, выражающую его ядро через функции Лежандра; сведем дробный интеграл Бесселя на полуоси к дробному интегралу Лиувилля при $\nu=0$, а также установим связь дробного интеграла Бесселя (2) с дробным интегралом Сайго; установим условия, при которых оператор (2) есть левый обратный к (1); найдем преобразование Меллина оператора (2) и докажем полугрупповое свойство для дробного интеграла Бесселя на полуоси; а также решим уравнение с дробной производной Бесселя на полуоси.

Используя формулу, связывающую гипергеометрическую функцию Гаусса и функцию Лежандра вида

$${}_2F_1(a,b;2b;z) = 2^{2b-1}\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right) z^{\frac{1}{2}-b}(1-z)^{\frac{1}{2}\left(b-a-\frac{1}{2}\right)} P^{\frac{1}{2}-b}_{a-b-\frac{1}{2}}\left[\left(1-\frac{z}{2}\right)\sqrt{1-z}\right]$$

(см. формулу 15.4.8 на стр. 561 из [6]), мы получим

$${}_2F_1\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1-\frac{x^2}{y^2}\right) =$$

$$= 2^{2\alpha-1}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y^2-x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu}{2}} P^{\frac{1}{2}-\alpha}_{\frac{\nu}{2}-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right]$$

и сможем записать (2) в виде

$$(B^{-\alpha}_{\nu,-}f)(x) = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_x^b (y^2-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu}{2}} P^{\frac{1}{2}-\alpha}_{\frac{\nu}{2}-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right] f(y)dy.$$

Выражение дробных интегралов Бесселя через функции Лежандра является полезным и является упрощением первоначального определения, так как гипергеометрическая функция Гаусса зависит от трёх параметров, а функция Лежандра — от двух.

В статье изучается дробный интеграл Бесселя в форме (2), который в частном случае соответствует дробному интегралу Лиувилля. Существует также версия дробного интеграла Бесселя на конечном отрезке с интегрированием по промежутку $(0, x)$, которая в частном случае является дробным интегралом Римана–Лиувилля, а также их дальнейшие модификации, см. [2]–[4].

Определение (2) дано выше при ограничениях на функцию, близким к оптимальным в указанном классе, однако далее мы будем для простоты предполагать, что рассматриваются бесконечно дифференцируемые функции, финитные на полуоси, то есть их носитель есть $\operatorname{supp} f(x) = [a, b], 0 < a < b < \infty$.

2. Основные свойства дробных степей оператора Бесселя на полуоси

В этом пункте мы получим основные свойства оператора (2), во-первых, демонстрирующие связь дробного интеграла Бесселя на полуоси с дробным интегралом Лиувилля и с дробным интегралом Сайго, во-вторых, показывающие, что при дополнительных условиях оператор (2) при $\alpha = 1$ обращает оператор Бесселя (1), и, наконец, найдем дробный интеграл Бесселя на полуоси (2) от степенной функции.

Предложение 1. *При $\nu = 0$ дробный интеграл Бесселя на полуоси $B_{0,-}^{-\alpha}$ сводится к дробному интегралу Лиувилля, определённому формулой (5.3) стр. 85 из* [7]*, а именно, справедлива формула*

$$(IB_{0,-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_x^{\infty} (y - x)^{2\alpha-1} f(y) dy = (I_-^{2\alpha} f)(x).$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$(IB_{0,-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_x^{\infty} \left(\frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left(\alpha - \frac{1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) f(y) dy.$$

Используя формулу, которая получается из интегрального представления гипергеометрической функции Гаусса

$${}_2F_1 \left(\alpha - \frac{1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) = \left[\frac{2y}{x + y} \right]^{2\alpha-1},$$

мы получим

$$(IB_{0,-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_x^{\infty} (y - x)^{2\alpha-1} f(y) dy = (I_-^{2\alpha} f)(x).$$

$\square$

Предложение 2. *Имеет место равенство*

$$(IB_{\nu,-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{2^{2\alpha}} J_{x^2}^{2\alpha, \frac{\nu-1}{2} - \alpha, -\alpha} \left(x^{\frac{\nu-1}{2}} f(\sqrt{x}) \right), \tag{4}$$

где

$$J_x{}^{\gamma,\beta,\eta}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_x^\infty(t-x)^{\gamma-1}t^{-\gamma-\beta}\,{}_2F_1\left(\gamma+\beta,-\eta;\gamma;1-\frac{x}{t}\right)f(t)dt, \tag{5}$$

— дробный интеграл Сайго (см. [8], [10]*). В* (5) $\gamma>0,\beta,\theta$ *— вещественные числа.*

Доказательство. Произведем замену переменной $y^2=t$ в дробном интеграле Бесселя на полуоси (2), получим:

$$(IB^\alpha_{\nu,-}f)(x)=\frac{1}{2^{2\alpha}\Gamma(2\alpha)}\int\limits_{x^2}^\infty(t-x^2)^{2\alpha-1}t^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{x^2}{t}\right)f(\sqrt{t})dt.$$

Сравнивая полученное выражение с (5), будем иметь

$$\gamma=2\alpha,\qquad\beta=\frac{\nu-1}{2}-\alpha,\qquad-\gamma-\beta=-\alpha-\frac{\nu-1}{2},\qquad\eta=-\alpha,$$

что и дает (4). □

Предложение 3. *При* $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=0$ *получим, что*

$$(IB^{-1}_{\nu,-}B_\nu g)(x)=g(x).$$

Доказательство. Рассмотрим $IB^\alpha_{\nu,-}$ при $\alpha=1$:

$$(IB^1_{\nu,-}f)(x)=\int\limits_x^\infty\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)\,{}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2},1;2;1-\frac{x^2}{y^2}\right)f(y)dy.$$

Поскольку для гипергеометрической функции Гаусса справедливо равенство

$${}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2},1;2;1-\frac{x^2}{y^2}\right)=\frac{2}{1-\nu}\,\frac{y^2}{x^2-y^2}\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu}-1\right],$$

то $IB^1_{\nu,-}$ можно записать в виде

$$(IB^1_{\nu,-}f)(x)=\frac{1}{\nu-1}\int\limits_x^\infty y\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu}-1\right]f(y)dy.$$

Пусть $f(x)=B_\nu g(x)=g''(x)+\frac{\nu}{x}g'(x)$, тогда

$$(IB^1_{\nu,-}f)(x)=(B^{-1}_{\nu,-}B_\nu g)(x)$$

$$=\frac{1}{\nu-1}\int\limits_x^\infty y\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu}-1\right]\left(g''(y)+\frac{\nu}{y}g'(y)\right)dy$$

$$=\frac{1}{\nu-1}\left[\int\limits_x^\infty y\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu}-1\right]g''(y)dy+\nu\int\limits_x^\infty\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu}-1\right]g'(y)dy\right].$$

Дважды интегрируя по частям первое слагаемое, получим

$$\int\limits_x^\infty y\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu}-1\right]g''(y)dy$$

$$= y \left[\left(\frac{x}{y} \right)^{1-\nu} -1 \right] g'(y) \Big|_{y=x}^{y=\infty} - \int\limits_x^\infty (\nu x^{1-\nu} y^{\nu-1} -1) g'(y) dy$$

$$= y \left[\left(\frac{x}{y} \right)^{1-\nu} -1 \right] g'(y) \Big|_{y=x}^{y=\infty} - (\nu x^{1-\nu} y^{\nu-1} - 1) g(y) \Big|_{y=x}^{y=\infty}$$

$$+\nu(\nu-1) x^{1-\nu} \int\limits_x^\infty y^{\nu-2} g(y) dy.$$

Интегрируя по частям второе слагаемое, будем иметь

$$\int\limits_x^\infty \left[\left(\frac{x}{y} \right)^{1-\nu} - 1 \right] g'(y) dy$$

$$= \left[\left(\frac{x}{y} \right)^{1-\nu} - 1 \right] g(y) \Big|_{y=x}^{y=\infty} - \frac{\nu-1}{x^{\nu-1}} \int\limits_x^\infty y^{\nu-2} g(y) dy.$$

Тогда, очевидно, что при $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$ получим

$$(IB^1_{\nu,-} B_\nu g)(x) = g(x).$$

$\square$

Предложение 4. *При $x > 0$ и $m + 2\alpha + \nu < 1$ справедлива формула*

$$IB^\alpha_{\nu,-}\, x^m = 2^{-2\alpha}\, \Gamma \left[\begin{array}{cc} -\alpha - \frac{m}{2}, & -\frac{\nu-1}{2} - \alpha - \frac{m}{2} \\ \frac{1-\nu-m}{2}, & -\frac{m}{2} \end{array} \right] x^{2\alpha+m}. \tag{6}$$

Доказательство. Найдем дробный интеграл Бесселя на полуоси от степенной функции $f(x)=x^m$ при $x > 0$ и $m + 2\alpha + \nu < 1$. Имеем

$$IB^\alpha_{\nu,-}\, x^m = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_x^\infty \left(\frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left(\alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) y^m dy$$

$$= \left\{ \frac{x^2}{y^2} = t, y = xt^{-\frac{1}{2}}, dy = -\frac{1}{2} x t^{-\frac{3}{2}} dt, y = x, t = 1, y = \infty, t = 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2 t^{-1} - x^2}{2 x t^{-\frac{1}{2}}} \right)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left(\alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - t \right) (x t^{-\frac{1}{2}})^m x t^{-\frac{3}{2}} dt$$

$$= \frac{x^{2\alpha+m}}{2^{2\alpha}\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^1 t^{-\alpha-\frac{m}{2}-1} (1-t)^{2\alpha-1}\, {}_2F_1 \left(\alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - t \right) dt.$$

Используя формулу 2.21.1.11 из [9], стр. 265 вида

$$\int\limits_0^z x^{\mu-1} (z-x)^{c-1}\, {}_2F_1 \left(a, b; c; 1 - \frac{x}{z} \right) dx$$

$$= z^{c+\mu-1} \Gamma \left[\begin{array}{ccc} c, & \mu, & c-a-b+\mu \\ c-a+\mu, & & c-b+\mu \end{array} \right], \tag{7}$$

$$z > 0,\ \mathrm{Re}\, c > 0,\ \mathrm{Re}\,(c - a - b + \mu) > 0,$$

для $B_{\nu,-}^{-\alpha}\, x^m$ мы будем иметь

$$z=1, \mu=-\alpha-\frac{m}{2}, a=\alpha+\frac{\nu-1}{2}, b=\alpha, c=2\alpha.$$

Тогда, учитывая, что $m+2\alpha+\nu<1$ справедливо неравенство

$$c-a-b+\mu=-\frac{\nu-1}{2}-\alpha-\frac{m}{2}>0,$$

и, следовательно, воспользовавшись (7), получим

$$IB_{\nu,-}^{\alpha}\, x^m=\frac{x^{2\alpha+m}}{2^{2\alpha}\Gamma(2\alpha)}\Gamma\left[\begin{array}{ccc} 2\alpha, & -\alpha-\frac{m}{2}, & -\frac{\nu-1}{2}-\alpha-\frac{m}{2} \\ \frac{1-\nu-m}{2}, & & -\frac{m}{2} \end{array}\right]$$

что после упрощения дает (6). □

Отметим важность полученной формулы, устанавливающей, что дробный интеграл Бесселя переводит одну степенную функцию в другую, так как это позволяет распространить его определение на произвольные степенные ряды. Явный вид константы в формуле (6) в форме отношения гамма–функций показывает, что дробный интеграл Бесселя является оператором дробного дифференцирования типа Гельфонда–Леонтьева [7].

3. Интегральное преобразование Меллина дробных степеней оператора Бесселя на полуоси и полугруповое свойство

В этом пункте выведем формулу преобразования Меллина от дробного интеграла Бесселя на полуоси $B_{\nu,-}^{-\alpha}$.

Преобразование Меллина функции f определяется формулой

$$Mf(s)=f^*(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}f(x)dx.$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha>0$. Преобразования Меллина от дробного интеграла и дробной производной Бесселя на полуоси имеют вид*

$$((IB_{\nu,-}^{\alpha}f)(x))^*(s)=\frac{1}{2^{2\alpha}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc} \frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2} \\ \alpha+\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \alpha+\frac{s}{2} \end{array}\right]f^*(2\alpha+s), \tag{8}$$

$$((DB_{\nu,-}^{\alpha}f)(x))^*(s)=2^{2\alpha}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc} \frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2} \\ \frac{s}{2}-\alpha-\frac{\nu-1}{2}, & \frac{s}{2}-\alpha \end{array}\right]f^*(s-2\alpha). \tag{9}$$

Доказательство. Имеем

$$((IB_{\nu,-}^{\alpha}f)(x))^*(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}(IB_{\nu,-}^{\alpha}f)(x)dx=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^\infty x^{s-1}dx$$

$$\times\int\limits_x^{+\infty}\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{x^2}{y^2}\right)f(y)dy$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^\infty f(y)(2y)^{1-2\alpha}dy$$

$$\times\int_0^y (y^2-x^2)^{2\alpha-1}\,{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{x^2}{y^2}\right)x^{s-1}dx.$$

Найдем внутренний интеграл

$$I=\int_0^y (y^2-x^2)^{2\alpha-1}\,{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{x^2}{y^2}\right)x^{s-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{y^2} (y^2-x)^{2\alpha-1}\,{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{x}{y^2}\right)x^{\frac{s}{2}-1}dx.$$

Используя формулу (7), получим

$$z=y^2>0,\ c=2\alpha>0,\ a=\alpha+\frac{\nu-1}{2},\ b=\alpha,\ \alpha=\frac{s}{2},$$

$$c-a-b+\alpha=\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}>0\Rightarrow s>\nu-1.$$

Тогда

$$I=\frac{y^{4\alpha+s-2}}{2}\,\Gamma\left[\begin{array}{ccc} 2\alpha, & \frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \alpha+\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & & \alpha+\frac{s}{2}\end{array}\right]$$

и

$$((IB^{\alpha}_{\nu,-}f)(x))^*(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc} \frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \alpha+\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \alpha+\frac{s}{2}\end{array}\right]\int_0^\infty f(y)(2y)^{1-2\alpha}y^{4\alpha+s-2}dy$$

$$=\frac{1}{2^{2\alpha}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc} \frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \alpha+\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \alpha+\frac{s}{2}\end{array}\right]\int_0^\infty f(y)y^{2\alpha+s-1}dy$$

$$=\frac{1}{2^{2\alpha}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc} \frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \alpha+\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \alpha+\frac{s}{2}\end{array}\right]f^*(2\alpha+s).$$

Найдем теперь преобразование Меллина от дробной производной Бесселя на полуоси

$$((DB^{\alpha}_{\nu}f)(x))^*(s)=((B^n_\nu(IB^{n-\alpha}_{\nu,-}f(x))^*(s)=$$

$$=2^{2n}\Gamma\left[\begin{array}{cc} n+1-\frac{s}{2} & \frac{1-s+\nu}{2}+n\\ 1-\frac{s}{2} & \frac{1-s+\nu}{2}\end{array}\right]((IB^{n-\alpha}_{\nu,-}f(x))^*(s-2n)$$

$$=2^{2n}\Gamma\left[\begin{array}{cc} n+1-\frac{s}{2} & \frac{1-s+\nu}{2}+n\\ 1-\frac{s}{2} & \frac{1-s+\nu}{2}\end{array}\right]$$

$$\times\frac{1}{2^{2(n-\alpha)}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc} \frac{s}{2}-n, & \frac{s}{2}-n-\frac{\nu-1}{2}\\ n-\alpha+\frac{s}{2}-n-\frac{\nu-1}{2}, & n-\alpha+\frac{s}{2}-n\end{array}\right](f(x))^*(s-2\alpha)$$

$$=2^{2\alpha}\Gamma\left[\begin{array}{cc} n+1-\frac{s}{2} & \frac{1-s+\nu}{2}+n\\ 1-\frac{s}{2} & \frac{1-s+\nu}{2}\end{array}\right]\Gamma\left[\begin{array}{cc} \frac{s}{2}-n, & \frac{s}{2}-n-\frac{\nu-1}{2}\\ \frac{s}{2}-\alpha-\frac{\nu-1}{2}, & \frac{s}{2}-\alpha\end{array}\right](f(x))^*(s-2\alpha).$$

Применяя формулу

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},\qquad z\notin\mathbb{Z},$$

в числителе получим

$$\Gamma\left(1+n-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-n\right)=\frac{\pi}{\sin(\frac{s}{2}-n)\pi}=\frac{(-1)^n\pi}{\sin(\frac{s}{2})\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1-s+\nu}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu+1}{2}-n\right)=\Gamma\left(1-\frac{1-s+\nu}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{1-s+\nu}{2}+n\right)$$

$$=\frac{\pi}{\sin(\frac{1-s+\nu}{2}+n)\pi}=\frac{(-1)^n\pi}{\sin(\frac{1-s+\nu}{2})\pi}.$$

Таким образом,

$$\frac{(-1)^n\pi}{\Gamma\left(\frac{1-s+\nu}{2}\right)\sin(\frac{1-s+\nu}{2})\pi}=(-1)^n\Gamma\left(\frac{1+s-\nu}{2}\right),$$

$$\frac{(-1)^n\pi}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\sin(\frac{s}{2})\pi}=(-1)^n\Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

Доказательство закончено. $\square$

Теорема 2. *Для дробного интеграла и дробной производной Бесселя на полуоси при $\alpha,\beta>0$ справедливо полугрупповое свойство*

$$IB^{-\alpha}_{\nu,-}IB^{\beta}_{\nu,-}f=IB^{\alpha+\beta}_{\nu,-}f, \tag{10}$$

$$DB^{\alpha}_{\nu,-}DB^{\beta}_{\nu,-}f=DB^{\alpha+\beta}_{\nu,-}f. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $g(y)=(IB^{\beta}_{\nu,-}f)(y)$. Используя (8), мы получим

$$(IB^{\alpha}_{\nu,-}[(IB^{\beta}_{\nu,-}f)(y)](x))^*(s)=((IB^{\alpha}_{\nu,-}g)(x))^*(s)=$$

$$=\frac{1}{2^{2\alpha}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc}\frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \alpha+\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \alpha+\frac{s}{2}\end{array}\right]g^*(2\alpha+s)$$

$$=\frac{1}{2^{2\alpha}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc}\frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \alpha+\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \alpha+\frac{s}{2}\end{array}\right](IB^{\beta}_{\nu,-}f)^*(2\alpha+s)$$

$$=\frac{1}{2^{2\alpha}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc}\frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \alpha+\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \alpha+\frac{s}{2}\end{array}\right]$$

$$\times\frac{1}{2^{2\beta}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc}\frac{2\alpha+s}{2}, & \frac{2\alpha+s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \beta+\frac{2\alpha+s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \beta+\frac{2\alpha+s}{2}\end{array}\right]f^*(2\alpha+2\beta+s).$$

С другой стороны

$$(IB^{\alpha+\beta}_{\nu,-}f)^*(s)=$$

$$=\frac{1}{2^{2(\alpha+\beta)}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc}\frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \alpha+\beta+\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \alpha+\beta+\frac{s}{2}\end{array}\right]f^*(2\alpha+2\beta+s).$$

Мы имеем верное равенство

$$\frac{1}{2^{2\alpha}}\Gamma\left[\begin{array}{cc}\frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \alpha+\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \alpha+\frac{s}{2}\end{array}\right]\times\frac{1}{2^{2\beta}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc}\frac{2\alpha+s}{2}, & \frac{2\alpha+s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \beta+\frac{2\alpha+s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \beta+\frac{2\alpha+s}{2}\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{2(\alpha+\beta)}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc}\frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}\\ \alpha+\beta+\frac{s}{2}-\frac{\nu-1}{2}, & \alpha+\beta+\frac{s}{2}\end{array}\right].$$

Таким образом, справедливо полугрупповое свойство (10). Свойство (11) доказывается аналогично. $\square$

Отметим, что в литературе по интегральным преобразованиям с параметром часто полугрупповое свойство называется индексным законом.

В заключение отметим, что конструкции дробных степеней оператора Бесселя вида (2) и (3) могут быть применены к исследованию различных дифференциальных уравнений дробного порядка, а также в теории операторов преобразования, см. [11]–[18], [25]–[26]. Дифференциальное уравнение с дробной степенью оператора Бесселя используется при моделировании случайного блуждания частицы (см. [19]–[20]). Другой подход к определению дробных степеней оператора Бесселя см. в [5]. Исследованию различных степеней оператора гиперболического типа, содержащего операторы Бесселя, посвящены работы [21]–[24].

References

[1] Sprinkhuizen–Kuyper I. G., *A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator*, J. Math. Analysis and Applications, **72** (1979), 674–702. MR0559398

[2] Sitnik S. M., *On explicit definitions of fractional powers of the Bessel differential operator and its applications to differential equations*, Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, **12**:2 (2010), 69–75. (in Russian).

[3] Sitnik S. M. *Fractional integrodifferentiations for differential Bessel operator*, in: Proc. of the International Symposium "The Equations of Mixed Type and Related Problems of the Analysis and Informatics", Nalchik. (2004), 163–167. (in Russian).

[4] Shishkina E. L., Sitnik S. M., *On fractional powers of Bessel operators*, Journal of Inequalities and Special Functions, **8**:1 (2017), 49–67. MR3636758

[5] McBride A. C., *Fractional Powers of a Class of Ordinary Differential Operators*, Proceedings of the London Mathematical Society (3), **45**:3 (1982), 519–546. MR0675420

[6] Abramowitz M., Stegun I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, and Mathematical Tables, Applied Mathematics Series*, New York, 1983.

[7] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Minsk: Nauka i tehnika, 1987. (in Russian). MR0915556

[8] Saigo M., *A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions*, Math. Rep. Kyushu Univ. **11**:2 (1977/78), 135–143. MR0510316

[9] Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I., *Integrals and Series, V. 3, More Special Functions*, second rev. edition, Moscow: Fizmatlit, 2003. (in Russian). MR2123876

[10] Repin O. A., *Boundary problems with displacement for equations of hyperbolic and mixed type*, Izd. Saratovskogo universiteta, Samarski filial, 1992. (in Russian). MR1228646

[11] Sitnik S. M., *Buschman–Erdélyi transmutations, classification and applications*, Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012 (Edited by M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin), Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, (2013), 171–201. (arXiv version http://arxiv.org/abs/1304.2114v1).

[12] Sitnik S. M., *Transmutations and Applications: a Survey*, (2012), arXiv:1012.3741, 141 P.

[13] Sitnik S. M., *A short survey of recent results on Buschman–Erdélyi transmutations*, Journal of Inequalities and Special Functions. (Special issue To honor Prof. Ivan Dimovski's contributions), **8**:1 (2017), 140–157. MR3636765

[14] Sitnik S. M., *Buschman–Erdélyi transmutations, its classification, main properties and applications*, Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics, Physics, **11(208)**:39 (2015), 60–76.

[15] Katrakhov V. V., Sitnik S. M., *Composition method for constructing B–elliptic, B–hyperbolic, and B–parabolic transformation operators*, Russ. Acad. Sci. Doklady Mathematics, **50**:1 (1995), 70–77. MR1298303

[16] Sitnik S. M., *Factorization and estimates of the norms of Buschman–Erdelyi operators in weighted Lebesgue spaces*, Soviet Mathematics Doklades, **44**:2 (1992), 641–646. MR1152421

[17] Sitnik S. M., *A survey of Buschman–Erdélyi transmutations*, Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal, **1**:4 (2016), 63–93. (in Russian). MR3594717

[18] Sitnik S. M., *Transmutation operators and applications*, Researches on contemporary analysis and mathematical modelling. Editors: Korobeinik Yu. F., Kusraev A. G. Vladikavkaz, (2008), 226–293. (in Russian).

[19] Garra R., Orsingher E., *Random flights related to the Euler-Poisson-Darboux equation*, Markov processes and related fields, **22**:1 (2016), 87–110. MR3523980

[20] Garra R., Orsingher E., Polito F., *Fractional KleinGordon Equations and Related Stochastic Processes*, Journal of Statistical Physics, **155** (2014), 777–809. MR3192184

[21] E. L. Shishkina, *On weighted generalized functions associated with quadratic forms*, Issues of Analysis, **5(23)**:2 (2016), 52–68. MR3589278

[22] E. L. Shishkina, *Weighted generalized functions coresponding to the quadratic forms with complex coefficients*, Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal, **2**:1 (2017), 88–98. (in Russian). MR3653294

[23] E. L. Shishkina, *On the boundedness of hyperbolic Riesz B-potential*, Lithuanian Mathematical Journal, **56**:4 (2016), 540–551. MR3572939

[24] E. L. Shishkina, *On the properties of one averaging kernel in Lebegue weighted class*, Scientific bulletins of Belgorod State University. Series Mathematics, **6(227)**:42 (2016), 12–19. (in Russian).

[25] E. L. Shishkina, S. M. Sitnik, *On an identity for the iterated weighted spherical mean and its applications*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 849–860. MR3563896

[26] E. L. Shishkina, S. M. Sitnik, *General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method*, Electronic Journal of Differential Equations 2017, (2017), 177. MR3690204

Sergei Mihailovich Sitnik
Belgorod State National Research University,
Pobeda st., 85, Belgorod, 308015, Russia;
RUDN University,
Miklukho–Maklaya st., 6,
Moscow, 117198, Russia.
E-mail address: sitnik@bsu.edu.ru

Elina Leonidovna Shishkina
Voronezh State University,
Universitetskaya pl., 1,
Voronezh, 394000, Russia.
E-mail address: ilina_dico@mail.ru