

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 1011–1023 (2018)

УДК 517.9

DOI 10.17377/semi.2018.15.085

MSC 35Q20

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И МАССЫ ГАЗА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ
КАНАЛЕ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ КОЭФФИЦИЕНТА
АККОМОДАЦИИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА

О.В. ГЕРМИДЕР, В.Н. ПОПОВ, А.А. ЮШКАНОВ

АБСТРАКТ. The article proposes method of solving the problem of heat and mass transfer in a long rectangular channel using Maxwell's mirror-diffusive boundary conditions. A rarefied gas flow through cross section is studied on the basis of the Williams model kinetic equation. Expressions are obtained for heat and mass fluxes as linear functions of the temperature gradient supported in the channel. The profiles of the heat flux vector and the mass velocity of the gas in the channel are constructed depending on the accommodation coefficient. The specific gas mass flux and the heat flux through the channel cross section have been calculated. A numerical analysis of the results is carried out in the case when the tangential momentum accommodation coefficient is close to unity. It is shown that if one of the channel dimensions is much smaller than the other, the obtained results coincide with the analogous results for channels with infinite parallel walls. The results were compared with the analogous results found in the open press.

Keywords: The Williams equation, the model of mirror-diffuse reflection, analytical solutions, method of characteristics.

GERMIDER, O.V., POPOV, V.N., YUSHKANOV, A.A., MATHEMATICAL SIMULATION OF HEAT AND MASS TRANSFER PROCESSES IN A RECTANGULAR CHANNEL DEPENDING ON THE ACCOMMODATION COEFFICIENT OF TANGENTIAL MOMENTUM.

© 2018 ГЕРМИДЕР О.В., ПОПОВ В.Н., ЮШКАНОВ А.А.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ по научному проекту № 18-302-00001 и частичной поддержке по проекту РФФИ и Правительства Московской области № 17-47-500752.

Поступила 13 марта 2018 г., опубликована 14 сентября 2018 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в связи с разработкой и широким практическим применением микро- и наноустройств, таких как MEMS и NEMS системы, аналитические системы на основе микрофлюидных чипов lab on a chip (лаборатория на чипе) и micro total analysis systems (микросистемы полного анализа) [1] и т.д. значительно возрос интерес к описанию течений жидкостей и газов в микро- и наноканалах различной конфигурации сечения. Это обусловлено в первую очередь тем, что протекающие в такого рода устройствах процессы тепло- и массопереноса оказывают большое влияние на их производительность и эффективность. Учитывая, что существующие микроэлектромеханические системы имеют размеры от микрометра до нескольких миллиметров, а наноэлектромеханические системы имеют субмикронные размеры, проведение в данной области экспериментальных исследований зачастую затруднено, а чаще всего невозможно [2]. В силу этого для проведения исследований процессов и явлений, протекающих в микро- и нано- устройствах, является необходимым широкое применение методов математического моделирования. Так как в нано- и микропотоках число столкновений молекул газа с обтекаемой газом поверхностью становится больше чем между молекулами газа, характер течения газа в канале в этом случае существенно зависит от взаимодействия молекул газа с поверхностью. Следовательно, особенно важным является проведение исследований процессов тепло- и массопереноса с использованием аккомодационных моделей граничных условий [3]. Одной из таких моделей является зеркально-диффузное граничное условие Максвелла. В модели Максвелла функция распределения молекул газа, отраженных от стенок канала, представляет собой линейную комбинацию диффузной и зеркальной моделей, коэффициентом в которой является коэффициент аккомодации тангенциального импульса. Другой моделью, описывающей взаимодействие молекул газа с поверхностью, является модель Черчиньяни-Лэмпис, в которой учитываются два параметра: коэффициент аккомодации тангенциального импульса и коэффициент аккомодации кинетической энергии. Задача о моделировании процессов тепло- и массопереноса в прямоугольном канале с использованием диффузной модели отражения была решена в [4]-[7], в [8] — с использованием модели Черчиньяни-Лэмпис. Недостатком граничного условия Черчиньяни-Лэмпис является то, что данная модель не позволяет получать аналитические решения модельных кинетических уравнений. В силу этого в представленной работе используется модель зеркально-диффузного отражения Максвелла. Для построения аналитического решения модельного кинетического уравнения Вильямса применяется подход, предложенный в [9]. Получены выражения теплового и массового потоков как функции от градиента температуры. Представленные результаты могут быть использованы для обоснования достоверности результатов численного моделирования и экспериментального исследования течения разреженного газа в канале.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим установившееся течение газа в длинном прямоугольном канале, стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm a'/2$ и $y' = \pm b'/2$ ($a' > b'$,

рис. 1). Движение газа обусловлено наличием постоянного градиента температуры, параллельного стенкам канала. Начало декартовой системы координат выбрано в сечении, расположенном в середине канала. Направление оси Oz' совпадает градиентом температуры. Будем рассматривать течение газа в средней части канала, в окрестности точки $z' = 0$. Изменение состояния газа будем описывать уравнением Вильямса, которое для стационарного режима течения газа в выбранной системе координат имеет вид [6]:

$$(1) \quad v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f),$$

$$(2) \quad f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 \right).$$

где $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$, \mathbf{v} – молекулярная скорость газа, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, \mathbf{r}' , m – размерный радиус-вектор и масса молекул газа, l_g – средняя длина свободного пробега молекул газа, k_B – постоянная Больцмана, $\gamma = 5\sqrt{\pi}/4$. Параметры n_* , T_* и \mathbf{u}_* в функции (2) выбираем из условия, что модельный интеграл столкновений удовлетворял законам сохранения числа частиц, импульса и энергии [10].

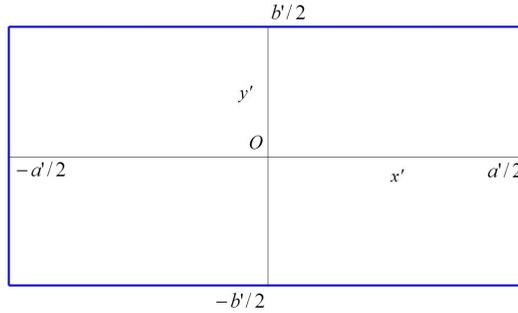


Рис. 1. Схема поперечного сечения канала

В качестве граничного условия на стенках канала используем модель зеркально-диффузного отражения Максвелла [11]:

$$(3) \quad f^+(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}) = (1 - \alpha) f^-(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})) + \alpha f_\Gamma(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}\mathbf{n} > 0,$$

$$(4) \quad f_\Gamma(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}) = n_\Gamma(\mathbf{r}'_\Gamma) \left(\frac{m}{2\pi k_B T(\mathbf{r}'_\Gamma)} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T(\mathbf{r}'_\Gamma)} \mathbf{v}^2 \right),$$

где α – коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа, $f^-(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v})$ – функция распределения падающих молекул газа на обтекаемую поверхность Γ , \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности Γ , направленный в сторону газа, $T_\Gamma = T(\mathbf{r}'_\Gamma)$, $n_\Gamma = n(\mathbf{r}'_\Gamma)$ – температура и концентрация газа на стенках канала.

В качестве размерного масштаба длины выберем b' , при этом соответствующие безразмерные величины длины будем обозначать без штриха. Предполагаем, что безразмерный градиент температуры является малым по абсолютной

величине:

$$G_T = \frac{1}{T_0} \frac{dT}{dz}, \quad |G_T| \ll 1,$$

где $z = z'/b'$. В линейном приближении температура газа имеет вид

$$T(z) = T_0(1 + G_T z).$$

Линеаризуем локально-равновесную функцию распределения (4) с параметрами, заданными на стенках канала, относительно абсолютного максвеллиана $f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$. Здесь $\beta = m/(2k_B T_0)$, $\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа. Предполагаем, что давление газа, которое поддерживается в канале, является постоянным. Учитывая при этом, что $p = n(z)k_B T(z)$, приходим к следующему выражению для $f_\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{C})$

$$(5) \quad f_\Gamma(z, \mathbf{C}) = f_0(C) \left(1 + G_T \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) z \right).$$

Течение газа медленное и газ находится все время в состоянии теплового равновесия со стенками канала, поэтому проведем линеаризацию функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ относительно $f_\Gamma(z, \mathbf{C})$ и учитывая выражение (4), представим ее как

$$(6) \quad f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C) \left(1 + G_T \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) z + h(x, y, \mathbf{C}) \right).$$

Функцию $f_*(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ запишем в виде

$$(7) \quad f_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C)(1 + h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C})),$$

$$h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = \frac{\delta n_*}{n_0} + 2\mathbf{C}\mathbf{U}_* + \left(C^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{\delta T_*}{T_0}.$$

Подставляя (6) и (7) в уравнение Вильямса (1), получаем линеаризованное релаксационное уравнение для определения функции $h(x, y, \mathbf{C})$:

$$(8) \quad \left(C_x \frac{\partial h}{\partial x} + C_y \frac{\partial h}{\partial y} + G_T \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) C_z \right) \gamma Kn + Ch(y, \mathbf{C}) =$$

$$\frac{C}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') h(y, \mathbf{C}') d^3 \mathbf{C}',$$

где $k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + 3\mathbf{C}\mathbf{C}'/2 + (C^2 - 2)(C'^2 - 2)/2$, $Kn = l_g/b'$ – число Кнудсена.

Представим функцию $h(x, y, \mathbf{C})$ в виде:

$$(9) \quad h(x, y, \mathbf{C}) = \gamma Kn G_T C_z \left(C - \frac{5}{2C} \right) Z(x, y, \varphi, \theta).$$

Здесь осуществлен переход к сферическим координатам в пространстве скоростей: $C_x = C \cos \varphi \sin \theta$, $C_y = C \sin \varphi \sin \theta$, $C_z = C \cos \theta$, где углы φ и θ отсчитываются от положительных направлений осей C_x и C_z в пространстве скоростей, соответственно.

Подставляя (9) в (8), приходим к уравнению относительно $Z(x, y, \varphi, \theta)$:

$$(10) \quad \left(\cos \varphi \frac{\partial Z}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \sin \theta \gamma Kn + Z(x, y, \varphi, \theta) + 1 = 0,$$

с граничным условием

$$(11) \quad Z(x, \pm \frac{b}{2}, \varphi, \theta) = (1 - \alpha) Z(x, \pm \frac{b}{2}, \varphi^*, \theta), \quad \sin \varphi^* = -\sin \varphi, \quad \pm \sin \varphi < 0,$$

$$(12) \quad Z(\pm \frac{a}{2}, y, \varphi, \theta) = (1 - \alpha)Z(\pm \frac{a}{2}, y, \varphi^*, \theta), \quad \cos \varphi^* = -\cos \varphi, \quad \pm \cos \varphi < 0.$$

Изменение функции $Z(x, y, \varphi, \theta)$ вдоль траектории (характеристики) [9]

$$(13) \quad d\mathbf{r}_\perp = \mathbf{c}_\perp dt,$$

определяется уравнением

$$(14) \quad \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{r}_\perp} \mathbf{c}_\perp \gamma K n + Z(x, y, \varphi, \theta) + 1 = 0.$$

Здесь $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$, $\mathbf{c}_\perp = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$ – компоненты радиус-вектора \mathbf{r} и вектора скорости молекулы $\mathbf{c} = \mathbf{C}/C$ в плоскости, перпендикулярной оси z .

Уравнение (14) запишем в виде:

$$(15) \quad dZ = -\frac{1}{\gamma K n} (Z(x, y, \varphi, \theta) + 1) dt.$$

Рассмотрим процесс столкновения молекул газа со стенками канала. Будем вести счет этих столкновений в противоположном направлении движения молекулы. Считаем, что t_1 – момент последнего столкновения с поверхностью, t_2 – момент предыдущего столкновения и т.д., а t_0 – время предстоящего столкновения, $T_n = t_n - t_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$). На рис. 1 показаны траектории для интервалов $[t_1, t_2], \dots, [t_6, t_7]$.

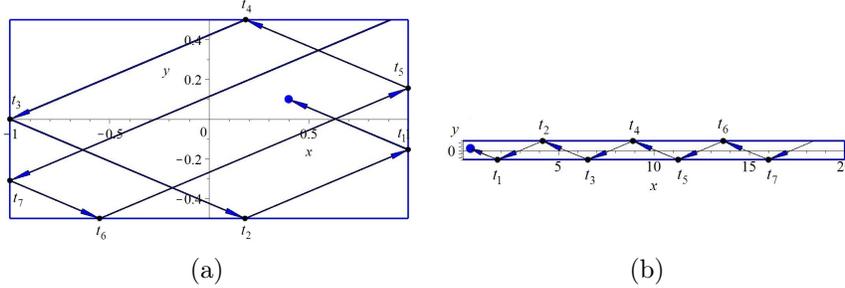


Рис. 2. Траектории на промежутках $[t_1, t_2], \dots, [t_6, t_7]$ для $a = 1$ и $a = 40$

Решением уравнения (15) является функция

$$(16) \quad Z_n(t) = A_n \exp\left(-\frac{t - t_n}{\gamma K n \sin \theta}\right) - 1, \quad t_n \leq t \leq t_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В точке отражения $t = t_n$ функция (16) испытывает скачок:

$$(17) \quad Z_n(t_n + 0) = (1 - \alpha)Z_{n+1}(t_n - 0).$$

Знак $+/-$ обозначает предел функции $Z_n(t)$ в точке отражения t_n справа или слева по времени пролета. Получим явный вид функции (16) на интервале $[t_1, t_0]$. В этом случае при $t = t_1 + 0$ имеем

$$Z_1(t_1 + 0) = A_1 - 1.$$

С другой стороны замечая, что $t_1 - 0 = t_2 + T_1$, получаем

$$Z_2(t_1 - 0) = A_2 \exp\left(-\frac{T_1}{\gamma K n \sin \theta}\right) - 1.$$

Из (17) следует, что $Z_1(t_1 + 0) = (1 - \alpha)Z_2(t_1 - 0)$. Тогда

$$(18) \quad A_1 = (1 - \alpha) \left(A_2 \exp \left(-\frac{T_1}{\gamma K n \sin \theta} \right) - 1 \right) + 1.$$

Действуя аналогично, получаем рекуррентное соотношение для A_n :

$$(19) \quad A_n = (1 - \alpha) \left(A_{n+1} \exp \left(-\frac{T_n}{\gamma K n \sin \theta} \right) - 1 \right) + 1, \quad n = 2, 3, \dots$$

Подставляя (19) в (18) при $n = 2, 3, \dots$, находим

$$(20) \quad \begin{aligned} A_1 = & 1 + (1 - \alpha) \left(\exp \left(-\frac{T_1}{\gamma K n} \right) - 1 \right) + (1 - \alpha)^2 \left(\exp \left(-\frac{T_2}{\gamma K n} \right) - 1 \right) \times \\ & \times \exp \left(-\frac{T_1}{\gamma K n} \right) + (1 - \alpha)^3 \left(\exp \left(-\frac{T_3}{\gamma K n} \right) - 1 \right) \exp \left(-\frac{(T_1 + T_2)}{\gamma K n} \right) + \\ & + (1 - \alpha)^4 \left(\exp \left(-\frac{T_4}{\gamma K n} \right) - 1 \right) \exp \left(-\frac{(T_1 + T_2 + T_3)}{\gamma K n} \right) + \dots \end{aligned}$$

В частном случае течения разреженного газа в канале, образованном двумя бесконечными параллельными плоскостями ($a^{-1} \ll 1$), все T_n совпадают ввиду симметрии рис. 1 (б), получаем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (20):

$$(21) \quad A_1 = 1 + \frac{(1 - \alpha) \left(\exp \left(-\frac{T}{\gamma K n} \right) - 1 \right)}{1 - (1 - \alpha) \exp \left(-\frac{T}{\gamma K n} \right)}.$$

Соотношения (16) и (20) полностью будут определять функцию $Z(x, y, \varphi, \theta)$ на интервале $[t_1, t_0]$, если параметры $t - t_1$, T_1 , T_2 , T_3 , и т.д. записать через x , y , φ . Получим выражение для $t - t_1$, интегрируя левую и правую части уравнения (13). Учитывая при этом (11) и (12), имеем

$$(22) \quad t - t_1 = \frac{2y - b}{2 \sin \theta \sin \varphi}, \quad \varphi_0 \leq \varphi < \varphi_1;$$

$$(23) \quad t - t_1 = \frac{2x - a}{2 \sin \theta \cos \varphi}, \quad \varphi_1 \leq \varphi < \varphi_2;$$

$$(24) \quad t - t_1 = \frac{2y + b}{2 \sin \theta \sin \varphi}, \quad \varphi_2 \leq \varphi < \varphi_3;$$

$$(25) \quad t - t_1 = \frac{2x + a}{2 \sin \theta \cos \varphi}, \quad \varphi_3 \leq \varphi < \varphi_4.$$

Здесь значения углов φ_k определяются выражениями ($k = \overline{0, 4}$) [6]:

$$(26) \quad \varphi_0 = \arctg \frac{2y - b}{2x - a} + \pi, \quad \varphi_1 = \arctg \frac{2y - b}{2x + a} + 2\pi, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{2y + b}{2x + a} + 2\pi,$$

$$(27) \quad \varphi_3 = \arctg \frac{2y + b}{2x - a} + 3\pi, \quad \varphi_4 = \arctg \frac{2y - b}{2x - a} + 3\pi.$$

Найдем параметр T_n , рассматривая точку на интервале $[t_{n+1}, t_n]$. Учитывая, что $T_n = t_n - t_{n+1}$, из уравнения (13) получим

$$(28) \quad T_n = \frac{x_{\Gamma,n} - x_{\Gamma,n+1}}{\sin \theta \cos \varphi_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В момент последнего столкновения с поверхностью ($n = 1$) находим координаты $\mathbf{r}_{\perp,\Gamma,1}$ из уравнения (13) и угол $\varphi^{(1)}$ — из граничных условий (11) и (12). В этом случае, если $\varphi_0 \leq \varphi < \varphi_1$ (рисунок 2 (a)-(c)), то

$$(29) \quad \begin{aligned} y_{\Gamma,1} &= b/2, & x_{\Gamma,1} &= x - \frac{y - y_{\Gamma,1}}{\operatorname{tg} \varphi}, \\ \varphi^{(1)} &= -\varphi + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 2\pi < \varphi^{(1)} < 3\pi, \end{aligned}$$

иначе, если $\varphi_1 \leq \varphi < \varphi_2$ (рисунок 2 (d)-(f)), то

$$(30) \quad \begin{aligned} x_{\Gamma,1} &= -a/2, & y_{\Gamma,1} &= y - (x - x_{\Gamma,1}) \operatorname{tg} \varphi, \\ \varphi^{(1)} &= \pi - \varphi + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_0(x_{\Gamma,1}, y_{\Gamma,1}) < \varphi^{(1)} < 3\pi/2 \\ & & & \text{или } 5\pi/2 < \varphi^{(1)} < \varphi_4(x_{\Gamma,1}, y_{\Gamma,1}), \end{aligned}$$

иначе, если $\varphi_2 \leq \varphi < \varphi_3$ (рисунок 2 (g)-(j)), то

$$(31) \quad \begin{aligned} y_{\Gamma,1} &= -b/2, & x_{\Gamma,1} &= x - \frac{y - y_{\Gamma,1}}{\operatorname{tg} \varphi}, \\ \varphi^{(1)} &= -\varphi + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_0(x_{\Gamma,1}, y_{\Gamma,1}) < \varphi^{(1)} < 2\pi \\ & & & \text{или } 3\pi < \varphi^{(1)} < \varphi_4(x_{\Gamma,1}, y_{\Gamma,1}), \end{aligned}$$

иначе (рисунок 2 (k)-(m)):

$$(32) \quad \begin{aligned} x_{\Gamma,1} &= a/2, & y_{\Gamma,1} &= y - (x - x_{\Gamma,1}) \operatorname{tg} \varphi, \\ \varphi^{(1)} &= \pi - \varphi + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 3\pi/2 < \varphi^{(1)} < 5\pi/2. \end{aligned}$$

Для $n = 2, 3, \dots$ координаты $x_{\Gamma,n}, y_{\Gamma,n}$ определяются $x_{\Gamma,n-1}, y_{\Gamma,n-1}$ и $\varphi_{\Gamma,n-1}$, а угол $\varphi^{(n)}$ — $x_{\Gamma,n}, y_{\Gamma,n}$. В этом случае если $y_{\Gamma,1} = b/2$, то, если $\varphi_2 \leq \varphi^{(n-1)} < \varphi_3$ (рис. 3 (a)), то

$$(33) \quad \begin{aligned} y_{\Gamma,n} &= -b/2, & x_{\Gamma,n} &= x_{\Gamma,n-1} - \frac{y_{\Gamma,n-1} - y_{\Gamma,n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, \\ \varphi^{(n)} &= -\varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_0(x_{\Gamma,n}, y_{\Gamma,n}) < \varphi^{(n)} < 2\pi \\ & & & \text{или } 3\pi < \varphi^{(n)} < \varphi_4(x_{\Gamma,n}, y_{\Gamma,n}), \end{aligned}$$

иначе, если $5\pi/2 \leq \varphi^{(n-1)}$ (рис. 3 (b)), то

$$(34) \quad \begin{aligned} x_{\Gamma,n} &= a/2, & y_{\Gamma,n} &= y_{\Gamma,n-1} - (x_{\Gamma,n-1} - x_{\Gamma,n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, \\ \varphi^{(n)} &= \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 3\pi/2 < \varphi^{(n)} < 5\pi/2, \end{aligned}$$

иначе (рис. 3 (c))

$$(35) \quad \begin{aligned} x_{\Gamma,n} &= -a/2, & y_{\Gamma,n} &= y_{\Gamma,n-1} - (x_{\Gamma,n-1} - x_{\Gamma,n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, \\ \varphi^{(n)} &= \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_0(x_{\Gamma,n}, y_{\Gamma,n}) < \varphi^{(n)} < 3\pi/2 \\ & & & \text{или } 5\pi/2 < \varphi^{(n)} < \varphi_4(x_{\Gamma,n}, y_{\Gamma,n}); \end{aligned}$$

иначе, если $x_{\Gamma, n-1} = -a/2$, то если $\varphi_3 \leq \varphi^{(n-1)} < \varphi_4$ (рис. 3 (d)), то

$$(36) \quad \begin{aligned} x_{\Gamma, n} &= a/2, & y_{\Gamma, n} &= y_{\Gamma, n-1} - (x_{\Gamma, n-1} - x_{\Gamma, n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, \\ \varphi^{(n)} &= \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 3\pi/2 < \varphi^{(n)} < 5\pi/2, \end{aligned}$$

иначе, если $2\pi \leq \varphi^{(n-1)}$ (рис. 3 (e)), то

$$(37) \quad \begin{aligned} y_{\Gamma, n} &= -b/2, & x_{\Gamma, n} &= x_{\Gamma, n-1} - \frac{y_{\Gamma, n-1} - y_{\Gamma, n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, \\ \varphi^{(n)} &= -\varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_0(x_{\Gamma, n}, y_{\Gamma, n}) < \varphi^{(n)} < 2\pi \\ & & & \text{или } 3\pi < \varphi^{(n)} < \varphi_4(x_{\Gamma, n}, y_{\Gamma, n}), \end{aligned}$$

иначе (рис. 3 (f))

$$(38) \quad \begin{aligned} y_{\Gamma, n} &= b/2, & x_{\Gamma, n} &= x_{\Gamma, n-1} - \frac{y_{\Gamma, n-1} - y_{\Gamma, n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, \\ \varphi^{(n)} &= -\varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 2\pi < \varphi^{(n)} < 3\pi; \end{aligned}$$

иначе если $y_{\Gamma, n-1} = -b/2$, то если $\varphi_0 \leq \varphi^{(n-1)} < \varphi_1$ (рис. 3 (g)), то

$$(39) \quad \begin{aligned} y_{\Gamma, n} &= b/2, & x_{\Gamma, n} &= x_{\Gamma, n-1} - \frac{y_{\Gamma, n-1} - y_{\Gamma, n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, \\ \varphi^{(n)} &= -\varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 2\pi < \varphi^{(n)} < 3\pi, \end{aligned}$$

иначе, если $3\pi \leq \varphi^{(n-1)}$ (рис. 3 (i)), то

$$(40) \quad \begin{aligned} x_{\Gamma, n} &= a/2, & y_{\Gamma, n} &= y_{\Gamma, n-1} - (x_{\Gamma, n-1} - x_{\Gamma, n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, \\ \varphi^{(n)} &= \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 3\pi/2 < \varphi^{(n)} < 5\pi/2, \end{aligned}$$

иначе (рис. 3 (j))

$$(41) \quad \begin{aligned} x_{\Gamma, n} &= -a/2, & y_{\Gamma, n} &= y_{\Gamma, n-1} - (x_{\Gamma, n-1} - x_{\Gamma, n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, \\ \varphi^{(n)} &= \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_0(x_{\Gamma, n}, y_{\Gamma, n}) < \varphi^{(n)} < 3\pi/2 \\ & & & \text{или } 5\pi/2 < \varphi^{(n)} < \varphi_4(x_{\Gamma, n}, y_{\Gamma, n}); \end{aligned}$$

иначе, если $x_{\Gamma, n-1} = a/2$, то если $\varphi_1 \leq \varphi^{(n-1)} < \varphi_2$ (рис. 3 (k)), то

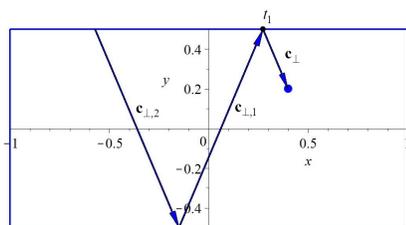
$$(42) \quad \begin{aligned} x_{\Gamma, n} &= -a/2, & y_{\Gamma, n} &= y_{\Gamma, n-1} - (x_{\Gamma, n-1} - x_{\Gamma, n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, \\ \varphi^{(n)} &= \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_0(x_{\Gamma, n}, y_{\Gamma, n}) < \varphi^{(n)} < 3\pi/2 \\ & & & \text{или } 5\pi/2 < \varphi^{(n)} < \varphi_4(x_{\Gamma, n}, y_{\Gamma, n}), \end{aligned}$$

иначе, если $\varphi^{(n-1)} < 2\pi$ (рис. 3 (l)), то

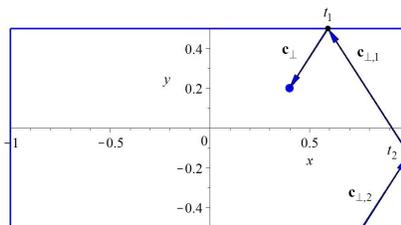
$$(43) \quad \begin{aligned} y_{\Gamma, n} &= b/2, & x_{\Gamma, n} &= x_{\Gamma, n-1} - \frac{y_{\Gamma, n-1} - y_{\Gamma, n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, \\ \varphi^{(n)} &= -\varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 2\pi < \varphi^{(n)} < 3\pi, \end{aligned}$$

иначе (рис. 3 (m))

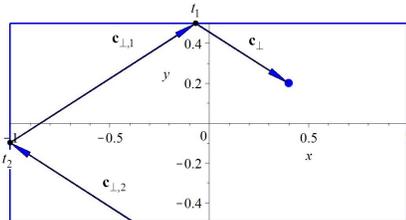
$$(44) \quad \begin{aligned} y_{\Gamma, n} &= -b/2, & x_{\Gamma, n} &= x_{\Gamma, n-1} - \frac{y_{\Gamma, n-1} - y_{\Gamma, n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, \\ \varphi^{(n)} &= k \in \mathbb{N} : & \varphi_0(x_{\Gamma, n}, y_{\Gamma, n}) & < \varphi^{(n)} < 2\pi \\ & & & \text{или } 3\pi < \varphi^{(n)} < \varphi_4(x_{\Gamma, n}, y_{\Gamma, n}). \end{aligned}$$



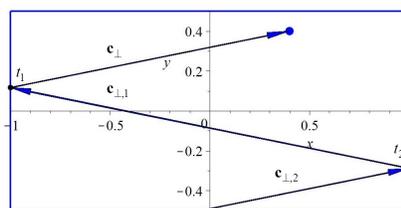
(a)



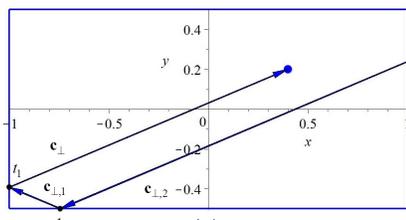
(b)



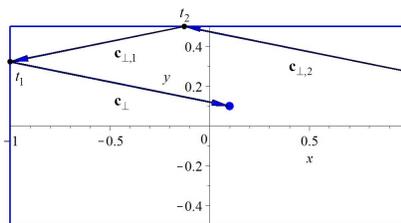
(c)



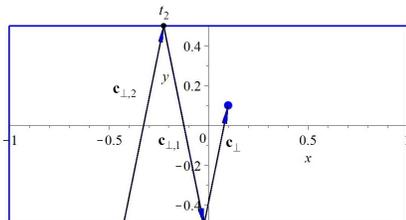
(d)



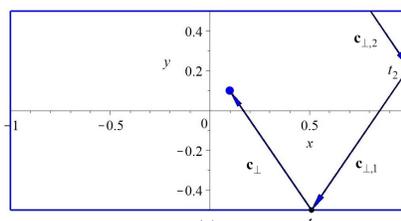
(e)



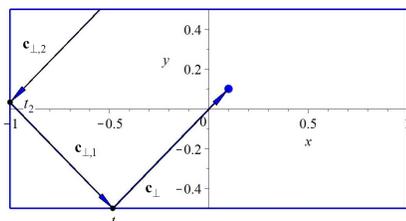
(f)



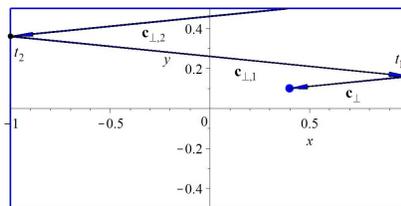
(g)



(h)



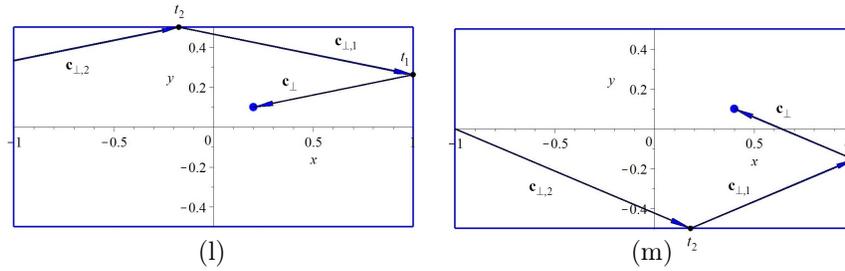
(i)



(j)



(k)

Рис. 3. Траектории на промежутке $[t_2, t_1]$

Таким образом, функция $Z(x, y, \varphi, \theta)$ на рассматриваемом интервале построена.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТОКОВ ТЕПЛА И МАССЫ ГАЗА В КАНАЛЕ. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исходя из статистического смысла функции распределения, ненулевые компоненты вектора потока тепла и массовой скорости газа в канале определяются выражениями [11]:

$$u_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(z)} \int v_z f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}, \quad q'_z(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} \int (v_z - u_z(x, y)) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(x, y)|^2 f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}.$$

Безразмерные компоненты векторов потока тепла и массовой скорости газа введем, следуя [12], как

$$(45) \quad q_z = \frac{\beta^{1/2}}{p_0} q'_z, \quad U_z = \beta^{1/2} u_z.$$

Подставляя выражения (6), (9), (16), (18) в (45), получаем

$$(46) \quad q_z(x, y) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) d^3 \mathbf{C} = \\ = -\frac{3G_T \gamma K n}{2\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} A_1 \exp\left(-\frac{t-t_1}{\gamma K n}\right) d\varphi \right) = -\frac{9U_z(x, y)}{2},$$

где A_1 определяется выражением (20), $(t-t_1)$ — выражениями (22)-(25), а T_n — (28)-(44).

Приведенные потоки тепла J_Q и массы газа J_M в прямоугольном канале находим по формулам [12]

$$(47) \quad J_Q = \frac{8}{ab} \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} q_z(x, y) dx dy, \quad J_M = \frac{8}{ab} \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} U_z(x, y) dx dy.$$

Из (46) и (47) вытекает следующее равенство

$$J_Q = -\frac{9}{2} J_M.$$

Значения величины J_M/G_T , полученные по (47) с применением системы компьютерной алгебры Maple 18 на основе алгоритма Cuhre библиотеки Cuba, приведенного в [13], представлены в таблице 1 для $\alpha = 0.95$ и 0.9 . Указанные

значения α выбраны исходя из того, что для взаимодействующих с необработанной специальным образом поверхностью, коэффициент аккомодации тангенциального импульса близок к единице. Например для He он имеет значение $\alpha = 0.895 \pm 0.004$ при взаимодействии со стеклянной поверхностью, для Ne — $\alpha = 0.925 \pm 0.014$, Ar — $\alpha = 0.927 \pm 0.028$ [14]. Значения J_M/G_T , представленные в таблице 1, получены с учетом четырех членов ряда (20). Для $a \gg 1$ значения J_Q/G_p найдены с использованием (21). В таблице 2 для сравнения результатов приведены аналогичные значения приведенного потока тепла, полученные в [4] и [5] на основе S-модели при полной аккомодации молекул газа на стенках канала. Заметим, что в этом случае по формуле (20) получаем значение $A_1 = 1$, которое соответствует диффузной модели отражения.

ТАБЛИЦА 1. Значения J_M/G_T для $\alpha = 0.9, 0.95$

Kn	a						
	1	1.1	2	5	10	50	∞
	(47), (20)						(47), (21)
$\alpha = 0.9$							
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.010	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083
0.100	0.0717	0.0722	0.0744	0.0760	0.0765	0.0771	0.0771
0.500	0.2177	0.2228	0.2490	0.2716	0.2795	0.2858	0.2873
1.000	0.2915	0.3005	0.3510	0.4028	0.4225	0.4391	0.4429
2.000	0.3550	0.3681	0.4465	0.5406	0.5846	0.6215	0.6303
5.000	0.4160	0.4334	0.5443	0.6996	0.7868	0.8865	0.9102
10.00	0.4461	0.4663	0.5951	0.7886	0.9133	1.0866	1.1360
100.0	0.4923	0.5154	0.6710	0.9330	1.1342	1.5554	1.9172
1000	0.5723	0.5956	0.7558	1.0333	1.2569	1.7796	2.7094
$\alpha = 0.95$							
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.010	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083
0.100	0.0711	0.0716	0.0739	0.0756	0.0761	0.0766	0.0768
0.500	0.2110	0.2158	0.2425	0.2654	0.2733	0.2797	0.2813
1.000	0.2788	0.2877	0.3375	0.3887	0.4085	0.4247	0.4286
2.000	0.3359	0.3485	0.4241	0.5151	0.5571	0.5940	0.6032
5.000	0.3889	0.4054	0.5102	0.6576	0.7418	0.8350	0.8605
10.00	0.4148	0.4331	0.5534	0.7361	0.8539	1.0145	1.0663
100.0	0.4484	0.4699	0.6135	0.8543	1.0394	1.4277	1.7745
1000	0.4569	0.4787	0.6263	0.8799	1.0814	1.5620	2.4911

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в рамках кинетического подхода решена задача о переносе тепла и массы в разреженном газе в прямоугольном канале при наличии постоянного градиента температуры с использованием зеркально-диффузного граничного условия Максвелла. Получены выражения теплового и массового потоков как функции от градиента температуры. Для различных значений числа Кнудсена и размеров поперечного сечения прямоугольного канала вычислены значения

ТАБЛИЦА 2. Значения J_M/G_T для $\alpha = 1$

Kn	a							
	1		2		4		10	
	(47), (20)	[5]	(47), (20)	[4]	(47), (20)	[4]	(47), (20)	[5]
0.100	0.0868	0.0705	0.0921	0.0851	0.0947	0.0749	0.0956	0.0758
1.000	0.2545	0.2669	0.3122	0.3246	0.3428	0.3659	0.3553	0.3949
2.000	0.2953	0.3182	0.3731	0.4033	0.4239	0.4735	0.4490	0.5323
10.00	0.3637	0.3866	0.4815	0.5172	0.5871	0.6483	0.6763	0.7990
100.0	0.4110	0.4142	0.5558	0.5666	0.7120	0.7329	0.9165	0.9579
1000	0.4181	0.4186	0.5736	0.5749	0.7451	0.7479	0.9839	0.9898

потока тепла и массы газа. Показано существенное влияние коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа на величины потоков. Полученные формулы при построении решения линеаризованного уравнения Вильямса в виде ряда по малому параметру могут быть также применены для исследования течений газа в каналах с другой конфигурацией сечения. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными для каналов с двумя бесконечными параллельными стенками.

REFERENCES

- [1] H. Yamaguchi, T. Hanawa, O. Yamamoto, et al., *Experimental measurement on tangential momentum accommodation coefficient in a single microtube*, *Microfluid Nanofluid*, **11** (2011), 57–64.
- [2] T. Ewart, P. Perrier, I.A. Graur, J.G. Meolans, *Tangential momentum accommodation in microtube*, *Microfluid. Nanofluid*, **3** (2007), 689–696. Zbl 1117.76300
- [3] A.V. Latyshev, A.A. Yushkanov, *A method of solving boundary value problems for kinetic equations*, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **44:6** (2004), 1051–1061. MR2098956
- [4] I. Graur, M.T. Ho, *Rarefied gas flow through a long rectangular channel of variable cross section*, *Vacuum*, **101** (2014), 328–332.
- [5] F.M. Sharipov, *Rarefied gas flow through a long rectangular channel*, *J. Vac. Sci. Technol. A*, **17:5** (1999), 3062–3066.
- [6] O.V. Germider, V.N. Popov *Mathematical modeling of heat transfer process in a rectangular channel in the problem of Poiseuille flow*, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **13** (2016), 1401–1409. MR3592224
- [7] V. A. Titarev, E. M. Shakhov, *Kinetic analysis of the isothermal flow in a long rectangular microchannel*, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. **50:7** (2010), 1221–1237. MR2760452
- [8] S. Pantazis, S. Varoutis, V. Hauer, C. Day, D. Valougeorgis, *Gas-surface scattering effect on vacuum gas flows through rectangular channels*, *Vacuum* **85** (2011), 1161–1164.
- [9] A.G. Lesskis, A.A. Yushkanov, Yu.I. Yalamov, *Magnetic dipole absorption of infrared radiation by a fine metal particle*, *Surface*, **11** (1987), 115–121.
- [10] C. Cercignani, *Mathematical methods in the kinetic theory of gases*, New York: Plenum Press, 1969. MR0255199
- [11] M.N. Kogan, *Rarefied gas dynamics. Kinetic theory*, Moscow: Nauka, 1967. Zbl 0173.28301
- [12] F.M. Sharipov, V.D. Seleznev, *Motion of Rarefied Gases in Channels and Microchannels*, Yekaterinburg: UrO RAN, 2008.
- [13] T. Hahn *Cuba — a library for multidimensional numerical integration*, *Computer Physics Communications*, **168:2** (2005), 78–95. MR2136794
- [14] M. Hadj-Nacer *Tangential momentum accommodation coefficient in microchannels with different surface materials (measurements and simulations): These de doctorat*, Universite d'aix Marseille, 2012.

OKSANA VLADIMIROVNA GERMIDER
NORTHERN ARCTIC FEDERAL UNIVERSITY NAMED AFTER M. V. LOMONOSOV,
SEVERNAYA DVINA EMB., 4,
163002, ARKHANGELSK, RUSSIA
E-mail address: o.germider@narfu.ru

VASILY NIKOLAEVICH POPOV
NORTHERN ARCTIC FEDERAL UNIVERSITY NAMED AFTER M. V. LOMONOSOV,
SEVERNAYA DVINA EMB., 4,
163002, ARKHANGELSK, RUSSIA
E-mail address: v.popov@narfu.ru

ALEKSANDR ALEKSEEVICH YUSHKANOV
MOSCOW REGION STATE UNIVERSITY,
RADIO STR., 10A,
107005, MOSCOW, RUSSIA
E-mail address: yushkanov@inbox.ru