S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 15, стр. 1024–1039 (2018)* УДК 517.51
DOI 10.17377/semi.2018.15.086 MSC 46E35

# ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОБЛАСТЕЙ В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ СУММИРУЕМОСТИ

А.С. РОМАНОВ

Abstract. In this paper we consider questions related to the equivalence of Euclidean domains from the point of view of the isomorphism of the Sobolev spaces with variable exponents.

**Keywords:** Sobolev spaces, variable exponents, capacity, equivalent domains.

При решении различных задач возникает необходимость такого изменения исходной области $G$, что в новой области $G'$ пространство Соболева $L^1_p(G')$ оказывается изоморфным пространству Соболева $L^1_p(G)$. Такие области $G$ и $G'$ называют $(1,p)$-эквивалентными. Естественным образом $(1,p)$-эквивалентные области появляются, к примеру, при изучении операторов композиции в пространствах Соболева. Достаточно подробно свойства $(1,p)$-эквивалентных областей рассматривались в работах [1, 2, 3].

Нас будет интересовать вопрос об эквивалентности евклидовых областей с точки зрения изоморфности определенных в них пространств Соболева с переменными показателями суммируемости. Отметим, что в этом случае многие свойства эквивалентных областей оказываются вполне аналогичными соответствующим свойствам для случая постоянных показателей суммируемости, а доказательства по большей части являются вполне естественной, хотя и не всегда простой, модификацией доказательств работ [1, 2, 3].

---

Romanov, A.S., On the equivalence of domains in the theory of Sobolev spaces with variable exponents.



Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект № 0314-2016-0007, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-01-00801.

*Поступила 25 июля 2018 г., опубликована 18 сентября 2018 г.*

## I. Пространства Лебега с переменными показателями суммируемости

Не стремясь к максимальной общности, кратко сообщим в удобной для нас форме необходимую информацию о пространствах Лебега с переменными показателями суммируемости. Более подробное и строгое изложение элементов теории таких функциональных пространств и доказательства приводимых в этом параграфе утверждений можно найти, к примеру, в работах [4, 5, 6, 7, 8]. В определении всех встречающихся функциональных классов используется стандартная $n$-мерная мера Лебега $m_n$, поэтому в обозначениях функциональных пространств будем опускать символ меры, будем писать $dx$ вместо $dm_n$ и, когда это удобно, использовать обозначение $|G|$ вместо $m_n(G)$.

Рассмотрим область $G \subset R^n$ и измеримую функцию $p : G \to [1, \infty)$.

На множестве измеримых функций $f : G \to R$ введем функционал

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int\limits_G |f(x)|^{p(x)} dx.$$

В случае, когда потребуется указать область определения функции мы будем использовать обозначение $\rho_{p(\cdot),G}(*)$.

Пространство Лебега с переменным показателем суммируемости $L_{p(\cdot)}(G)$ определим как класс всех таких функций $f$, что $\rho_{p(\cdot)}(\lambda f) < \infty$ при некотором значении $\lambda > 0$.

Норма в пространстве $L_{p(\cdot)}(G)$ вводится равенством

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f \mid L_{p(\cdot)}\| = \inf \left\{ \alpha > 0 \mid \; \rho_{p(\cdot)}(f/\alpha) = \int\limits_G \left( \frac{|f(x)|}{\alpha} \right)^{p(x)} dx \le 1 \right\}.$$

При $p(x) = p = const$ введенная норма совпадает со стандартной нормой в $L_p$. Норма в пространстве $L_{p(\cdot)}(G)$ является монотонной, т.е. из условия $|f| \le |g|$ почти всюду следует неравенство $\|f\|_{p(\cdot)} \le \|g\|_{p(\cdot)}$. Функционал $\rho_{p(\cdot)}(f)$ также является монотонным, а функция $\alpha \longmapsto \rho_{p(\cdot)}(f/\alpha)$ непрерывна и убывает.

**Предложение 1.1,** [4, 7]**.** Пространство $L_{p(\cdot)}(G)$ является полным.

Положим $p_- = \operatorname*{ess\,inf}_{x \in G} p(x)$, $p^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in G} p(x)$. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество функций $p : G \to (1, \infty)$, удовлетворяющих условию

$$1 < p_- \le p(x) \le p^+ < \infty.$$

Если $p \in \mathcal{P}$, функция $f \in L_{p(\cdot)}(G)$ и $\|f\|_{p(\cdot)} > 0$, то согласно работам [4, 7] выполняется равенство

$$\rho_{p(\cdot)}(f/\|f\|_{p(\cdot)}) = \int\limits_G \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}} \right)^{p(x)} dx = 1. \tag{1}$$

Из равенства (1) следует простая, но полезная оценка

$$\min \left( \|f\|_{p(\cdot)}^{p_-}, \|f\|_{p(\cdot)}^{p^+} \right) \le \rho_{p(\cdot)}(f) \le \max \left( \|f\|_{p(\cdot)}^{p_-}, \|f\|_{p(\cdot)}^{p^+} \right). \tag{2}$$

Довольно часто при изучении различных свойств вместо оценок нормы оказывается более удобным использование оценок для функционала $\rho_{p(\cdot)}(*)$. Некоторые соотношения, связывающие свойства нормы и свойства функционала, сформулированы в следующем утверждении.

**Предложение 1.2.**
1) Условия $\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ и $\rho_{p(\cdot)}(f) \le 1$ эквивалентны.
2) $\|f_n\|_{p(\cdot)} \to 0$ тогда и только тогда, когда $\rho_{p(\cdot)}(f_n) \to 0$.
3) Если $\rho_{p(\cdot)}(f) \le K < \infty$, то $\|f\|_{p(\cdot)} \le L = L\,(p(x), K) < \infty$.

При $p(x) \in \mathcal{P}$ выполняется аналог классического неравенства Гёльдера

$$\int\limits_G |f(x)g(x)|\,dx \le \left(1 + \frac{1}{p_-} - \frac{1}{p^+}\right) \|f\|_{p(\cdot)} \cdot \|g\|_{p'(\cdot)},$$

где сопряженный показатель $p'(x)$ определяется стандартным равенством

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1.$$

Неравенство Гёльдера позволяет стандартным образом определить двойственную норму

$$|||f|||_{p(\cdot)} = \sup_{\|g\|_{p'(\cdot)} \le 1} \int\limits_X |f(x)g(x)|\,dx,$$

которая эквивалентна введенной ранее, т.е.

$$C_1\,\|f\|_{p(\cdot)} \le |||f|||_{p(\cdot)} \le C_2\,\|f\|_{p(\cdot)}.$$

**Предложение 1.3,** [4, 7]. Пространство $L_{p(\cdot)}(G)$ является рефлексивным тогда и только тогда, когда $p(x) \in \mathcal{P}$.

**Предложение 1.4,** [4, 7]. Если область $G$ имеет конечную меру, показатели $p(x), g(x) \in \mathcal{P}$ и $q(x) \le p(x)$, то пространство $L_{p(\cdot)}(G)$ непрерывно вложено в пространство $L_{q(\cdot)}(G)$, при этом

$$\|f\|_{q(\cdot)} \le (1 + |G|)\|f\|_{p(\cdot)}.$$

В частности, пространство $L_{p(\cdot)}(G)$ непрерывно вложено в пространство Лебега с постоянным показателем суммируемости $L_{p_-}(G)$.

**Предложение 1.5,** [7]. Если $p(x) \in \mathcal{P}$, $f, f_k \in L_{p(\cdot)}(G)$, $f_k \to f$ слабо в $L_{p(\cdot)}(G)$, то

$$\rho_{p(\cdot)}(f) \le \liminf_{k\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_k).$$

Нам понадобится аналог результата, известного для пространств Лебега с постоянным показателем суммируемости:
*при* $1 < p < \infty$ *из слабой сходимости последовательности функций в* $L_p$ *и условия* $\|f_k\|_p \to \|f_0\|_p$ *следует сильная сходимость в* $L_p$ [9].

**Лемма 1.6.** Если $p(x) \in \mathcal{P}$, функции $f_0, f_k \in L_{p(\cdot)}(G)$, $f_k \to f_0$ слабо в $L_{p(\cdot)}(G)$ и $\rho_{p(\cdot)}(f_k) \to \rho_{p(\cdot)}(f_0)$, то

$$\rho_{p(\cdot)}(f_0 - f_k) \to 0.$$

**Доказательство** Получение результата при $p(x) \le 2$ и $p(x) > 2$ основано на различных технических оценках и требует отдельного рассмотрения. Общий случай является следствием полученных в частных случаях утверждений.

При $k \in N \cup \{0\}$ рассмотрим функции

$$f_{1,k}(x) = \begin{cases} f_k(x), & \text{если} \quad p(x) \le 2; \\ 0, & \text{если} \quad p(x) > 2. \end{cases}$$

Положим $f_{2,k}(x) = f_k(x) - f_{1,k}(x)$. Тогда $f_{i,k} \to f_{i,0}$ слабо в $L_{p(\cdot)}(G)$. Учитывая предложение 1.5, имеем

$$\rho_{p(\cdot)}(f_0) = \rho_{p(\cdot)}(f_{1,0}) + \rho_{p(\cdot)}(f_{2,0}) \le \liminf_{k\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_{1,k}) + \liminf_{k\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_{2,k}) \le$$

$$\limsup_{k\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_{1,k}) + \liminf_{k\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_{2,k}) \le \limsup_{k\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_k) = \lim_{k\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_k) = \rho_{p(\cdot)}(f_0).$$

Следовательно,

$$\liminf_{k\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_{1,k}) = \limsup_{k\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_{1,k}) \quad \text{и} \quad \rho_{p(\cdot)}(f_{i,k}) \to \rho_{p(\cdot)}(f_{i,0}), \quad i = 1, 2.$$

1. При $p(x) \le 2$ результат леммы является следствием формальной замены $p$ на $p(x)$ и дословного повторения первой части доказательства необходимости в теореме 1 (глава VIII, §3) книги [9].

2. При $p(x) > 2$ нужно воспользоваться второй частью доказательства необходимости в теореме 1 (глава VIII, §3, [9]).

Общий случай является следствием равенства

$$\rho_{p(\cdot)}(f_0 - f_k) = \rho_{p(\cdot)}(f_{1,0} - f_{1,k}) + \rho_{p(\cdot)}(f_{2,0} - f_{2,k}). \quad \blacksquare$$

## II. Пространства Соболева с переменными показателями суммируемости

Нас будут интересовать классы функций, имеющих первые обобщенные производные.

Рассмотрим область $G \subset R^n$ и пусть $p(x) \in \mathcal{P}$. Символами $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ и $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ будем обозначать обобщенную производную и обобщенный градиент функции $u$.

Пространства Соболева с переменным показателем суммируемости определим естественным образом, полагая

$$L^1_{p(\cdot)}(G) = \{u \in L_{1,loc}(G) \ \mid \ |\nabla u| \in L_{p(\cdot)}(G)\},$$

$$W^1_{p(\cdot)}(G) = \{u \in L_{p(\cdot)}(G) \ \mid \ |\nabla u| \in L_{p(\cdot)}(G)\}.$$

Полунорма в пространстве $L^1_{p(\cdot)}(G)$ и норма в пространстве $W^1_{p(\cdot)}(G)$ определяются равенствами

$$\|u \mid L^1_{p(\cdot)}\| = \|\nabla u \mid L_{p(\cdot)}\|,$$

$$\|u \mid W^1_{p(\cdot)}\| = \|u \mid L_{p(\cdot)}\| + \|\nabla u \mid L_{p(\cdot)}\|.$$

Символом $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\cdot)}(G)$ обозначим замыкание пространства $C_0^\infty(G)$ относительно нормы пространства $W^1_{p(\cdot)}(G)$.

**Предложение 2.1,** [4, 7]**.** При $p(x) \in \mathcal{P}$ пространство $W^1_{p(\cdot)}(G)$ является банаховым, рефлексивным и равномерно выпуклым.

Символом $\dot{L}^1_{p(\cdot)}(G)$ обозначим фактор-пространство пространства Соболева $L^1_{p(\cdot)}(G)$ по тождественно постоянным функциям. Полунорма $\|\cdot \mid L^1_{p(\cdot)}\|$ в фактор-пространстве будет нормой. Элементом фактор-пространства является класс функций, отличающихся на постоянное слагаемое и имеющих одинаковую полунорму.

**Лемма 2.2.** При $p(x) \in \mathcal{P}$ пространство $\dot{L}^1_{p(\cdot)}(G)$ является банаховым, рефлексивным и равномерно выпуклым.

**Доказательство.** Докажем полноту пространства. В пространстве $\dot{L}^1_{p(\cdot)}(G)$ рассмотрим фундаментальную последовательность $\{\dot{u}_k\}$. В силу определения для всякого представителя $u_k$ класса $\dot{u}_k$ и любого $i \in [1, n]$ последовательность производных $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}$ является фундаментальной в пространстве Лебега $L_{p(\cdot)}(G)$. Поскольку пространство Лебега является полным, то производные $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}$ сходятся в $L_{p(\cdot)}(G)$ к некоторой функции $h_i \in L_{p(\cdot)}(G)$. Остается показать существование такой функции $u$, что $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = h_i$.

Пусть вначале область $G$ является ограниченной. Поскольку в этом случае пространство $\dot{L}^1_{p(\cdot)}(G)$ непрерывно вложено в $\dot{L}^1_{p_-}(G)$ – пространство Соболева с постоянным показателем суммируемости $p_-$, то последовательность $\{\dot{u}_k\}$ является фундаментальной и сходится в полном пространстве $\dot{L}^1_{p_-}(G)$ к искомой функции $\dot{u}$ [10].

Если область $G$ является неограниченной, то достаточно рассмотреть ее исчерпание ограниченными подобластями. Пусть подобласти $G_m$ ограничены, $G_m \subset G_{m+1}$ и $G = \cup G_m, m = 1, 2, \ldots$ По ранее доказанному для всякой ограниченной области $G_m$ существует такая функция $v_m$, что $\dfrac{\partial v_m}{\partial x_i} = h_i$ на $G_m$. При этом $v_{m+1}|_{G_m} - v_m = const$ почти всюду. Рассмотрим набор таких постоянных $\{C_m\}$, что $v_m + C_m = v_1$ почти всюду на $G_1$. Положим

$$u(x) = v_m + C_m \quad \text{при } x \in G_m \setminus G_{m-1}.$$

Тогда $u(x) = v_m + C_m$ почти всюду на $G_m$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(G)$, тогда существует такой номер $m$, что $supp\ \varphi \subset G_m$ и

$$\int\limits_G u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_{G_m} (v_m + C_m) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_{G_m} h_i\, \varphi\, dx = \int\limits_G h_i\, \varphi\, dx.$$

Следовательно $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = h_i$.

Доказательство рефлексивности и равномерной выпуклости дословно повторяет доказательство этих свойств для пространств $W^1_{p(\cdot)}(G)$ в теореме 8.1.6 в работы [7]. ∎

**Замечание.** При доказательстве полноты пространства $\dot{L}^1_{p(\cdot)}(G)$ в теореме 12.2.3 работы [7]. предполагается выполнение условия $p \in \mathcal{P}^{\log}(G)$, которое в данном случае является излишним.

Для удобства мы будем отождествлять класс эквивалентности $[u]$, являющийся элементом фактор-пространства, и функцию $u \in L^1_{p(\cdot)}$, являющуюся представителем этого класса.

Свойства соболевских функций с переменным показателем суммируемости существенным образом зависят свойств функции $p(x)$. Во многих случаях для получения аналогов классических результатов оказывается достаточным наличие у функции $p(x)$ логарифмического модуля непрерывности.

Обозначим через $\mathcal{P}_{\ln}(G)$, множество непрерывных функций $p(x) \in \mathcal{P}$, для которых при $x, y \in G, |x - y| < 1$ выполняется оценка

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{|\ln|x - y||}.$$

В работе [7] рассматривается эквивалентное условие и класс показателей $\mathcal{P}^{\log}$. Для нас при получении различных оценок оказывается более удобным класс $\mathcal{P}_{\ln}(G)$, при этом, не оговаривая специально, мы можем использовать результаты работы [7], в формулировках которых используется класс показателей $\mathcal{P}^{\log}$.

**Предложение 2.3.** Пусть $p \in \mathcal{P}_{\ln}(G)$, тогда пространство $C^\infty(G) \cap L^1_{p(\cdot)}(G)$ плотно в $L^1_{p(\cdot)}(G)$.

Доказательство основано на усреднении функции и при замене $W^k_{p(\cdot)}$-нормы на $L^1_{p(\cdot)}$-норму дословно повторяет доказательство теоремы 9.1.8 работы [7].

**Замечание.** Для всякой функции $u \in L^1_{p(\cdot)}(G)$ срезка

$$u_m = \max(\min(u, m), -m)$$

принадлежит пространству $L^1_{p(\cdot)}(G)$. Поэтому ограниченные функции из $L^1_{p(\cdot)}(G)$ плотны в пространстве $L^1_{p(\cdot)}(G)$. С учетом предложения 2.3 при $p \in \mathcal{P}_{\ln}(G)$ получаем, что ограниченные функции из $C^\infty(G) \cap L^1_{p(\cdot)}(G)$ плотны в $L^1_{p(\cdot)}(G)$.

**Лемма 2.4.** Пусть $p \in \mathcal{P}_{\ln}(G)$, последовательность функций $\{u_k \in L^1_{p(\cdot)}(G)\}$ ограничена в $L^1_{p(\cdot)}(G)$ и сходится почти всюду к функции $u \in L^1_{p(\cdot)}(G)$, тогда существует подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$, слабо сходящаяся в $L^1_{p(\cdot)}(G)$ к функции $u$. При этом

$$\rho_{p(\cdot)}(|\nabla u|) \le \liminf_{m\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(|\nabla u_{k_m}|).$$

**Доказательство.** Поскольку последовательность $\{u_k\}$ ограничена, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$, слабо сходящуюся в $L^1_{p(\cdot)}(G)$ к некоторой функции $v \in L^1_{p(\cdot)}(G)$. На всяком шаре $B \subset G$ подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$ слабо сходится к функции $v$ в пространстве $L^1_{p_-}(B)$, и мы можем воспользоваться результатом для пространств Соболева с постоянным показателем суммируемости. Согласно следствию пункта 2.1 главы 4 книги [3] функция $v$ равна функции $u$ почти всюду в шаре $B$. В силу произвольности выбора шара $v = u$ почти всюду в области $G$. Неравенство для функционала $\rho_{p(\cdot)}(*)$ является следствием предложения 1.5. ■

**Лемма 2.5.** Пусть $p \in \mathcal{P}_{\ln}(G)$. Если последовательность функций $\{u_k \in L^1_{p(\cdot)}(G)\}$ сходится слабо в $L^1_{p(\cdot)}(G)$ к функции $u \in L^1_{p(\cdot)}(G)$ и

$$\rho_{p(\cdot)}(|\nabla u_k|) \to \rho_{p(\cdot)}(|\nabla u|),$$

то функции $u_k$ сходятся к $u$ в $L^1_{p(\cdot)}(G)$ и $\rho_{p(\cdot)}(|\nabla(u-u_k)|) \to 0$.

**Доказательство.** В силу полноты фактор-пространства $\dot{L}^1_{p(\cdot)}(G)$ градиенты функций, принадлежащих пространству Соболева $L^1_{p(\cdot)}(G)$ образуют замкнутое подпространство вектор-функций в пространстве Лебега $L_{p(\cdot)}(G)$, а из слабой сходимости в $L^1_{p(\cdot)}(G)$ функций $u_k$ следует слабая сходимость градиентов $\nabla u_k$ в $L_{p(\cdot)}(G)$. Остается воспользоваться леммой 1.6 и пунктом 2 предложения 1.2, согласно которому условия

$$\rho_{p(\cdot)}(|\nabla(u-u_k)|) \to 0 \quad \text{и} \quad \|\nabla(u-u_k)\|_{p(\cdot)} \to 0$$

эквивалентны. ■

## III. Эквивалентные области

При изучении изоморфизмов пространств Соболева

$$\varphi^* : L^1_{p(\cdot)}(D') \to L^1_{p(\cdot)}(D),$$

порождаемых при замене переменной отображениями $\varphi : D \to D'$ вполне может оказаться, что $\varphi(D) \neq D'$ [11]. При этом очевидно, что области $\varphi(D)$ и $D'$ должны быть близки с точки зрения “эквивалентности” определенных на них пространств Соболева.

**Определение.** В евклидовом пространстве $R^n$ рассмотрим две области $G$ и $G_1$, и пусть $G_1 \subset G$. Области $G$ и $G_1$ будем называть $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными, если оператор сужения $\theta\, u = u|_{G_1}$ является изоморфизмом векторных пространств $L^1_{p(\cdot)}(G)$ и $L^1_{p(\cdot)}(G_1)$.

Вполне очевидно, что оператор сужения $\theta$ является изоморфизмом фактор пространств

$$\theta : \dot{L}^1_{p(\cdot)}(G) \to \dot{L}^1_{p(\cdot)}(G_1)$$

и при этом $\|\theta\| \leq 1$. В силу изоморфности оператора, полноты пространств и теоремы Банаха обратный оператор $\theta^{-1}$ является ограниченным.

**Лемма 3.1.** Если $p(x) \in \mathcal{P}_{\ln}$, а области $G$ и $G_1$ являются $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными, то множество $E = G \setminus G_1$ имеет нулевую меру Лебега.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. $m_n(E) > 0$. Почти все точки множества $E$ являются точками плотности. Пусть точка $x_0$ является точкой плотности множества $E$, тогда

$$\lim_{r\to 0} \frac{m_n(B(x_0,r)\setminus E)}{m_n(B(x_0,r))} = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим семейство функций

$$u_r(x) = \begin{cases} r - |x-x_0|, & \text{если} \quad |x-x_0| \leq r; \\ 0 & \text{если} \quad |x-x_0| > r. \end{cases}$$

Модуль градиента функции $u_r$ равен единице при $0 < |x-x_0| < r$ и равен нулю во внешности шара $B(x_0,r)$.

Введем обозначения

$$p_{-,r} = \inf_{x \in B(x_0,r)} p(x), \quad p_{+,r} = \sup_{x \in B(x_0,r)} p(x).$$

Нас будут интересовать оценки для шаров, имеющих малый радиус, поэтому можно считать, что $r < 1, |B(x_0, r)| < 1$, и $p_{+,r} \leq 2p(x_0)$.

При $r \to 0$ выполняется оценка

$$r^{\frac{p_{-,r}}{p_{+,r}} - 1} \leq r^{\frac{C}{2p(x_0)\ln 2r}} \to e^{\frac{C}{2p(x_0)}} < \infty. \tag{4}$$

Учитывая ограниченность оператора $\theta^{-1}$ и оценку (2), получаем

$$|B(x_0, r)| = \int\limits_G |\nabla u_r|^{p(x)} dx = \rho_{p(\cdot),G}(|\nabla u_r|) \leq$$

$$\|u_r \mid L^1_{p(\cdot)}(G)\|^{p_{-,r}} \leq \left(\theta^{-1}\right)^{p_{-,r}} \|u_r \mid L^1_{p(\cdot)}(G_1)\|^{p_{-,r}} \leq$$

$$\left(\theta^{-1}\right)^{p_{-,r}} \left(\rho_{p(\cdot,G_1)}(|\nabla u_r|)\right)^{p_{-,r}/p_{+,r}} = \left(\theta^{-1}\right)^{p_{-,r}} \left(\int\limits_{G_1} |\nabla u_r| dx)\right)^{p_{-,r}/p_{+,r}} =$$

$$\left(\theta^{-1}\right)^{p_{-,r}} \left(|B(x_0, r) \setminus E|\right)^{p_{-,r}/p_{+,r}} \leq L \left(|B(x_0, r) \setminus E|\right)^{p_{-,r}/p_{+,r}}, \tag{5}$$

где $0 < \left(\theta^{-1}\right)^{p_-} \leq L \leq \left(\theta^{-1}\right)^{p^+} < \infty$.

Предположение об одновременном выполнении соотношений (3), (4) и (5) приводит к противоречию, поскольку при $r \to 0$ получится

$$0 < L^{-1} \leq \left(\frac{|B(x_0, r) \setminus E|}{|B(x_0, r)|}\right)^{p_{-,r}/p_{+,r}} \cdot (\omega_n r^n)^{\frac{p_{-,r}}{p_{+,r}} - 1} \to 0.$$

Таким образом множество $E$ не может иметь точек плотности и, следовательно имеет нулевую меру. ■

**Следствие 3.2.** Если $p(x) \in \mathcal{P}_{\ln}$, а области $G$ и $G_1$ являются $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными, то изоморфизм $\theta$ является изометрией.

Поскольку $|G \setminus G_1| = 0$, то $\|\theta u \mid L^1_{p(\cdot)}(G_1)\| = \|u \mid L^1_{p(\cdot)}(G)\|$.

**Лемма 3.3.** Если $|G| < \infty$, показатели $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_{\ln}, p(x) \leq q(x)$, а области $G$ и $G_1$ являются $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными, то $G$ и $G_1$ будут и $L^1_{q(\cdot)}$-эквивалентными.

**Доказательство.** Поскольку $|G \setminus G_1| = 0$, то соответствующий оператор $\theta$ является инъективным. Пусть функция $v \in L^1_{q(\cdot)}(G_1)$, так как мера области $G_1$ конечна, то функция $v \in L^1_{p(\cdot)}(G_1)$ при $p(x) \leq q(x)$. В силу $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентности областей, функция $u = \theta^{-1} v$ принадлежит пространству Соболева $L^1_{p(\cdot)}(G)$, поэтому имеет в области $G$ обобщенные производные. Значения функции $u$ почти всюду в $G$ совпадают со значениями функции $v$. Следовательно $u \in L^1_{q(\cdot)}(G)$, а оператор $\theta : L^1_{q(\cdot)}(G) \to L^1_{q(\cdot)}(G_1)$ является изоморфизмом. ■

Как и в случае постоянных показателей суммируемости, $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентность областей можно охарактеризовать в терминах емкости, связанной с пространством Соболева $L^1_{p(\cdot)}$.

## IV. Емкость

Емкость, связанная с пространствами Соболева, является более тонкой характеристикой по сравнению с мерой Лебега: множество, имеющее нулевую меру Лебега, может иметь положительную емкость, а множество нулевой емкости всегда имеет нулевую меру Лебега. Многие свойства, выполняющиеся для функций из пространств Лебега вне множества нулевой меры, для соболевских функций выполняются вне множества нулевой емкости.

Достаточно полное введение в теорию емкости, связанной с пространством Соболева $W^1_{p(\cdot)}(R^n)$ можно найти в работах [7, 12].

**Определение.** Говорят, что свойство выполняется квазивсюду, если оно выполняется всюду за исключением некоторого множества емкости нуль.

Функцию $u$ называют квазинепрерывной в области $G$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество $U$, что емкость множества $U$ меньше чем $\varepsilon$ и на множестве $G \setminus U$ функция $u$ непрерывна.

При $p(x) \in \mathcal{P}$ для всякой соболевской функции существует эквивалентная ей квазинепрерывная функция. Из всякой сходящейся по норме последовательности квазинепрерывных соболевских функций можно выделить подпоследовательность, сходящуюся квазивсюду к квазинепрерывной функции и при этом сходящуюся равномерно вне открытого множества сколь угодно малой емкости.

Нам будет удобнее использовать специальный вариант емкости, связанной с пространствами Соболева $L^1_{p(\cdot)}(G)$.

Фиксирум положительное число $s$ и рассмотрим замкнутые в области $G$, непересекающиеся множества $F_0$ и $F_s$. Тройку $K = (F_0, F_s, G)$ будем называть конденсатором. Класс квазинепрерывных допустимых для конденсатора $K$ функций определим условием

$M(K) = \{u \in L^1_{p(\cdot)}(G)\ ; u = 0$ квазивсюду на $F_0, u = s$ квазивсюду на $F_s\}$.

Определим $(s, p(\cdot))$-емкость конденсатора $K$ равенством

$$\mathrm{cap}_{s,p(\cdot)}(F_0, F_s, G) = \inf_{u \in M(K)} \rho_{p(\cdot)}(|\nabla u|).$$

При $p(x) \in \mathcal{P}_{\ln}$ для всякого конденсатора и каждого $s \in (0, \infty)$ существует единственная экстремальная функция $u_s \in M(K)$ такая, что

$$\rho_{p(\cdot)}(|\nabla u_s|) = \inf_{u \in M(K)} \rho_{p(\cdot)}(|\nabla u|) = \mathrm{cap}_{s,p(\cdot)}(F_0, F_s, G).$$

Функция $u_s$ квазинепрерывна, равна нулю квазивсюду на $F_0$ и равна $s$ квазивсюду на $F_s$. Как и в случае постоянного показателя суммируемости эти свойства следуют из замкнутости и выпуклости множества допустимых функций $M(K)$, равномерной выпуклости пространства $L^1_{p(\cdot)}(G)$ и предложения 1.7, практически дословно повторяя доказательства работ [3, 7]. Поскольку для произвольной функции $u \in L^1_{p(\cdot)}(G)$ и произвольной постоянной $C$ функции $\max(u, C)$ и $\min(u, C)$ принадлежат пространству $L^1_{p(\cdot)}(G)$, то для экстремальной функции выполняется неравенство $0 \le u_s \le s$.

**Замечание.** Обычно в определении емкости предполагается, что $s = 1$. В случае постоянного показателя суммируемости $p = const$ оператор умножения на постоянную является однородным и из $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \rho_{p(\cdot)}(g)$ следует $\rho_{p(\cdot)}(\alpha f) \leq \rho_{p(\cdot)}(\alpha g)$. При переменном $p(x)$ функционал $\rho_{p(\cdot)}(*)$ не является однородным и в общем случае при умножении на положительную постоянную может поменяться знак неравенства, т.е. $\rho_{p(\cdot)}(f) < \rho_{p(\cdot)}(g)$, но $\rho_{p(\cdot)}(\alpha f) > \rho_{p(\cdot)}(\alpha g)$.

Это означает, что при умножении экстремальной функции $u \in L^1_{p(\cdot)}(G)$ на постоянную может теряться свойство экстремальности.

Нам потребуется результат об аппроксимации функций из пространства Соболева $L^1_{p(\cdot)}(G)$ функциями специального вида.

Рассмотрим монотонную последовательность замкнутых относительно области $G$ множеств $V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_m$ и последовательность положительных чисел $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Предположим, что $\partial V_i \cap \partial V_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $s_k$-емкость всех конденсаторов $K_k = (\overline{G \setminus V_{k-1}}, V_k, G)$ конечна. Пусть функции $v_k$ являются экстремальными для $s_k$-емкости конденсаторов $K_k$.

**Определение.** Функцию $v$ будем называть кусочно-экстремальной, если она представима в виде

$$v = C_0 + \sum_{k=1}^{m} v_k,$$

где $u_k$ - экстремальные функции из описанной выше конструкции.

Кусочно-экстремальная функция однозначно определяется набором множеств $\{V_k\}$ и числами $s_k$.

**Лемма 4.1.** Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{\ln}$ и отличная от постоянной ограниченная функция $u \in C^\infty(G) \cap L^1_{p(\cdot)}(G)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует, такая кусочно-экстремальная функция $v_\varepsilon$, что

$$\rho_{p(\cdot)}(|\nabla(u - v_\varepsilon)|) < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Согласно теореме Сарда у функции $u \in C^\infty(G) \cap L^1_{p(\cdot)}(G)$ почти все значения $a \in (\inf\limits_{x\in G}, \sup\limits_{x\in G})$ являются регулярными, т.е. множество уровня $u^{-1}(a)$ является объединением конечного числа гладких многообразий.

Фиксируем набор $I$ регулярных значений $a_k$, удовлетворяющий условию $\inf\limits_{x\in G} = \alpha < a_0 < a_1 < \cdots < a_m < \sup\limits_{x\in G} = \beta$ и рассмотрим образующие монотонную последовательность замкнутые множества $V_k = u^{-1}\left([a_k, \infty)\right)$. Положим $s_k = a_k - a_{k-1}$. Всякий набор $I$ определяет кусочно-экстремальную функцию

$$v_I = a_0 + \sum_{k=1}^{m} v_k,$$

обладающую следующими свойствами:

1) $v_I \in L^1_{p(\cdot)}(G)$;

2) $\int\limits_G |\nabla v_k|^{p(x)} dx = \int\limits_{V_{k-1}\setminus V_k} |\nabla v_k|^{p(x)} dx \leq \int\limits_{V_{k-1}\setminus V_k} |\nabla u|^{p(x)} dx$;

3) $\rho_{p(\cdot)}(|\nabla v_I|) = \int\limits_G |\nabla v_I|^{p(x)} dx = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{V_{k-1}\setminus V_k} |\nabla v_k|^{p(x)} dx \leq \int\limits_G |\nabla u|^{p(x)} dx = \rho_{p(\cdot)}(|\nabla u|)$;

4) если $\delta = \max(a_0 - \alpha, s_1, s_2, \dots, s_m, \beta - s_m)$, то $|u - v_I| \le \delta$ почти всюду в области‘$G$.

Пусть последовательность $\delta_k \to 0$. Тогда существует последовательность кусочно-экстремальных функций $\{w_k\}$, удовлетворяющих свойствам 1)-4), и при этом $|u - w_k| \le \delta_k$ почти всюду в области $G$. Следовательно последовательность функций $\{w_k\}$ ограничена в пространстве $L^1_{p(\cdot)}(G)$ и сходится к функции $u$ почти всюду в $G$. Согласно лемме 2.4 существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\}$ слабо сходящаяся в $L^1_{p(\cdot)}(G)$ к функции $u$, при этом

$$\rho_{p(\cdot)}(|\nabla u|) \le \liminf_{m\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(|\nabla u_{k_m}|).$$

Учитывая свойство 3) получаем $\rho_{p(\cdot)}(|\nabla w_{k_m}|) \to \rho_{p(\cdot)}(|\nabla u|)$. Применяя лемму 2.5, окончательно получаем $\rho_{p(\cdot)}(|\nabla(u - w_{k_m})|) \to 0$. ■

## V. Устранимые множества

Замкнутое относительно области $G$ множество $E$ назовем $NC_{p(\cdot)}$-множеством, если для любого $s \in (0,\infty)$ и любой пары непересекающихся замкнутых множеств $F_0, F_s \subset G \setminus E$ выполняется равенство

$$\mathrm{cap}_{s,p(\cdot)}(F_0, F_s, G) = \mathrm{cap}_{s,p(\cdot)}(F_0, F_s, G \setminus E).$$

Наш интерес к $NC_{p(\cdot)}$-множествам можно объяснить следующим результатом.

**Теорема 5.1.** Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{\ln}$. Для $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентности областей $G$ и $G_1$ необходимо и достаточно, чтобы $E = G \setminus G_1$ было $NC_{p(\cdot)}$-множеством в $G$.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть области $G$ и $G_1$ являются $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными, а непересекающиеся замкнутые множества $F_0, F_s \subset G_1$. Неравенство

$$\mathrm{cap}_{s,p(\cdot)}(F_0, F_s, G \setminus E) \le \mathrm{cap}_{s,p(\cdot)}(F_0, F_s, G)$$

выполняется всегда.

Если функция $v$ является экстремальной для конденсатора $(F_0, F_s, G\setminus E)$, то ее продолжение $\theta^{-1}v$ будет допустимой функцией для конденсатора $(F_0, F_s, G)$, здесь $\theta$ - изоморфизм из определения $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентных областей. Согласно лемме 3.1 множество $E$ имеет нулевую меру, поэтому

$$\mathrm{cap}_{s,p(\cdot)}(F_0, F_s, G) \le \rho_{p(\cdot),G}(|\nabla(\theta^{-1}v)|) = \int\limits_G |\nabla(\theta^{-1}v)|^{p(x)}dx = \int\limits_{G\setminus E} |\nabla v|^{p(x)}dx =$$

$$\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla v|) = \mathrm{cap}_{s,p(\cdot)}(F_0, F_s, G \setminus E).$$

Поэтому

$$\mathrm{cap}_{s,p(\cdot)}(F_0, F_s, G) = \mathrm{cap}_{s,p(\cdot)}(F_0, F_s, G \setminus E),$$

т.е. $E$ является $NC_{p(\cdot)}$-множеством.

Достаточность. Для всякой функции $u \in L^1_{p(\cdot)}(G)$ ее сужение $u|_{G_1} \in L^1_{p(\cdot)}(G_1)$. Поэтому нужно показать, что всякую функцию $u \in L^1_{p(\cdot)}(G_1)$ можно единственным образом продолжить до функции $\tilde{u} \in L^1_{p(\cdot)}(G)$. Докажем вначале возможность продолжения, а затем докажем единственность.

Возможность продолжения постоянной функции очевидна. Рассмотрим стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\varepsilon_n$. Если $v$ – отличная от постоянной ограниченная гладкая функция из пространства $L^1_{p(\cdot)}(G_1)$, то по лемме 4.1 существует такая последовательность кусочно-экстремальных функций $v_i$, что

$$\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla(v - v_i)|) \leq \varepsilon_n.$$

При этом

$$v_i = \sum_{k=1}^{m_i} w_{i,k},$$

где $w_{i,k}$ – экстремальные функции для непересекающихся конденсаторов $K_{i,k}$ в области $G_1$.

Если $\tilde{w}_{i,k}$ – экстремальная функция для конденсатора $K_{i,k}$ в пространстве $L^1_{p(\cdot)}(G)$, то ее сужение $\tilde{w}_{i,k}|_{G_1}$ будет допустимой функцией для конденсатора $K_{i,k}$ в пространстве $L^1_{p(\cdot)}(G_1)$, поэтому

$$\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla \tilde{w}_{i,k}|) \geq \rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla w_{i,k}|).$$

С другой стороны $NC_{p(\cdot)}$-условия следует, что

$$\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla \tilde{w}_{i,k}|) \leq \rho_{p(\cdot),G}(|\nabla \tilde{w}_{i,k}|) = \rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla w_{i,k}|).$$

В силу единственности экстремальной функции $\tilde{w}_{i,k} = w_{i,k}$ почти всюду в $G_1$, т.е. функция $\tilde{w}_{i,k}$ является продолжением функции $w_{i,k}$ на множество $E$ с сохранением значения функционала $\rho_{p(\cdot)}(*)$, при этом

$$\rho_{p(\cdot),E}(|\nabla \tilde{w}_{i,k}|) = \int\limits_E |\nabla \tilde{w}_{i,k}|^{p(x)} dx = 0.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$\tilde{v}_i = \sum_{k=1}^{m_i} \tilde{w}_{i,k}.$$

Поскольку в сумме конечное число слагаемых, то $\tilde{v}_i \in L^1_{p(\cdot)}(G)$, при этом

$$\int\limits_E \left|\nabla\left(\sum_{k=1}^{m_i} \tilde{w}_{i,k}\right)\right|^{p(x)} dx \leq \int\limits_E \left(\sum_{k=1}^{m_i} |\nabla \tilde{w}_{i,k}|\right)^{p(x)} dx \leq$$

$$\int\limits_E m_i^{p(x)-1}\left(\sum_{k=1}^{m_i} |\nabla \tilde{w}_{i,k}|^{p(x)}\right) dx \leq m_i^{p^+-1}\left(\sum_{k=1}^{m_i} \int\limits_E |\nabla \tilde{w}_{i,k}|^{p(x)} dx\right) = 0.$$

По построению

$$\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla v_i|) = \sum_{k=1}^{m_i} \rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla w_{i,k}|) \leq \rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla v|).$$

Поэтому

$$\rho_{p(\cdot),G}(|\nabla \tilde{v}_i|) = \int\limits_{G_1} \left|\nabla\left(\sum_{k=1}^{m_i} w_{i,k}\right)\right|^{p(x)} dx + \int\limits_E \left|\nabla\left(\sum_{k=1}^{m_i} \tilde{w}_{i,k}\right)\right|^{p(x)} dx =$$

$$\sum_{k=1}^{m_i}\int_{G_1}|\nabla\tilde w_{i,k}|^{p(x)}dx=\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla v_i|)\le\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla v|).$$

Таким образом кусочно-экстремальная функция $v_i$ может быть продолжена в область $G$ с сохранением значения функционала $\rho_{p(\cdot)}(*)$. Поскольку ограниченность функционала влечет ограниченность нормы, то последовательность $\{\tilde v_i\}$ ограничена в пространстве $L^1_{p(\cdot)}(G)$, а значит из нее можно выделить подпоследовательность $\tilde v_{i_j}$, слабо сходящуюся в $L^1_{p(\cdot)}(G)$ к некоторой функции $h\in L^1_{p(\cdot)}(G)$.

На $G_1$ последовательность $\{v_i\}$ сходится к функции $v$ по норме, следовательно сужения $\tilde v_{i_j}|_{G_1}$ слабо сходятся на $G_1$ к функции $v+C$, т.е. $h=v+C$ почти всюду в области $G_1$, где $C$ – некоторая постоянная. Положим $\tilde v=h-C$. Тогда $\rho_{p(\cdot),G}(|\nabla\tilde v|)\ge\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla v|)$. С другой стороны, по предложению 1.5

$$\rho_{p(\cdot),G}(|\nabla\tilde v|)\le\liminf_{j\to\infty}\rho_{p(\cdot),G}(|\nabla\tilde v_{i_j}|)=\liminf_{j\to\infty}\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla v_{i_j}|)=\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla v|).$$

Следовательно

$$\rho_{p(\cdot),G}(|\nabla\tilde v|)=\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla v|).$$

Таким образом функция $\tilde v$ является продолжением функции $v$ с сохранением значения функционала $\rho_{p(\cdot)}(*)$.

Ограниченные гладкие функции из $C^\infty\cap L^1_{p(\cdot)}$ плотны в $L^1_{p(\cdot)}$. Учитывая эквивалентность условий $\rho_{p(\cdot)}(*)\to 0$ и $\|*\|_{p(\cdot)}\to 0$, для произвольной функции $u\in L^1_{p(\cdot)}(G_1)$ можно выбрать такую последовательность гладких фукций $\{u_k\}$, что

$$\rho_{p(\cdot)}(|\nabla(u-u_k)|)\to 0.$$

Каждая функция $u_k$ допускает продолжение до функции $\tilde u_k\in L^1_{p(\cdot)}(G)$ с сохранением значения функционала $\rho_{p(\cdot)}(*)$. Последовательность $\{\tilde u_k\}$ ограничена в пространстве $L^1_{p(\cdot)}(G)$, а значит из нее можно выделить подпосдедовательность $\{\tilde u_{k_j}\}$, слабо сходящуюся в $L^1_{p(\cdot)}(G)$ к некоторой функции $g\in L^1_{p(\cdot)}(G)$. Повторяя завершающую часть доказательства о продолжении гладкой функции, мы получим функцию $\tilde u\in L^1_{p(\cdot)}(G)$, являющуюся продолжением функции $u$, при этом

$$\rho_{p(\cdot),G}(|\nabla\tilde u|)=\rho_{p(\cdot),G_1}(|\nabla u|).$$

Для завершения доказательства осталось доказать, что построенное продолжение является единственным. Поскольку совпадающие почти всюду функции определяют один и тот же элемент пространства Соболева, то нам достаточно показать, что множество $E=G\setminus G_1$ имеет нулевую меру Лебега.

Пусть точка $x\in\partial E\cap G$. Рассмотрим целиком лежащее в области $G$ сферическое кольцо $K=B(x,b)\setminus\overline{B(x,a)},\ b>a>0$. Пусть $F_0=\overline{B(x,a)}, F_1=G\setminus B(x,b)$. Пересечение области $G_1$ с множеством $F_0$ имеет положительную меру при всех $a>0$, а при достаточно малых $b$ и $|G_1\cap F_1|>0$. Пусть функция $u$ является экстремальной для пары $(F_0,F_1)$ в пространстве Соболева $L^1_{p_-}(G)$. При постоянном показателе суммируемости и $s=1$ экстремальная функция сферического кольца находится в явном виде [3, 10]. Это позволяет установить нужные нам свойства функции $u$ :

1) $0<\alpha\le|\nabla u|\le\beta<\infty$ в кольце $K$;
2) $u\in L^1_{p(\cdot)}(G)$ при $p(x)\in\mathcal{P}$.

Согласно пункту 2), сужение $u|_{G_1} \in L^1_{p(\cdot)}(G_1)$ и, по ранее доказанному, может быть продолжено до функции $v \in L^1_{p(\cdot)}(G)$ таким образом, что

$$\int\limits_E |\nabla v|^{p(x)} dx = 0.$$

Если $m_n(E) > 0$, то $|\nabla v| = 0$ почти всюду на $E$. Тогда $|\nabla v| = 0$ почти всюду на $F_0 \cup F_1$, а следовательно $v = 0$ почти всюду на $F_0$ и $v = 1$ почти всюду на $F_1$, при этом

$$\int\limits_G |\nabla v|^{p_-} dx = \int\limits_G |\nabla u|^{p_-} dx.$$

В силу единственности экстремальной функции $u = v$, поскольку $|\nabla u| > 0$ в кольце $K$, то $m_n(E \cap K) = 0$. Значение $a$ мы можем выбирать сколь угодно малым, поэтому $m_n(E \cap B(x,b)) = 0$. Таким образом у каждой граничной точки множества $E$ существует окрестность, пересечение которой с множеством $E$ имеет нулевую меру. Такое множество не может иметь внутренних точек, поэтому $E \subset \partial E$, и в силу счетной аддитивности меры $m_n(E) = 0$. ■

**Лемма 5.2.** Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{\ln}$. Если множество $E$ замкнуто и мера Хаусдорфа $H^{n-1}(E) = 0$, то $E$ является $NC_{p(\cdot)}$-множеством.

**Доказательство.** Пусть функция $u \in L^1_{p(\cdot)}(G \setminus E)$, тогда она абсолютно непрерывна почти всех пересечениях области $G \setminus E$ с прямыми параллельными координатным осям. Поскольку $H^{n-1}(E) = 0$, то функция $u$ абсолютно непрерывна почти всех пересечениях области $G$ с прямыми параллельными координатным осям, следовательно продолжение $\tilde{u}$ имеет в области $G$ обобщенные производные, а области $G$ и $G \setminus E$ являются $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными. По теореме 5.1 $E$ является $NC_{p(\cdot)}$-множеством. ■

**Замечание.** Утверждение леммы 5.2 показывает, что класс $NC_{p(\cdot)}$-множеств шире чем рассматривавшийся в [7] класс исключительных множеств, для принадлежности которому необходимо равенство нулю соответствующей емкости. Множество может иметь положительную емкость и нулевую $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа, при этом, если $p(\cdot)$-емкость множества $E$ равна нулю, то $H^\alpha(E) = 0$ при всех $\alpha > n - p_-$ [7].

**Лемма 5.3.** Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{\ln}$. Если $E$ является $NC_{p(\cdot)}$-множеством в области $G$, то для любого шара $B \subset G$ множество $B \setminus E$ связно.

**Доказательство.** Предположим противное, что существует шар $B$, который множество $E$ разбивает на два непустых открытых множества $U_0$ и $U_1$ $(B \setminus E = U_0 \cup U_1)$. Пусть точка $x \in (\partial U_0 \cap \partial U_1) \cap B$ и замкнутый шар $\overline{B(x,r)} \subset B$. Пересечения шара $B(x,r)$ с множествами $U_0$ и $U_1$ имеют положительную меру. Рассмотрим функцию $v$, равную нулю на $U_0$ и равную единице на $U_1$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и равна единице на шаре $B(x,r)$. Функция $u$, равная $v\varphi$ на множестве $B \setminus E$ и равная нулю вне шара $B$, принадлежит пространству $L^1_{p(\cdot)}(G \setminus E)$ и согласно теореме 5.1 может быть продолжена до функции $\tilde{u} \in L^1_{p(\cdot)}(G)$. Сужение $\tilde{u}|B(x,r) \in L^1_{p(\cdot)}(B(x,r))$. Поскольку мера множества $E$ равна нулю, то $|\nabla \tilde{u}| = 0$ почти всюду в шаре $B(x,r)$ и $\tilde{u} = const$ почти всюду в

$B(x,r)$. Это противоречит тому, что функция $\tilde{u}$ почти всюду в шаре $B(x,r)$ совпадает с функцией $v$, принимающей два различных значения на множествах положительной меры $U_0 \cap B(x,r)$ и $U_1 \cap B(x,r)$. ■

**Замечание.** Если $E$ является $NC_{p(\cdot)}$-множеством в области $G$, то согласно лемме 5.3 для любого открытого шара $B \subset G$ множество $B \setminus E$ является областью. Это позволяет говорить о $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентности областей $B$ и $B \setminus E$ и использовать это свойство.

Доказательства следующих свойств $NC_{p(\cdot)}$-множеств практически дословно повторяют доказательства аналогичных утверждений для случая постоянного показателя суммируемости в разделе 3.2 главы 4 книги [3]. Нужно лишь заменить постоянный показатель $p$ на $p(x)$ и вместо ссылки на теорему 3.1 книги [3] использовать ссылку на доказанную в этом разделе теорему 5.1. Всюду далее мы будем предполагать, что $p(x) \in \mathcal{P}_{\ln}$.

**Свойства $NC_{p(\cdot)}$-множеств.**

1. Принцип локализации. Для того, чтобы множество $E$ было $NC_{p(\cdot)}$-множеством в области $G$, необходимо и достаточно, чтобы для любого открытого шара $B \subset G$ множество $E \cap B$ было $NC_{p(\cdot)}$-множеством в шаре $B$.
2. Замкнутое подмножество $NC_{p(\cdot)}$-множества является $NC_{p(\cdot)}$-множеством.
3. Пересечение любого числа $NC_{p(\cdot)}$-множеств является $NC_{p(\cdot)}$-множеством.
4. Конечное объединение $NC_{p(\cdot)}$-множеств в области $G$ является $NC_{p(\cdot)}$-множеством.
5. Если $G_1$ - подобласть области $G$ и $E$ является $NC_{p(\cdot)}$-множеством в области $G$, то множество $E_1 = E \cap G_1$ является $NC_{p(\cdot)}$-множеством в области $G_1$.

**Лемма 5.4.** Если $|G| < \infty$, $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_{\ln}$, $p(x) \le q(x)$ и $E$ является $NC_{p(\cdot)}$-множеством в области $G$, то $E$ является $NC_{q(\cdot)}$-множеством в области $G$.

Доказательство является следствием теоремы 5.1 и леммы 3.3.

## Комментарии

1. В определении $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентных областей $G$ и $G_1$ для упрощения формальной части доказательств предполагалось, что $G_1 \subset G$, но это условие не является принципиальным. Легко определить эквивалентность областей и в более общей ситуации.

**Определение.** Пусть области $G_1, G_2 \subset R^n$. Будем называть области $G_1$ и $G_2$ $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными, если операторы сужения $\theta_i\, u = u|_{G_1 \cap G_2}$ являются изоморфизмами векторных пространств $L^1_{p(\cdot)}(G_i)$ и $L^1_{p(\cdot)}(G_1 \cap G_2)$.

Для каждой из пар областей $(G_1, G_1 \cap G_2)$ и $(G_2, G_1 \cap G_2)$ будут выполняться все доказанные ранее результаты, а оператор $\theta_2^{-1} \circ \theta_1$ будет изометрическим изоморфизмом пространств $L^1_{p(\cdot)}(G_1)$ и $L^1_{p(\cdot)}(G_2)$.

2. В определении $NC_{p(\cdot)}$-множеств использовался существенно больший класс конденсаторов по сравнению со случаем постоянного показателя суммируемости и предполагалось выполнение равенства для $(s, p(\cdot))$-емкости при различных значениях параметра $s$.

Это связано с использованием упрощенного варианта теоремы об аппроксимации соболевских функций кусочно-экстремальными. Сужение класса конденсаторов до множества всевозможных пар связных компактов, имеющих гладкие границы, представляется технической задачей, требующей отдельного изучения. Вопрос о возможности ограничиться рассмотрением емкостного условия только при $s = 1$, представляется менее очевидным как раз в плане доказательства теоремы об аппроксимации.

## References


[1] S. K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dshtein, *Criteria for the removability of sets in spaces of $L_p^1$ quasiconformal and quasi-isometric mappings*, Siberian Math. J., **18**:1 (1977), 35–50. MR0450553

[2] S.K. Vodop'yanov, V.M. Gol'dshtein, Yu.G. Reshetnyak, *On geometric properties of functions with generalized first derivatives*, Russian Mathematical Surveys, **34**:1 (1979), 19–74. MR0525650

[3] V.M. Gol'dshtein, Yu.G. Reshetnyak, *Quasiconformal mappings and Sobolev spaces*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1990. MR1136035

[4] O. Kovacik, J. Rakosnik, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$* , Czechoslovak Math. J., **41**:4 (1991), 592–618. MR1134951

[5] D.E. Edmunds, J. Rakosnik, *Sobolev embeddings with variable exponent*, Studia Math., **143**:3 (2000), 267–293. MR1815935

[6] P. Harjulehto, P. Hästö, M. Pere, *Variable Exponent Lebesgue Spaces on Metric Spaces: The Hardy-Littlewood Maximal Operator*, Real Analysis Exchange, **30**:1 (2004/2005), 87–104. MR2126796

[7] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ruzicka, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer-Verlag, 2011. MR2790542

[8] A.S. Romanov, *Sobolev-type functions with variable integrability exponent on metric measure spaces*, Siberian Math. J., **55**:1 (2014), 142—-155. MR3220596

[9] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, *Funkcional'nyj analiz*, M.: Nauka, 1977. MR0511615

[10] V.G. Maz'ya, *Prostranstva S.L. Soboleva*, Leningrad: Izd.-vo Leningr. un-ta, 1985. MR0807364

[11] A.S. Romanov, *The composition operators in Sobolev spaces with variable exponent of summability*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 794—806. MR3693753

[12] P. Harjulehto, P. Hästö, M. Koskenoja, S. Varonen, *Sobolev capacity on the space $W^{1,p(\cdot)}(R^n)$*, Journal of Func. Spaces and Appl., **1**:1 (2003), 17–33. MR2011498



Romanov Alexandr Sergeevich,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
*E-mail address*: asrom@math.nsc.ru