S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1040–1047 (2018) УДК 519.172.2 519.174

DOI 10.17377/semi.2018.15.087 MSC 05C10 05C15 05C70

ПУТЕВАЯ РАЗБИВАЕМОСТЬ ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ ОБХВАТА 4 БЕЗ СМЕЖНЫХ КОРОТКИХ ЦИКЛОВ

А.Н. ГЛЕБОВ, Д.Ж. ЗАМБАЛАЕВА

Abstract. A graph G is (a, b)-partitionable for positive intergers a, b if its vertex set can be partitioned into subsets V_1, V_2 such that the induced subgraph $G[V_1]$ contains no path on $a+1$ vertices and the induced subgraph $G[V_2]$ contains no path on $b+1$ vertices. A graph G is τ-partitionable if it is (a, b)-partitionable for every pair a, b such that $a+b$ is the number of vertices in the longest path of G. In 1981, Lovász and Mihók posed the following Path Partition Conjecture: every graph is τ-partitionable. In 2007, we proved the conjecture for planar graphs of girth at least 5. The aim of this paper is to improve this result by showing that every triangle-free planar graph, where cycles of length 4 are not adjacent to cycles of length 4 and 5, is τ-partitionable.

Keywords: graph, planar graph, girth, triangle-free graph, path partition, τ-partitionable graph, path partition conjecture.

1. Введение

В работе рассматривается проблема разбиения множества вершин графа на две части так, чтобы длина любой простой цепи в каждой части разбиения была ограничена сверху. Через $G = (V, E)$ обозначается конечный неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Через $d(v)$ обозначается *степень вершины* $v \in V$, т. е. число инцидентных v ребер; вершина степени d называется *d-вершиной*. Через P_n и C_n, соответственно, обозначаются простая цепь и простой цикл с n вершинами. *Обхватом* $g(G)$ и *окружением* $c(G)$ графа G называются наименьшая и наибольшая длина простого

Glebov, A.N., Zambalaeva, D.Z., Path partitioning planar graphs of girth 4 without adjacent short cycles.

Работа поддержана РНФ (проект N 16-11-10054).

Поступила 30 ноября 2017 г., опубликована 21 сентября 2018 г.

цикла в G, соответственно. Граф G называется *панциклическим* (*слабо панциклическим*), если G содержит цикл C_n для каждого целого $n \in \{3, \dots, |V|\}$ (соответственно, для каждого целого $n \in \{g(G), \dots, c(G)\}$).

Граф G называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости без пересечений ребер. *Плоским графом* (V, E, F) называется любая укладка планарного графа $G = (V, E)$ на плоскости с указанным свойством; через F обозначается множество всех *граней* плоского графа. *Рангом* $r(f)$ грани $f \in F$ в связном плоском графе называется число ребер в границе f, где мосты засчитываются дважды. Грань ранга r называется *r-гранью*, а грань ранга 3 — *треугольником*. Граф G называется *максимальным планарным*, если G планарен, но при добавлении к нему любого ребра получается непланарный граф. Известно, что граф является максимальным планарным тогда и только тогда, когда любая его плоская укладка является *триангуляцией*, т. е. все ее грани — треугольники.

Через $\tau(G)$ обозначается число вершин в наибольшей простой цепи графа G. Для каждого подмножества вершин $X \subseteq V$ через $G[X]$ обозначается подграф в G, *порожденный* множеством вершин X. Пусть $a \geq 1$, $b \geq 1$ — целые числа. *Путевым* (a, b)*-разбиением* графа G называется такое разбиение множества его вершин $V = V_1 \cup V_2$, что $\tau(G[V_1]) \leq a$ и $\tau(G[V_2]) \leq b$, т. е. подграф $G[V_1]$ не содержит цепей P_{a+1}, а подграф $G[V_2]$ не содержит P_{b+1}. Заметим, что $(1, 1)$-разбиваемость графа равносильна его двудольности, а $(2, 2)$-разбиваемость означает, что каждая компонента связности в подграфах $G[V_1]$ и $G[V_2]$ изоморфна P_1 или P_2.

В работах [10, 2, 9, 14] была установлена путевая (a, b)-разбиваемость планарных графов с достаточно большим обхватом при фиксированных значениях параметров a и b. В частности, было доказано, что планарные графы с обхватом 5, 6, 7 и 11 являются $(7, 7)$-разбиваемыми [9], $(5, 5)$-разбиваемыми [10], $(2, 2)$-разбиваемыми [2] и $(1, 2)$-разбиваемыми [14], соответственно. С другой стороны, в работах [16] и [1] при каждом фиксированном целом $c > 1$ были построены планарные графы с обхватом 3 и 4, соответственно, не являющиеся (c, c)-разбиваемыми. Аналогичным образом, для большинства содержательных наследственных классов графов не существует таких констант a и b, что все графы из данного класса являются (a, b)-разбиваемыми.

В 1981 году Ловас и Михок предложили следующее определение путевой разбиваемости, при котором параметры a и b не являляются констатнтами. Граф G называется *τ-разбиваемым*, если он (a, b)-разбиваем для любых натуральных a, b таких, что $a + b = \tau(G)$. Ловасом и Михоком (см. [12, 18]) была высказана следующая

Гипотеза 1. *(о путевой разбиваемости) Любой граф является τ-разбиваемым.*

Гипотеза 1 за последние годы приобрела широкую известность, однако до сих пор остается нерешенной. Хороший обзор результатов, посвященных этой гипотезе, приведен в [8]. Там же отмечено, что она представляет собой интригующий пример математической гипотезы, которая очень проста в формулировке, но крайне трудна для доказательства.

Очевидно, что гипотеза 1 верна для графов, содержащих гамильтонову цепь или цикл (в этом случае имеем $\tau(G) = |V|$). В [3, 4, 5, 6, 7] и ряде других работ справедливость гипотезы 1 была подтверждена для некоторых специальных классов графов. В частности, в [5, 7] было установлено, что графы без клешней (т. е. без порожденных подграфов $K_{1,3}$) и связные слабо панциклические графы являются τ-разбиваемыми. Там же было доказано, что любой минимальный контрпример к гипотезе 1 (если он существует) является двусвязным и имеет минимальную степень не меньше 3. В [15] установлено, что любой граф является $(a, \tau - a)$-разбиваемым при $a \leq 8$. Татт [17] доказал, что любой четырехсвязный планарный граф является гамильтоновым, а значит, τ-разбиваемым. Хакими и Шмейхелем [13] было показано, что любой максимальный планарный граф G содержит циклы всех длин от 3 до $c(G)$, а значит, является слабо панциклическим. Аналогичный результат верен для плоских почти триангуляций, то есть связных плоских графов, содержащих ровно одну нетреугольную грань. Отсюда следует, что для почти триангуляций гипотеза 1 верна.

В [11] была доказана τ-разбиваемость планарных графов с обхватом не менее 5. Целью настоящей статьи являются следующее усиление этого результата:

Теорема 1. *Любой планарный граф без циклов длины 3, в котором циклы длины 4 не имеют общих ребер с циклами длины 4 и 5, является τ-разбиваемым.*

Чтобы доказать теорему 1, нам будет удобно рассматривать (a, b)-разбиение $V = V_1 \cup V_2$ графа $G(V, E)$ как раскраску его вершин в два цвета, называемую (a, b)-*раскраской* и задаваемую отображением $\varphi : V \to \{\alpha, \beta\}$, где $\varphi(v) = \alpha$, если $v \in V_1$, и $\varphi(v) = \beta$, если $v \in V_2$. Далее под раскраской всюду понимается (a, b)-раскраска. Для каждого цвета $x \in \{\alpha, \beta\}$ через $\neg x$ обозначим цвет из множества $\{\alpha, \beta\}$, отличный от x. Будем называть x-*цепью* в G любую простую цепь, все вершины которой окрашены цветом x. *Высотой* $h(v)$ вершины v цвета x назовем наибольшее число вершин в x-цепи, исходящей из v. Назовем α-цепь, состоящую из a вершин, α-*максимальной*. Вершину v цвета α назовем α-*максимальной*, если $h(v) = a$, то есть v является концом α-максимальной цепи. Аналогичным образом определим β-максимальные цепи и вершины в G.

2. Свойства минимального контрпримера к теореме 1

Предположим, что граф $G = (V, E)$ является контрпримером к теореме 1 с минимальным числом вершин. Тогда для некоторых целых a, b таких, что $a + b = \tau(G)$, не существует (a, b)-раскраски вершин G. Из результатов работ [5, 7] следует, что G вершинно двусвязен и его минимальная степень не меньше 3, а из результатов [15], — что $a \geq 9$, $b \geq 9$. Отсюда получаем $|V| \geq 19$.

Рассмотрим произвольную плоскую укладку (V, E, F) графа G. Из двусвязности G и условия $g(G) \geq 4$ следует, что любая грань в G ограничена простым циклом и имеет ранг не меньше 4. Из условия $g(G) \geq 4$ и отсутствия общих ребер у циклов длины 4 с циклами длины 4 и 5 следует, что любой цикл длины не более 7 не имеет хорд. Грань ранга $r \in \{4, 5\}$ назовем *слабой*, если она инцидентна не менее чем $r - 1$ вершинам степени 3.

При доказательстве теоремы 1 мы часто будем использовать следующий прием. Удалим из графа G некоторые вершины. В силу минимальности G, для полученного графа G_1 существует (a, b)-раскраска. Если какая-то неокрашенная вершина v не смежна с окрашенными вершинами или все ее окрашенные соседи имеют один и тот же цвет $x \in \{\alpha, \beta\}$ (в частности, если v смежна только с одной окрашенной вершиной), то докрашивание вершины v в цвет $\neg x$ (или в произвольный цвет, если v не смежна с окрашенными вершинами) будем называть *стандартной докраской* или *докраской по закону противоположности.*

Также для нас будет полезным следующее простое соображение. Пусть в графе G имеется цепь P из k неокрашенных вершин с концами s и t. Тогда если вершины s и t смежны с вершинами s' и t', окрашенными в α и β, соответственно, то $h(s')+h(t') \leq a+b-k$. В частности, если s' является α-максимальной вершиной, то $h(t') \leq b-k$. Действительно, в противном случае объединение цепи P с α-цепью, исходящей из s', и β-цепью, исходящей из t', порождало бы простую цепь в G, содержащую больше чем $a+b=\tau(G)$ вершин.

Докажем, что граф G обладает следующими свойствами.

(**G1**) *Любая слабая грань инцидентна вершине степени не менее 5.*

Доказательство. Пусть $f=(v_0,v_1,\ldots,v_{r-1}) \in F$ — слабая r-грань в G, где $r \in \{4,5\}$ и $d(v_i)=3$ при $i=1,2,\ldots,r-1$. Предположим, что $3 \leq d(v_0) \leq 4$. Для каждого $i=1,2,\ldots,r-1$ через u_i обозначим единственную смежную с v_i вершину, не инцидентную грани f.

Удалим из графа G вершины $v_1,v_2,\ldots,v_{r-1}$. В силу минимальности G, для полученного графа G_1 существует (a,b)-раскраска φ. Без ограничения общности, будем считать, что $\varphi(v_0)=\alpha$. Докрасим вершины $v_2,\ldots,v_{r-2}$ по закону противоположности. В силу неравенств $r-3 \leq 2 < 9 \leq \min\{a,b\}$, в результате получим (a,b)-раскраску графа $G-\{v_1,v_{r-1}\}$.

Докрасим вершины v_1 и v_{r-1}. В силу симметрии, достаточно описать процедуру окрашивания одной из этих верщщин, скажем v_1, считая при этом, что вершина v_{r-1} может быть как окрашенной, так и неокрашенной.

Рассмотрим возможные комбинации цветов вершин u_1 и v_2.

Случай 1: $\varphi(u_1)=\alpha$. Полагаем $\varphi(v_1)=\beta$. Если при этом возникает β-цепь Q, содержащая $b+1$ вершин, то, ввиду стандартности раскраски вершин $v_2,\ldots,v_{r-2}$ и неравенства $r-1<b+1$, получаем $Q=v_1v_2\ldots v_{r-1}u_{r-1}\ldots$. Из существования цепи Q следует, что вершина v_0 не является α-максимальной. Перекрашивая вершину v_{r-1} в цвет α, получаем (a,b)-раскраску графа G.

Случай 2: $\varphi(u_1)=\beta$; $\varphi(v_2)=\alpha$. Если в момент окрашивания v_1 вершина u_1 не является β-максимальной, то полагаем $\varphi(v_1)=\beta$. Пусть u_1 — β-максимальная вершина. Если хотя бы одна β-максимальная цепь, исходящая из u_1, не содержит вершин грани f, то из существования в G цепи $v_1v_2\ldots v_{r-1}$ следует, что в графе G_1 выполняется неравенство $h(v_0) \leq a-r+1$. Положим $\varphi(v_1)=\alpha$. Из процедуры раскраски в случае 1 следует, что хотя бы одна из вершин v_{r-1} или u_{r-1} не окрашена в цвет α. Поэтому при окрашивании v_1 в цвет α любая образовавшаяся α-цепь состоит из вершин грани f и некоторой исходящей из v_0 цепи в G_1. Так как по доказанному в G_1 выполняется неравенство $h(v_0) \leq a-r+1$, то любая образовавшаяся α-цепь состоит не более чем из $(a-r+1)+(r-1)=a$ вершин.

Пусть в момент окрашивания v_1 каждая исходящая из u_1 максимальная β-цепь содержит вершину грани f. Из стандартности раскраски вершин $v_2,\ldots,v_{r-2}$ следует, что каждая такая цепь Q содержит ребро $u_{r-1}v_{r-1}$. При этом ввиду существования цепи v_1Q вершина v_0 не является α-максимальной. Если $\varphi(v_{r-2})=\beta$, то перекрашивая v_{r-1} в цвет α и полагая $\varphi(v_1)=\beta$, получаем (a,b)-раскраску графа G. Пусть $\varphi(v_{r-2})=\alpha$. Тогда каждая исходящая из u_1 максимальная β-цепь оканчивается в вершине v_{r-1} и не содержит других вершин грани f. Из существовния этой цепи а также цепи $v_1v_2\ldots v_{r-2}$ следует, что

$h(v_0) \leq a - r + 2$. Окрашивая вершину v_1 в цвет α, получаем (a, b)-раскраску графа G.

Случай 3: $\varphi(u_1) = \varphi(v_2) = \beta$. Если в момент окрашивания v_1 вершина v_0 не является α-максимальной, то полагаем $\varphi(v_1) = \alpha$. Пусть v_0 — α-максимальная. Как отмечено выше, вершины v_{r-1} и u_{r-1} не могут быть одновременно окрашены цветом α. Поэтому любая исходящая из v_0 максимальная α-цепь содержится в графе G_1, а значит, вершина v_0 является α-максимальной в G_1. Отсюда и из существования в G цепи $v_1 v_2 \ldots v_{r-1}$ следует, что в графе G_1 выполняется неравенство $h(u_1) \leq b - r + 1$. Поэтому если при окрашивании v_1 в β образуется β-цепь из $b+1$ вершин, то все вершины $v_2, \ldots, v_{r-1}, u_{r-1}$ окрашены в цвет β. В этом случае все вершины $u_2, \ldots, u_{r-2}$ окрашены в α. Если в графе G_1 вершина u_2 не является α-максимальной, то она не α-максимальна и в графе $G - v_1$, так как все вершины $v_2, \ldots, v_{r-1}$ окрашены в цвет β. В этом случае, перекрашивая v_2 в цвет α и полагая $\varphi(v_1) = \beta$, получаем (a, b)-раскраску графа G.

Пусть в графе G_1 вершина u_2 является α-максимальной. Так как в G_1 вершина v_0 также α-максимальна и имеет степень не более 2, то v_0 смежна не более чем с одной вершиной w цвета β. Докажем, что вершина w не может быть β-максимальной в G_1. Допустим, что в графе G_1 вершина w является концом β-максимальной цепи P. Если исходящая из u_2 в G_1 α-максимальная цепь Q не содержит вершину v_0, то в G имеется цепь $P v_0 v_1 v_2 Q$, состоящая из $a + b + 3$ вершин. Если же цепь Q содержит вершину v_0, то v_0 является концом Q, а значит, в G имеется цепь $P Q v_2 v_1$ из $a + b + 2$ вершин.

Перекрасим вершину v_0 в цвет β и положим $\varphi(v_1) = \varphi(v_{r-1}) = \alpha$. Заметим, что при этом в графе G не образуется β-цепь из $b + 1$-вершин, так как в графе G_1 вершина w не является β-максимальной, а в графе G все вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}$ окрашены по закону противоположности по отношению к вершинам из G_1. Следовательно, полученная раскраска φ является (a, b)-раскраской графа G. Свойство (G1) доказано.

(**G2**) *Любая вершина v степени 5 инцидентна не более чем двум слабым граням, и если таких граней две, то они имеют ранг 5 и являются соседними в окружении v.*

Доказательство. Пусть вершина $v \in V$ степени 5 инцидентна слабым граням f_1, f_2. Предположим, что грани f_1 и f_2 не являются соседними в окружении v. Удалим все вершины граней f_1 и f_2 из G. Для полученного графа G_1 существует (a, b)-раскраска φ. Поскольку каждая удаленная вершина смежна не более чем с одной вершиной графа G_1, то раскраску φ можно продолжить стандартным образом на удаленные вершины. Так как число удаленных вершин не превосходит 9, то в результате поучим (a, b)-раскраску графа G. Следовательно, грани f_1 и f_2 являются соседними в окружении вершины v. Из условий на смежность 4-циклов в G заключаем, что обе грани имеют ранг 5.

3. Применение формулы Эйлера

Запишем формулу Эйлера для графа $G(V, E, F)$ в виде

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F} (r(f) - 4) = -8.$$

Определим *заряды* вершин и граней графа G, полагая $\mu(v) = d(v) - 4$ при $v \in V$ и $\mu(f) = r(f) - 4$ при $f \in F$. Ввиду условия $g(G) \geq 4$ заряд любой грани неотрицателен. Перераспределим заряды в графе G, не изменяя их суммы, по следующим правилам:

R1. Любая грань передает каждой инцидентной 3-вершине заряд $\frac{1}{3}$.

R2. Любая вершина степени не менее 5 передает каждой инцидентной слабой 5-грани заряд $\frac{1}{3}$ и каждой инцидентной слабой 4-грани заряд $\frac{2}{3}$.

R3. Пусть грань f_1 ранга не менее 6 смежна по ребру xy с 4-гранью f_2, где $d(x) \geq 4$. Если $d(y) = 3$, то f_1 передает грани f_2 заряд $\frac{1}{6}$, иначе — заряд $\frac{1}{3}$.

Обозначим через $\mu_1(x)$ заряд элемента $x \in V \cup F$ после применения правил R1–R3. Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно убедиться в справедливости следующего факта, который противоречит отрицательности суммы всех зарядов в G.

(**G3**) *Для любого элемента $x \in V \cup F$ выполняется неравенство $\mu_1(x) \geq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим вершину $v \in V$ степени d. По доказанному выше имеем $d \geq 3$. Если $d = 3$, то в результате применения правила R1 получаем $\mu_1(v) = \mu(v) + 3 \cdot \frac{1}{3} = -1 + 1 = 0$. Вершины степени 4 не участвуют в перераспределении зарядов, поэтому их конечный заряд равен 0. Если $d = 5$, то в силу свойства (G2) после применения правила R2 имеем $\mu_1(v) \geq \mu(v) - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} > 0$. Пусть $d \geq 6$. Обозначим через k число слабых 4-граней, инцидентных v. Заметим, что если f — слабая 4-грань в окружении v, то следующая за ней по часовой стрелке инцидентная грань по условию теоремы имеют ранг не менее 6 и, следовательно, не получает заряд от v. Ясно, что число таких граней (инцидентных v и смежных со слабыми 4-гранями) не меньше k. Таким образом, применение правила R2 дает

$$\mu_1(v) \geq \mu(v) - k \cdot \frac{2}{3} - (d - 2k) \cdot \frac{1}{3} = d - 4 - \frac{d}{3} = \frac{2}{3} \cdot (d - 6) \geq 0.$$

Рассмотрим грань $f \in F$ ранга r. По условию теоремы имеем $r \geq 4$. Пусть $r = 4$, тогда $\mu(f) = 0$. Допустим, что $f = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ — слабая 4-грань, т. е. $d(v_i) = 3$, $i = 1, 2, 3$. Тогда в силу свойства (G1) степень вершины v_0 не меньше 5. Значит, от v_0 грань f получает заряд $\frac{2}{3}$ по правилу R2. Кроме того, по правилу R3 грань f получает по $\frac{1}{6}$ от граней, смежных с ней по ребрам v_0v_1 и v_0v_3. Таким образом, $\mu_1(f) = \mu(f) - 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0$. Пусть f — неслабая 4-грань, т. е. f инцидентна не более чем двум 3-вершинам. Если грань f инцидентна не более чем одной 3-вершине, то согласно правилам R1 и R3 имеем $\mu(f) \geq 0 - \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} > 0$. Пусть f инцидентна двум 3-вершинам. Если эти вершины не смежны, то f получает от каждой смежной грани заряд $\frac{1}{6}$ по правилу R3. Следовательно, $\mu_1(f) = 0 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 0$. Пусть грань f инцидентна двум смежным 3-вершинам и двум смежным вершинам v_1, v_2 степени больше 3. Тогда по правилу R3 грань f получает заряд $\frac{1}{3}$ от грани, смежной по ребру v_1v_2, и заряд $2 \cdot \frac{1}{6}$ от двух других граней. В результате получаем $\mu_1(f) = 0 - 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0$.

Пусть $r = 5$, $\mu(f) = 1$. Если f — неслабая грань, то согласно R1 имеем $\mu_1(f) \geq 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$. В противном случае f инцидентна вершине степени не менее 5 по свойству (G1). Следовательно, f отдает заряд $4 \cdot \frac{1}{3}$ по R1 и получает $\frac{1}{3}$ по R2, откуда $\mu_1(f) = 0$. Пусть $r \geq 6$. Заметим, что передача заряда от грани $f = (v_1, \ldots, v_r)$ смежным граням по правилу R3 эквивалентна передаче каждой вершине v_i степени не менее 4 заряда $\frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{6}$ и последующему равномерному распределению этого заряда между смежными с f гранями, инцидентными вершине v_i. Таким образом, из правил R1 и R3 следует, что $\mu_1(f) \geq \mu(f) - r \cdot \frac{1}{3} = r - 4 - r \cdot \frac{1}{3} = \frac{2(r-6)}{3} \geq 0$. Свойство (G3) и теорема 1 доказаны.

Авторы признательны рецензенту за внимательное чтение статьи и сделанные ценные замечания.

References

[1] M. Axenovich, T. Ueckerdt, P. Weiner, *Splitting Planar Graphs of Girth 6 into Two Linear Forests with Short Paths*, Journal of Graph Theory, **85**:3 (2017), 601–618. MR3652192

[2] O.V. Borodin, A. Kostochka, M. Yancey, *On 1-improper 2-coloring of sparse graphs*, Discrete Mathematics, **313**:22 (2013), 2638–2649. MR3095439

[3] I. Broere, M. Dorfling, J.E. Dunbar, M. Frick, *A path (ological) partition problem*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, **18**:1 (1998), 113–125. MR1646236

[4] I. Broere, P. Hajnal, P. Mihok, G. Semanisin, *Partition problems and kernels of graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, **17**:2 (1997), 311–313. MR1627971

[5] F. Bullock, J.E. Dunbar, M. Frick, *Path partitions and P_n-free sets*, Discrete Mathematics, **289**:1–3 (2004), 145–155. MR2106037

[6] J.E. Dunbar, M. Frick, *Path kernels and partitions*, Math. Combin. Comput., **31** (1999), 137–149. MR1726954

[7] J.E. Dunbar, M. Frick, *The path partition conjecture is true for claw-free graphs*, Discrete Mathematics, **307** (2007), 1285–1290. MR2311098

[8] M. Frick, *A survey of the Path Partition Conjecture*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, **33**:1 (2013), 117–131. MR3023047

[9] A.N. Glebov, *Splitting a planar graph of girth 5 into two forests with trees of small diameter*, Discrete Mathematics, **341**:7 (2018), 2058—2067. MR3802159

[10] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, *Partition of a Planar Graph with Girth 6 into Two Forests with Chain Length at Most 4*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **8**:3 (2014), 317–328. MR3241786

[11] A.N. Glebov, D.Z. Zambalaeva, *Path partitions of planar graphs*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **4** (2007), 450–459. MR2465436

[12] P. Hajnal, *Graph Partitions*, Thesis supervised by L. Lovász, (J.A. University, Szeged, 1984) (in Hungarian).

[13] S.L. Hakimi, E.F. Schmeichel, *On the number of cycles of length k in a maximal planar graph*, Journal of Graph Theory, **3**:1 (1979), 69–86. MR0519175

[14] J. Kim, A. Kostochka, X. Zhu, *Improper coloring of sparse graphs with a given girth, I: (0,1)-colorings of triangle-free graphs*, European Journal of Combinatorics, **42**:1 (2014), 26–48. MR3240135

[15] L.S. Melnikov, I.V. Petrenko, *On path kernels and partitions of undirected graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1, **9**:2 (2002), 21–35. MR1929631

[16] P. Mihók, *Additive hereditary properties and uniquely partitionable graphs*, Graphs, hypergraphs and matroids. — Zielona Góra: Higher College of Engineering (1985), 49–58. MR0848964

[17] W.T. Tutte, *A theorem on planar graphs*, Trans. Amer. Math. Soc., **82** (1956), 99–116. MR0081471

[18] J. Vronka, *Vertex sets of graphs with prescribed properties*, Thesis supervised by P. Mihók, (P.J. Šafárik University, Košice, 1986) (in Slovak).

Aleksey Nikolaevich Glebov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: angle@math.nsc.ru

Zambalaeva Dolgor Zhamyanovna
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: dolgorzam@gmail.com