S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1048–1064 (2018) УДК 512.552.4
DOI 10.17377/semi.2018.15.088 MSC 16R10

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И ТОЖДЕСТВА КОНЕЧНОПОРОЖДЕННОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ R С УСЛОВИЕМ $\dim R^N/R^{N+1} = 2$

Е.П. ПЕТРОВ

Abstract. In this paper we describe defining relations of s-generated nilpotent algebra R over arbitrary field with condition $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ for some natural number $N \geq 3$. It is proved that such algebra R over a field of characteristic not two satisfies the standard identity of degree $N+2$ if $s \geq N$, or the standard identity of smaller degree than N if $s < N$.

Keywords: defining relations, identities, nilpotent algebra.

1. Введение

В работе [1] было показано, что всякая ассоциативная нильпотентная конечномерная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim R^2/R^3 = 2$ удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0.$$

Причем эта оценка является точной.

В процессе обобщения указанного результата в работе [2] выяснилось, что ассоциативная нильпотентная 2-порожденная алгебра R, над полем характеристики, не равной 2, с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ при $N > 2$, удовлетворят при достаточно больших значениях числа N стандартному тождеству значительно меньшей степени, чем N.

Теорема [2]. *Произвольная 2-порожденная нильпотентная алгебра R над полем характеристики, не равной двум, с условием* $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, $N \geq 3$,

Petrov, E.P., Defining relations and identities of finite-generated nilpotent algebra R with condition $\dim R^N/R^{N+1} = 2$.

Поступила 1 июня 2018 г., опубликована 21 сентября 2018 г.

удовлетворяет стандартному тождеству $S_T(x_1, x_2, \dots, x_T) = 0$, *где* $T = \lceil \frac{N+2^{m+1}}{m} \rceil - 2$, *параметр* m *вычисляется по формуле:*

$$m = \begin{cases} \lfloor \log_2 \frac{N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor, & \text{если } N < \lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor 2^{\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor}; \\ \lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor, & \text{если } N \geq \lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor 2^{\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor}. \end{cases}$$

Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает округление числа x в меньшую сторону (целая часть числа, пол), $\lceil x \rceil$ обозначает округление числа x в большую сторону (потолок).

Эта оценка для бесконечного множества значений N определенного вида является точной.

С целью обобщения указанных результатов продолжим исследование ассоциативной нильпотентной s-порожденной алгебры R, удовлетворяющей для некоторого натурального числа $N \geq 3$ условию: $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, выясняя ее определяющие соотношения и тождества.

2. Предварительные замечания и определения

В данной работе мы будем предполагать, что R – нильпотентная конечномерная алгебра R над полем F с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2, \ N \geq 3$.

Причем поле F будем считать произвольным, если не оговорено иное.

Напомним некоторые определения и обозначения из работ [1], [2].

Будем называть типом алгебры R следующую строчку натуральных чисел: $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_{m-1})$, где $s_i = \dim R^i/R^{i+1}, \ 1 \leq i \leq m-1$, m – индекс нильпотентности алгебры R.

Типу алгебры R соответствует следующая базис-таблица:

$$\begin{array}{|c|}\hline v_1^{(1)} \\ \hline v_2^{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{s_1}^{(1)} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline v_1^{(2)} \\ \hline v_2^{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{s_2}^{(2)} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline v_1^{(3)} \\ \hline v_2^{(3)} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{s_3}^{(3)} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline \vdots \\ \hline \dots \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline v_1^{(m-1)} \\ \hline v_2^{(m-1)} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{s_{m-1}}^{(m-1)} \\ \hline \end{array} ,$$

под которой мы понимаем описание базиса алгебры R, где элементы i-го столбца – базис R^i по модулю $R^{i+1}, \ i = 1, \dots, m-1$.

В работе будем рассматривать хорошо известные тождества:

$p_k^{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 x_2 \cdots x_k - x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0$ (перестановочное тождество),

$S_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum\limits_{\sigma \in S_k} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0$, (стандартное тождество), где подстановка σ пробегает симметрическую группу S_k.

Если S — подмножество алгебры R, то через $\langle S \rangle$ будем обозначать подалгебру, порожденную S. Если $x \in R, x \notin R^i$ то, рассматривая его образ в R/R^i, условимся вместо $x + R^i$ писать x там, где это не вызовет недоразумений.

Напомним также некоторые факты из работ [2], [3].

Прежде всего в работе [2] было получено общее представление о строении алгебры R с условием $dim R^N/R^{N+1} = 2$.

Предложение 1 [2]. *Пусть* R *– конечномерная нильпотентная алгебра над произвольным полем* F *с условием* $\dim R^N/R^{N+1} = \dim R^{N+1}/R^{N+2} = 2$,

$N \geq 2$. *Тогда алгебра R имеет тип*

$$\Big(s_1+2,\ s_2+2,\ \dots\ ,\ s_{N-1}+2,\ \underbrace{2,\ \dots\ ,\ 2}_{k-N+2},\ \underbrace{1,\ \dots\ ,\ 1}_{t-1}\Big)$$

и следующую базис-таблицу:

a	a^2	$\dots$	a^{N-1}	a^N	$\dots$	a^k	a^{k+1}	a^{k+2}	$\dots$	a^{k+t}	
b	ab	$\dots$	$a^{N-2}b$	$a^{N-1}b$	$\dots$	$a^{k-1}b$	$a^k b$				
c_1	$v_1^{(2)}$	$\dots$	$v_1^{(N-1)}$								,
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$								
c_{s_1}	$v_{s_2}^{(2)}$	$\dots$	$v_{s_{N-1}}^{(N-1)}$								

где $s_i+2 = \dim R^i/R^{i+1}$, $i = \overline{1, N-1}$, $k \geq N$, $t \geq 0$, $k+t+1$ *– индекс нильпотентности алгебры R.*

В дальнейшем нам понадобится следующее предложение из работы [3]:

Предложение 1 [3]. *Пусть R – конечномерная нильпотентная алгебра индекса m над произвольным полем и для некоторого $i \in \{1, \dots, m-1\}$ удовлетворяет условию $dim R^i/R^{i+1} = 1$. Тогда алгебра R удовлетворяет тождествам $p^\sigma_{i+1}(x_1, \dots, x_{i+1}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{i+1}$.*

В нашем случае алгебра R удовлетворяет перестановочным тождествам $p^\sigma_{k+3}(x_1, \dots, x_{k+3}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{k+3}$.

Очевидно, что одними из основополагающих соотношений от порождающих $a,\ b$ в алгебре R являются следующие равенства:

$$a^{N-2}ba = Aa^N + Ba^{N-1}b, \tag{1}$$

$$a^{N-2}b^2 = Ca^N + Da^{N-1}b, \tag{2}$$

$$a^{k+1}b = Ea^{k+2}, \tag{3}$$

где $A = \sum\limits_{p=1}^{k+t-N+1} \alpha_p a^{p-1}$, $B = \sum\limits_{p=1}^{k-N+2} \beta_p a^{p-1}$, $C = \sum\limits_{p=1}^{k+t-N+1} \gamma_p a^{p-1}$,
$D = \sum\limits_{p=1}^{k-N+2} \delta_p a^{p-1}$, $E = \sum\limits_{p=1}^{t-1} \nu_p a^{p-1}$, $\alpha_p,\ \beta_p,\ \gamma_p,\ \delta_p,\ \nu_p \in F$.

Заметим, что элементы $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ принадлежат подалгебре $\langle a \rangle^1$ с присоединенной единицей, порожденной элементом a, и, поскольку a – нильпотентный элемент, обратимость какого-либо из элементов $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ равносильна наличию у него ненулевого "свободного члена".

В работе [2] имели место следующие утверждения, важные следствия из которых нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 6 [2]. *Если $\beta_1 \neq 1$, то в алгебре R выполняются соотношения*

$$a^{k+2}b = 0, \quad a^{k+1}b \equiv ba^{k+1} \equiv a^k b^2 \equiv ba^k b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+t}).$$

Лемма 7 [2]. *Для любого $u \in R^N$ справедливо следующее утверждение:*

$$au \equiv 0\ (mod\ R^{k+2}) \ \ \textit{тогда, и только тогда, когда} \ \ u \equiv 0\ (mod\ R^{k+1}).$$

Лемма 8 [2]. *Если* $\beta_1 \neq 1$ *или* $B = 1$, $t \geq 3$, *то для любого* $u \in R^N$ *справедливо следующее утверждение:*

$au \equiv 0$ $(mod\ R^{k+t})$ *тогда, и только тогда, когда* $u \equiv \nu a^k b$ $(mod\ R^{k+t-1})$

для некоторого $\nu \in F$.

3. Определяющие соотношения в алгебре R

В этой части работы в каждом из утверждений мы будем предполагать, что R – нильпотентная конечномерная алгебра R над полем F с условием $\dim R^N/R^{N+1} = \dim R^{N+1}/R^{N+2} = 2$, $N \geq 3$.

Определяющие соотношения в алгебре R только от порождающих a, b, подробно изучены в работе [2]. Далее мы изучим соотношения, выполняющиеся в алгебре R, от всех порождающих a, b, c_i, $i = \overline{1, s-2}$.

Лемма 1. *Для любого* $i \in \{1, \dots, s-2\}$ *можно подобрать порождающий элемент* c_i' *так, чтобы в алгебре* R *выполнялись следующие соотношения:*

$$a^{N-1}c_i' = 0; \tag{4}$$

$$a^{N-j}c_i'g_1g_2\cdots g_{j-1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}),\ j = \overline{2, N}, \tag{5}$$

где $g_p \in \{a,\ b,\ c_m'\}$ *– порождающие,* $m = \overline{1, s-2}$.

Доказательство. Рассмотрим для некоторого $i \in \{1, \dots, s-2\}$ выполняющееся в алгебре R соотношение

$$a^{N-1}c_i = A(i)a^N + B(i)a^{N-1}b,$$

где $A(i), B(i) \in \langle a \rangle^1$. Полагая $c_i' = c_i - A^{(i)}a + B^{(i)}b$, получим соотношение (4).

Рассмотрим далее сравнение

$$a^{N-2}c_i'g_1 \equiv A(i, g_1)a^N + B(i, g_1)a^{N-1}b \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}),$$

где $A(i, g_1), B(i, g_1) \in \langle a \rangle^1$. Домножая слева на a, получим с учетом (4), что

$$0 = a^{N-1}c_i'g_1 \equiv A(i, g_1)a^{N+1} + B(i, g_1)a^N b \ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}).$$

Откуда с учетом леммы 7 [2] имеем, что

$$a^{N-2}c_i'g_1 \equiv A(i, g_1)a^N + B(i, g_1)a^{N-1}b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}).$$

Рассуждая аналогично, получим, что

$$a^{N-j}c_i'g_1g_2\cdots g_{j-1} \equiv$$
$$\equiv A(i, g_1, g_2, \cdots, g_{j-1})a^N + B(i, g_1, g_2, \cdots, g_{j-1})a^{N-1}b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}),$$

где $A(i, g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}),\ B(i, g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}) \in \langle a \rangle^1$, $j = \overline{2, N}$.

Лемма доказана. □

Далее в тексте мы для удобства будем использовать запись c_i вместо c_i'.

Дополнительно к лемме 6 [2] имеет место следующее утверждение:

Лемма 2. *Если* $\beta_1 \neq 1$, *то для любого* $i \in \{1, \dots, s-2\}$ *в алгебре* R *выполняются следующие соотношения:*

$$a^kbg_1g_2 = 0, \quad a^kbg \equiv ga^kb \equiv 0 \ (mod\ R^{k+t}),$$

где g_1, g_2, g *– произвольные порождающие.*

Доказательство. Если $t < 3$, то доказательство очевидно. Поэтому далее считаем, что $t \geq 3$.

Заметим, что для любого $i \in \{1, \ldots, s-2\}$ в алгебре R выполняется соотношение $a^k b c_i g = 0$, где g – произвольный порождающий, поскольку имеет место равенство (4) и по предложению 1 [1] алгебра R удовлетворяет перестановочным тождествам $p^{\sigma}_{k+3}(x_1, \ldots, x_{k+3}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{k+3}$.

Рассмотрим сравнение $a^k b c_i \equiv L a^{k+2}$ $(mod\ R^{k+t})$, где $L \in \langle a \rangle^1$. Домножая справа на порождающий a, получим, что $0 = a^k b c_i a = L a^{k+3}$, откуда следует, что $a^k b c_i \equiv 0$ $(mod\ R^{k+t})$.

Сравнение $c_i a^k b \equiv 0$ $(mod\ R^{k+t})$ доказывается аналогично.

Поскольку в соответствии с леммой 6 [2] в алгебре R выполняются соотношения

$$a^{k+2} b = 0, \quad a^{k+1} b \equiv b a^{k+1} \equiv a^k b^2 \equiv b a^k b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+t}),$$

то, исходя из вышесказанного, утверждение леммы имеет место. □

В качестве следствия из лемм 7 [2] и 8 [2] имеем следующее утверждение:

Лемма 3. *Для любого* $u \in R^{N-p+1}$, $p \in \{1, \ldots, N\}$, *для любого* j *такого, что* $1 \leq j \leq p$

1) если $a^p u \equiv 0$ $(mod\ R^{k+2})$, *то* $a^{p-j} u g_1 g_2 \cdots g_{j-1} \equiv 0$ $(mod\ R^{k+1})$;

2) если $\beta_1 \neq 1$ *или* $B = 1$, $t \geq 3$, $a^p u \equiv 0$ $(mod\ R^{k+t})$, *то*

$$a^{p-j} u g_1 g_2 \cdots g_{j-1} \equiv \nu(p, u, g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}) a^k b \ (mod\ R^{k+t-1}),$$

где $g_m \in \{a, b, c_i\}$ *– произвольные порождающие,* $i = \overline{1, s-2}$, $\nu(p, u, g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}) \in F$.

Доказательство. Докажем второе утверждение леммы, первое доказывается аналогично.

Рассмотрим сравнение $a^p u \equiv 0$ $(mod\ R^{k+t})$. По лемме 8 [2] имеем, что $a^{p-1} u \equiv \nu(p, u) a^k b$ $(mod\ R^{k+t-1})$ для некоторого $\nu(p, u) \in F$.

Домножая это сравнение справа на произвольный порождающий g_1, с учетом леммы 2 получим, что $a^{p-1} u g_1 \equiv \nu(p, u, g_1) a^k b g_1 \equiv 0$ $(mod\ R^{k+t})$.

Откуда по лемме 8 [2] имеем, что $a^{p-2} u g_1 \equiv \nu(p, u, g_1) a^k b$ $(mod\ R^{k+t-1})$ для некоторого $\nu(p, u, g_1) \in F$

Продолжая этот процесс, для любого j такого, что $1 \leq j \leq p$, получим, что

$$a^{p-j} u g_1 g_2 \cdots g_{j-1} \equiv \nu(p, u, g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}) a^k b \ (mod\ R^{k+t-1})$$

для некоторого $\nu(p, u, g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}) \in F$.

Лемма доказана. □

Рассмотрим ниже случаи при различных значениях коэффициента β_1 элемента $B = \sum_{p=1}^{k-N+2} \beta_p a^{p-1} \in \langle a \rangle^1$ в равенстве (1).

3.1. Определяющие соотношения в алгебре R в случае $\beta_1 \neq 0$.

Предложение 1. *Если* $\beta_1 \neq 0$, *то в алгебре* R *для любого* $i \in \{1, \ldots, s-2\}$ *выполняются соотношения*

$$g_1 g_2 \cdots g_N c_i = 0; \tag{6}$$

$$c_i g_1 g_2 \cdots g_{N-1} \equiv g_1 c_i g_2 \cdots g_{N-1} \equiv \cdots \equiv g_1 g_2 \cdots g_{N-1} c_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}); \tag{7}$$

(8) $$c_i g_1 g_2 \cdots g_{N+1} = g_1 c_i g_2 \cdots g_{N+1} = \cdots = g_1 g_2 \cdots g_{N+1} c_i = 0,$$

где $g_p \in \{a,\ b,\ c'_m\}$ *– порождающие,* $m = \overline{1, s-2}$.

Доказательство. По лемме 9 [2] в алгебре R выполняются по $\bmod R^{k+1}$ следующие соотношения:

$$a^{N-j} b a^{j-1} \equiv \alpha\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j-2}\big) a^{l+N-1} + B^{j-1} a^{N-1} b,\quad j = \overline{2, N},$$

где $l \in \{1, \dots, k-N+1\}$, $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$. Откуда, в частности, следует, что

$$b a^{N-1} = \alpha\big(1 + B + \ \dots\ + B^{N-2}\big) a^{l+N-1} + B^{N-1} a^{N-1} b + G a^{k+1} + \mu a^k b,$$

где $G \in \langle a \rangle^1$, $\mu \in F$.

Домножая справа на c_i, получим с учетом (4), что

$$\begin{aligned} b a^{N-1} c_i &= \alpha\big(1 + B + \ \dots\ + B^{N-2}\big) a^{l+N-1} c_i + B^{N-1} a^{N-1} b c_i + G a^{k+1} c_i + \mu a^k b c_i \\ &= B^{N-1} a^{N-1} b c_i + \mu a^k b c_i = 0. \end{aligned}$$

Так как $\beta_1 \neq 0$, то есть B (а, значит, и B^{N-1}) – обратим, то $a^{N-1} b c_i = 0$.

Рассмотрим равенство

$$g_1 g_2 \cdots g_N = A(g_1, g_2, \cdots, g_N) a^N + B(g_1, g_2, \cdots, g_N) a^{N-1} b,$$

где $A(g_1, g_2, \cdots, g_N)$, $B(g_1, g_2, \cdots, g_N) \in \langle a \rangle^1$.

Домножая справа на c_i, получим с учетом (4) и того, что $a^{N-1} b c_i = 0$, соотношение (6).

Из соотношения (6), в частности, следует, что

$$a^p g_1 g_2 \cdots g_{N-p} c_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}),\ p \in \{1, \dots, N\}.$$

Откуда по лемме 3 имеем, что

$$a^{p-j} g_1 g_2 \cdots g_{N-p} c_i g_1 g_2 \cdots g_{j-1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}),\quad 1 \leq j \leq p.$$

В частности, при $j = p$:

$$g_1 g_2 \cdots g_{N-p} c_i g_1 g_2 \cdots g_{p-1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}),\ p \in \{1, \dots, N\}.$$

То есть соотношения (7) имеют место.

Заметим, что по предложению 1 [2] алгебра R удовлетворяет перестановочным тождествам $p^{\sigma}_{k+3}(x_1, \dots, x_{k+3}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{k+3}$.

Поэтому, с учетом (6) и (7) получим, что

$$\begin{aligned} (c_i g_1 g_2 \cdots g_N) g_{N+1} = g_{N+1}(c_i g_1 g_2 \cdots g_N) = (g_{N+1} c_i g_1 \cdots g_{N-1}) g_N = \dots \\ \cdots = (g_2 \cdots g_{N+1} c_i) g_1 = g_1 g_2 \cdots g_{N+1} c_i = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения (8) имеют место.

Предложение доказано. □

3.2. **Определяющие соотношения в алгебре R в случае $\beta_1 = 0$.**

Лемма 4. *Если* $\beta_1 = 0$, $t \geq 3$, *то в алгебре* R *для любого* $i \in \{1, \dots, s-2\}$ *выполняются следующие соотношения:*

(9) $$a^{N-j} c_i g_1 g_2 \cdots g_{j-1} \equiv \nu(i, g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}) a^k b \ (\mathrm{mod}\ R^{k+t-1}),\ j = \overline{2, N},$$

где $g_p \in \{a,\ b,\ c'_m\}$ *– порождающие,* $m = \overline{1, s-2}$, $\nu(i, g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}) \in F$.

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из леммы 3. □

Замечание. Если $t < 3$, то имеет место соотношение (5).

Следствие. *Если* $\beta_1 = 0$, *то в алгебре* R *для любого* $i \in \{1, \ldots, s-2\}$ *выполняются следующие соотношения:*

$$a^{N+2-j} c_i g_1 g_2 \cdots g_{j-1} = 0, \ j = \overline{2, N+2}, \tag{10}$$

где $g_p \in \{a, \ b, \ c'_m\}$ *– порождающие,* $m = \overline{1, s-2}$.

Доказательство. Утверждение следствия имеет место с учетом леммы 2, леммы 4 и замечания к ней. □

Лемма 5. *Если* $\beta_1 = 0$, $t \geq 3$, *то в алгебре* R *для любого элемента* $g_1 g_2 \cdots g_N$, *где* g_i *– порождающие, в записи которого найдется хотя бы один порождающий, отличный от* a, *справедливо следующее сравнение:*

$$g_1 g_2 \cdots g_N \equiv K a^{N-1} b \pmod{R^{k+t-1}}$$

для некоторого $K \in \langle a \rangle^1$.

То есть в разложении по базису такого элемента по mod R^{k+t-1} отсутствуют базисные элементы вида a^j.

Доказательство. По лемме 5 [2] равенство (1) в случае $\beta_1 = 0$ имеет следующий вид:

$$a^{N-2} b a = B a^{N-1} b.$$

Домножая это равенство справа на a, получим, что

$$a^{N-2} b a^2 = B a^{N-1} b a = B^2 a^N b \ \text{ или } \ a^{N-2} b a^2 \equiv B^2 a^N b \pmod{R^{k+t}}.$$

Откуда с учетом леммы 8 [2] имеем сравнение

$$a^{N-3} b a^2 \equiv B^2 a^{N-1} b + \mu a^k b \pmod{R^{k+t-1}}$$

для некоторого $\mu \in F$. Продолжая этот процесс, получим, что

$$a^{N-j} b a^{j-1} \equiv B^{j-1} a^{N-1} b + \nu(j) a^k b \pmod{R^{k+t-1}}, \ \ j = \overline{2, N}, \tag{11}$$

для некоторого $\nu(j) \in F$, $t \geq 2$.

Рассмотрим сравнение

$$a^{N-2} b c_i \equiv G a^N + H a^{N-1} b \pmod{R^{k+t-1}},$$

где $G, \ H \in \langle a \rangle^1$.

По лемме 3 получим, что

$$b c_i g_1 g_2 \cdots g_{N-2} \equiv G a^2 g_1 g_2 \cdots g_{N-2} + H a b g_1 g_2 \cdots g_{N-2} + \nu a^k b \pmod{R^{k+t-1}}$$

для некоторого $\nu \in F$, где $g_p \in \{a, \ b, \ c_m\}$ – порождающие, $m = \overline{1, s-2}$.

В случае, когда $g_1 = g_2 = \cdots = g_{N-2} = a$, получим с учетом (11), что

$$b c_i a^{N-2} \equiv G a^N + H a b a^{N-2} + \nu a^k b \equiv G a^N + H B^{N-2} a^{N-1} b + \mu a^k b \pmod{R^{k+t-1}}$$

для некоторого $\mu \in F$.

Домножая справа на a, получим с учетом (9), (11), что

$$0 = b c_i a^{N-1} \equiv G a^{N+1} + H B^{N-1} a^N b \pmod{R^{k+t}}.$$

Откуда с учетом леммы 6 [2] имеем, что $G a^{N+1} \equiv 0 \pmod{R^{k+t}}$, и по лемме лемме 8 [2] $G a^N \equiv \lambda a^k b \pmod{R^{k+t-1}}$ для некоторого $\lambda \in F$.

Таким образом, имеет место сравнение

$$a^{N-2} b c_i \equiv H(i) a^{N-1} b \pmod{R^{k+t-1}}, \tag{12}$$

где $H(i) \in \langle a \rangle^1$. Из (11) получим, что

$$a^{N-j}ba^{j-1}c_i \equiv B^{j-1}H(i)a^{N-1}b \ (\mathrm{mod}\ R^{k+t}). \tag{13}$$

Рассмотрим далее ситуацию, когда моном $g_1g_2\cdots g_N$ содержит по крайней мере два порождающих b.

По лемме 15 [2] в алгебре R выполняется равенство $Ca^{N+2} = 0$, где C – из уравнения (2). Поэтому имеет место следующее сравнение:

$$Ca^N \equiv 0 \ (mod\ R^{k+t-1}),\ t \geq 2. \tag{14}$$

Учитывая (14), по лемме 12 [2] для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, такого, что $(i_1 + i_2 + \cdots + i_s) \leq (N - s)$, $s = \overline{2, N}$, в алгебре R выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered} a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s} \\ \equiv B^{i_1+\cdots+i_s}D^{s-1}a^{N-1}b + \nu(i_1,\dots,i_s)a^kb \ (\mathrm{mod}\ R^{k+t-1}) \end{gathered}$$

для некоторого $\nu(i_1,\dots,i_s) \in F$, $t \geq 2$.

Откуда с учетом леммы 2 и сравнения (12) получим, что

$$\begin{gathered} a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s}c_i \\ \equiv B^{i_1+\cdots+i_s}D^{s-1}a^{N-1}bc_i + \nu(i_1,\dots,i_s)a^kbc_i \equiv \\ B^{i_1+\cdots+i_s}D^{s-1}H(i)a^Nb \ (\mathrm{mod}\ R^{k+t}), \end{gathered}$$

$i \in \{1,\dots,s-2\}$.

Таким образом, учитывая сравнение (13), заключаем, что, если моном $a^pg_1g_2\cdots g_{N-p}$, $p \in \{1,\dots,N-1\}$, содержит помимо порождающего a по крайней мере один порождающий b, то имеет место сравнение

$$a^pg_1g_2\cdots g_{N-p}c_i \equiv Ma^Nb \ (\mathrm{mod}\ R^{k+t})$$

для некоторого $M \in \langle a \rangle^1$.

По лемме 8 [2] получим, что

$$a^{p-1}g_1g_2\cdots g_{N-p}c_i \equiv Ma^{N-1}b + \tau a^kb \ (\mathrm{mod}\ R^{k+t-1}),\quad p \in \{1,\dots,N-1\}, \tag{15}$$

для некоторого $\tau \in F$.

Поскольку имеют место равенства

$$a^{N-1}ba = Ba^Nb,\quad a^{N-1}b^2 = Da^Nb,\quad a^{N-1}bc_m \equiv H(m)a^Nb \ (\mathrm{mod}\ R^{k+t-1}),$$

то, поочередно домножая сравнение (15) справа на a, или на b, или на c_m, и многократно используя лемму 8 [2], получим, что

$$g_1g_2\cdots g_jc_ig_{j+1}g_{j+2}\cdots g_{N-1} \equiv K_1a^{N-1}b+\tau_1a^kb \ (\mathrm{mod}\ R^{k+t-1}),\ j \in \{1,\dots,N-1\},$$

для некоторых $K_1 \in \langle a \rangle^1$, $\tau_1 \in F$, где среди $g_1, g_2, \cdots, g_j$ встречается по крайней мере один порождающий b.

В случае, когда среди порождающих $g_1, g_2, \cdots, g_j$ порождающий b не встречается ни разу, имеют место соотношения (9).

Лемма доказана □

Предложение 2. *Если* $\beta_1 = 0$, *то в алгебре* R *на порождающих* $g_i \in \{a,\ b,\ c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, *выполняются следующие соотношения:*

$$g_1\cdots g_r\big(g_{r+1}\cdots g_{N+p} - g_{\sigma(r+1)}\cdots g_{\sigma(N+p)}\big) = 0,\quad p \geq 2, \tag{16}$$

для любых $r \in \{1,\dots,N+p-2\}$, *для любых* $\sigma \in S_{N+p-r}$, *при условии, что среди порождающих* $g_1, \ldots, g_r \in \{a,\ b,\ c_i\}$ *встречается по крайней мере один порождающий, отличный от* a.

Доказательство. В случае, если среди порождающих в равенстве (16) не встречается $c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, то (16) справедливо ввиду предложения 4 [2].

В случае, если в равенстве (16) элемент $g_1 \cdots g_r$ имеет следующий вид:

$$g_1 \cdots g_r = a^j c_i g_1' g_2' \cdots g_{r-j-1}', \quad j \geq 0, \quad g_i' \in \{a,\ b,\ c_m\}, \quad m = \overline{1, s-2},$$

то соотношение (16) справедливо ввиду равенства (10).

Осталось рассмотреть случай, когда в равенстве (16) элемент $g_1 \cdots g_r$ имеет следующий вид:

$$g_1 \cdots g_r = a^j b g_1' g_2' \cdots g_{r-j-1}', \quad j \geq 0, \quad g_i' \in \{a,\ b,\ c_i\}, \quad i = \overline{1, s-2}.$$

Рассмотрим элемент $bg_1g_2 \cdots g_{N-1}$. По лемме 5 имеем, что

$$bg_1g_2 \cdots g_{N-1} \equiv K_0 a^{N-1} b \pmod{R^{k+t-1}}$$

для некоторого $K_0 \in \langle a \rangle^1$.

Поскольку имеют место равенства

$$a^{N-1}ba = Ba^N b, \quad a^{N-1}b^2 = Da^N b, \quad a^{N-1}bc_m \equiv H(m)a^N b \pmod{R^{k+t-1}},$$

то получим, что

$$\begin{aligned} bg_1g_2 \cdots g_{N-1}[a, c_i] &= K_0 a^{N-1} bac_i - K_0 a^{N-1} bc_i a \\ &= K_0 BH(i) a^{N+1} b - K_0 H(i) B a^{N+1} b = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bg_1g_2 \cdots g_{N-1}[b, c_i] &= K_0 a^{N-1} b^2 c_i - K_0 a^{N-1} bc_i b \\ &= K_0 DH(i) a^{N+1} b - K_0 H(i) D a^{N+1} b = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bg_1g_2 \cdots g_{N-1}[c_m, c_i] &= K_0 a^{N-1} bc_m c_i - K_0 a^{N-1} bc_i c_m \\ &= K_0 H(m) H(i) a^{N+1} b - K_0 H(i) H(m) a^{N+1} b = 0. \end{aligned}$$

То есть для каждого $i \in \{1, \ldots, s-2\}$ справедливы равенства

$$bg_1g_2 \cdots g_{N-1}[c_i, g] = 0, \tag{17}$$

где $g \in \{a,\ b,\ c_m\}$, $m = \overline{1, s-2}$.

Рассмотрим далее элемент $a^{p+1}bg_1g_2 \cdots g_{N-p-2}$, $0 \leq p \leq N-2$. По лемме 5

$$a^{p+1}bg_1g_2 \cdots g_{N-p-2} \equiv Ka^{N-1}b \pmod{R^{k+t-1}}$$

для некоторого $K \in \langle a \rangle^1$.

Поочередно домножая это сравнение справа на a, или на b, или на c_i, получим следующие сравнения:

$$a^{p+1}bg_1g_2 \cdots g_{N-p-2}a \equiv Ka^{N-1}ba \equiv KBa^N b \pmod{R^{k+t}},$$

$$a^{p+1}bg_1g_2 \cdots g_{N-p-2}b \equiv Ka^{N-1}b^2 \equiv KDa^N b \pmod{R^{k+t}},$$

$$a^{p+1}bg_1g_2 \cdots g_{N-p-2}c_i \equiv Ka^{N-1}bc_i \equiv KH(i)a^N b \pmod{R^{k+t}}.$$

Используя лемму 8 [2], получим, что

$$a^p bg_1g_2 \cdots g_{N-p-2}a \equiv Ka^{N-1}ba \equiv KBa^{N-1}b + \lambda_1 a^k b \pmod{R^{k+t-1}},$$

$$a^p bg_1g_2 \cdots g_{N-p-2}b \equiv Ka^{N-1}b^2 \equiv KDa^{N-1}b + \lambda_2 a^k b \pmod{R^{k+t-1}},$$

$$a^p bg_1g_2 \cdots g_{N-p-2}c_i \equiv Ka^{N-1}bc_i \equiv KH(i)a^{N-1}b + \lambda_3 a^k b \pmod{R^{k+t-1}}$$

для некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$.

Домножим теперь эти сравнения справа на c_m, $m \in \{1, \dots, s-2\}$ и последнее из них на a и b. Получим с учетом леммы 2, что

$$a^p b g_1 g_2 \cdots g_{N-p-2} a c_m \equiv K B a^{N-1} b c_m \equiv K B H(m) a^N b \pmod{R^{k+t}},$$
$$a^p b g_1 g_2 \cdots g_{N-p-2} b c_m \equiv K D a^{N-1} b c_m \equiv K D H(m) a^N b \pmod{R^{k+t}},$$
$$a^p b g_1 g_2 \cdots g_{N-p-2} c_i c_m \equiv K H(i) a^{N-1} b c_m \equiv K H(i) H(m) a^N b \pmod{R^{k+t}},$$
$$a^p b g_1 g_2 \cdots g_{N-p-2} c_i a \equiv K H(i) a^{N-1} b a \equiv K H(i) B a^N b \pmod{R^{k+t}},$$
$$a^p b g_1 g_2 \cdots g_{N-p-2} c_i b \equiv K H(i) a^{N-1} b^2 \equiv K H(i) D a^N b \pmod{R^{k+t}}.$$

Откуда, очевидно, получим следующие сравнения:

$$a^p b g_1 g_2 \cdots g_{N-p-2} [c_i, g] \equiv 0 \pmod{R^{k+t}},\ 0 \le p \le N-2,$$

где $g \in \{a,\ b,\ c_m\}$, $m = \overline{1, s-2}$.

Если $p = 0$, то получим равенство

$$b g_1 g_2 \cdots g_{N-2} [c_i, g] g_{N-1} = 0, \tag{18}$$

где $g \in \{a,\ b,\ c_m\}$, $m = \overline{1, s-2}$.

Если $p > 0$, то, используя лемму 3, получим, что

$$a^{p-j} b g_1 g_2 \cdots g_{N-p-2} [c_i, g] g_1 g_2 \cdots g_{j-1} \equiv \nu a^k b \pmod{R^{k+t-1}},$$

для некоторого $\nu \in F$, где $1 \le p \le N-2,\ 1 \le j \le p,\ g \in \{a,\ b,\ c_m\}$, $m = \overline{1, s-2}$.

Следовательно, имеют место равенства

$$a^{p-j+2} b g_1 g_2 \cdots g_{N-p-2} [c_i, g] g_1 g_2 \cdots g_{j-1} = 0,$$
$$a^{p-j+1} b g_1 g_2 \cdots g_{N-p-2} [c_i, g] g_1 g_2 \cdots g_j = 0,$$
$$a^{p-j} b g_1 g_2 \cdots g_{N-p-2} [c_i, g] g_1 g_2 \cdots g_{j+1} = 0,$$

где $1 \le p \le N-2,\ 1 \le j \le p,\ g \in \{a,\ b,\ c_m\}$, $m = \overline{1, s-2}$.

С учетом (17) и (18) получим, что

$$g_1 \cdots g_r \big(g_{r+1} \cdots [c_i, g] \cdots g_{N+p} \big) = 0, \quad p \ge 2,$$

для любых $r \in \{1, \dots, N+p-2\}$, при условии, что среди порождающих $g_1, \dots, g_r \in \{a,\ b,\ c_i\}$ встречается по крайней мере один порождающий, отличный от a.

Равенства $g_1 \cdots g_r \big(g_{r+1} \cdots [a, b] \cdots g_{N+p} \big) = 0,\ p \ge 2,\ \ r \in \{1, \dots, N+p-2\}$, доказываются аналогично.

Предложение доказано. □

Следствие. *Если $\beta_1 = 0$, то в алгебре R на порождающих $g_i \in \{a,\ b,\ c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, выполняются следующие соотношения:*

$$\Big[g_1 \cdots g_{r_1},\ g_{r_1+1} \cdots g_{r_2} \Big] \Big[g_{r_2+1} \cdots g_{r_3},\ g_{r_3+1} \cdots g_{r_4} \Big] g_{r_4+1} \cdots g_{N+p} = 0, \tag{19}$$

где $p \ge 2,\ \ 0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \le N+p$.

Доказательство. Рассмотрим равенство (16) в двух вариантах:

$$g_1 \cdots g_{r_1}\ g_{r_1+1} \cdots g_{r_2} \big(g_{r_2+1} \cdots g_{N+p} - g_{\sigma(r_2+1)} \cdots g_{\sigma(N+p)} \big) = 0,$$
$$g_{r_1+1} \cdots g_{r_2}\ g_1 \cdots g_{r_1} \big(g_{r_2+1} \cdots g_{N+p} - g_{\sigma(r_2+1)} \cdots g_{\sigma(N+p)} \big) = 0,$$

где $0 < r_1 < r_2 < N+p,\ p \ge 2$.

Предполагая, что подстановка $\sigma \in S_{N+p-r}$ такова, что

$$g_{r_2+1} \cdots g_{N+p} - g_{\sigma(r_2+1)} \cdots g_{\sigma(N+p)} = \Big[g_{r_2+1} \cdots g_{r_3},\ g_{r_3+1} \cdots g_{r_4} \Big] g_{r_4+1} \cdots g_{N+p},$$

для некоторых $r_2 < r_3 < r_4 \le N+p$, и беря разность этих равенств, получаем соотношение (19). □

4. Стандартное тождество в алгебре R

Предложим теперь обобщение основного результата работы [2].

Следующая теорема предоставляет алгоритм нахождения степени минимального тождества s-порожденной нильпотентной алгебры над полем характеристики, не равной двум, с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2,\ N\ge 3$, для бесконечного множества значений N определенного вида.

Теорема. *Пусть R – произвольная s-порожденная ($s\ge 2$) нильпотентная алгебра над полем характеристики, не равной двум, с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2,\ N\ge 3$. Тогда*

1) если $s < N+2$, то R удовлетворяет стандартному тождеству $S_T(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_T)=0$, где $T=\left\lceil \frac{(N+2)(s-1)^2+s^{m+1}-m(s-1)s-s}{m(s-1)^2}\right\rceil$ и параметр m вычисляется по формулам:

$$m=\begin{cases} \left\lfloor \log_s \dfrac{\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor, & \text{если } N<N^*;\\ \left\lfloor \log_s \dfrac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor, & \text{если } N\ge N^*, \end{cases}$$

$$N^*=\frac{\left(\left\lfloor \log_s \dfrac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor (s-1)-s\right)\cdot s^{\left\lfloor \log_s \frac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor}+s}{(s-1)^2}-2;$$

2) при любых значениях s алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству $S_{N+2}(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_{N+2})=0$.

Для лучшего восприятия взаимосвязи N и T приведем при некоторых значениях числа порождающих s начальные значения функции $T=T(N)$:

при $s=3$:

N	$2,3$	$4,5$	$6,7$	...	$16,17$	$18,19$	$20,21,22$	...	$101-104$	...
m	2	2	2	...	2	3	3	...	4	...
T	4	5	6	...	11	12	13	...	40	...

;

при $s=4$:

N	2	$3,4$	$5,6$	$7,8$	...	$31,32$	$33,34$	$35,36,37$	...	$227-230$	...
m		2	2	2	...	2	3	3	...	4	...
T	4	5	6	7	...	19	20	21	...	85	...

;

при $s=6$:

N	2	3	4	$5,6$	$7,8$	...	$73,74$	$75,76$	$77,78,79$	...
m				2	2	...	2	3	3	...
T	4	5	6	7	8	...	41	42	43	...

;

при $s=10$:

N	2	3	4	5	6	7	8	$9,10$	$11,12$	...	$207,208$	$209,210,211$	...
m								2	2	...	3	3	...
T	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	110	111	...

.

Доказательство. Из определения стандартного полинома следует, что он линеен по всем своим переменным и обращается в нуль, если какие-либо два аргумента равны. Поэтому можно считать, что переменные стандартного полинома пробегают набор линейно-независимых элементов алгебры R.

Предположим сначала, что $s < N+2$.

Рассмотрим в алгебре R элемент

$$S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = \sum_{\sigma \in S_T} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(T)}$$

для некоторых $x_1, x_2, , \ \dots \ , x_T \in R$, где T – как в формулировке теоремы.

Лемма 6. *Если* $s < N+2$*, то для любых* $x_1, x_2, \ \dots \ , x_T \in R$ *выполняется сравнение*

$$S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) \equiv 0 \ (mod \ R^{N+2}).$$

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ \dots \ , x_T \in R$ – различные базисные элементы алгебры R. Очевидно, можно считать, что x_j – мономы (слова) от порождающих $a, b, c_i, \ i = \overline{1, s-2}$.

Обозначим через $\deg(x_j)$ длину монома x_j от порождающих a, b, c_i, $1 \le i \le (s-2)$.

Тогда $\deg(x_1 x_2 \ \cdots \ x_T) = \sum\limits_{i=1}^{T} \deg x_i$, и с учетом свойств стандартного полинома получим, что $\deg S = \deg S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = \sum\limits_{j=1}^{T} \deg x_j$.

Далее поставим задачу оценить минимум $\deg S$ для фиксированных N и s.

Подставляя в $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T)$ вместо $x_1, x_2, \ \dots \ , x_T$ базисные элементы: сначала порождающие $a, b, c_i, \ 1 \le i \le (s-2)$, затем слова длины 2 от порождающих a, b, c_i, образующие базис R^2 по модулю R^3, и так далее, слова длины p от порождающих a, b, c_i, образующие базис R^p по модулю R^{p+1}, пока не дойдем до подстановки очередного базисного элемента вместо x_T, получим для некоторого n следующее равенство:

$$\min_{x_j \in R} (\deg S) = s_1 + 2 \cdot s_2 + \cdots + (n-1) \cdot s_{n-1} + n \cdot r,$$

где $s_p = \dim R^p / R^{p+1}, \ 1 \le p \le (n-1), \quad 0 \le r < \dim R^n / R^{n+1}$.

С другой стороны, заметим, что при фиксированных T и s среди всех s - порожденных нильпотентных алгебр наименьшее значение величина $\min_{x_j \in R} (\deg S)$ достигнет тогда, когда $s_p = \dim R^p / R^{p+1}$ будут максимальны, то есть, когда $s_1 = s, s_2 = s^2, s_3 = s^3, \dots, s_{n-1} = s^{n-1}$. Таким образом, получим, что

$$\min(\deg S) = s + 2 \cdot s^2 + \cdots + (n-1) \cdot s^{n-1} + n \cdot r = \frac{(ns - n - s) \cdot s^n + s}{(s-1)^2} + n \cdot r,$$

где $0 \le r < s^n$.

В этом случае для T будет иметь место следующее равенство:

$$T = s + s^2 + \cdots + s^{n-1} + r = \frac{s^n - s}{s-1} + r, \quad 0 \le r < s^n. \tag{20}$$

Заметим, что если выполняется неравенство

$$\frac{(ns - n - s) \cdot s^n + s}{(s-1)^2} + nr \quad \ge \quad N+2, \tag{21}$$

то это означает, что $S = S_T(x_1, x_2, \ \ldots\ , x_T) \equiv 0 \ (mod\ R^{N+2})$.

Наша цель: показать, что это неравенство выполняется для m и T (как в формулировке теоремы).

Исследуем, при каких n и r выполняется неравенство (21).

В предположении, что n и r являются минимальными по отношению к выполнению (21), имеем следующие неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} - 2 + nr - (n-1) \le N \le \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} - 2 + nr, & \text{если } r > 0; \\ \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} - 2 - (n-2) \le N \le \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} - 2, & \text{если } r = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем равенство

$$N = \frac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} - 2 + nr - i, \tag{22}$$

где $0 \le r < s^n$, $i = \overline{0, n-1}$ или $i = \overline{0, n-2}$.

Заметим, что если $N = \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} - 2$, то $n > 2$, иначе $N = \dfrac{(s-2)\cdot s^2 + s}{(s-1)^2} - 2 = \dfrac{(s-2)\cdot s + 1}{(s-1)^2}\cdot s - 2 = \dfrac{s^2 - 2s + 1}{(s-1)^2}\cdot s - 2 = s - 2$, противоречие с тем, что $s < N + 2$.

Также заметим, что если $N = \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} - 2$, $n > 2$, то имеет место равенство

$$n = \left\lfloor \log_s \frac{s \cdot \frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor. \tag{23}$$

Доказательство этого факта следует из следующих равенств:

$$(N+2)(s-1)^2 - s = (ns-n-s)s^n,$$

$$\begin{aligned} \log_s \frac{s \cdot \frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s(s-1)}} &= \log_s \frac{s \cdot \frac{(ns-n-s)s^n}{s-1}}{\log_s \frac{(ns-n-s)s^n}{s(s-1)}} \\ &= \log_s \frac{s^{n+1}}{\frac{s-1}{ns-n-s}\cdot\left(\log_s \frac{ns-n-s}{s-1} + \log_s s^{n-1}\right)} \\ &= \log_s \frac{s^{n+1}}{\log_s \left(\frac{ns-n-s}{s-1}\right)^{\frac{s-1}{ns-n-s}} + \frac{(n-1)(s-1)}{ns-n-s}} \\ &= (n+1) - \log_s \left(\log_s \left(\frac{(n-1)(s-1)-1}{s-1}\right)^{\frac{s-1}{ns-n-s}} + \frac{(n-1)(s-1)}{(n-1)(s-1)-1} \right), \end{aligned}$$

где, как легко проверить, при $n > 2$, $s \ge 3$ справедливо неравенство

$$0 \ < \ \log_s \left(\log_s \left(\frac{(n-1)(s-1)-1}{s-1}\right)^{\frac{s-1}{ns-n-s}} + \frac{(n-1)(s-1)}{(n-1)(s-1)-1} \right) \ < \ 1.$$

Из чисел, которые имеют вид $N = \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} - 2$ для разных значений n, можно составить последовательность

$N_1 = s-2,\ N_2 = \dfrac{(2s-3)\cdot s^3+s}{(s-1)^2} - 2,\ N_3 = \dfrac{(3s-4)\cdot s^4+s}{(s-1)^2} - 2,\ \dots$

$\dots, N_{n-1} = \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2} - 2,\ N_n = \dfrac{(ns-n-1)\cdot s^{n+1}+s}{(s-1)^2} - 2,\ \dots.$

Числа N, для которых $N \neq \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2} - 2$ для любых n, попадают в интервалы между соседними членами этой последовательности.

Так, число $N = \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2} - 2 + j$, где $0 < j < ns^n$, принадлежит интервалу $\big(N_{n-1},\ N_n\big)$ и параметр n находится по формуле

$$n = \left\lfloor \log_s \frac{s\cdot \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor,$$

а число $N = \dfrac{(ns-n-2s+1)\cdot s^{n-1}+s}{(s-1)^2} - 2 + j$, где $0 < j < (n-1)s^{n-1}$, принадлежит интервалу $\big(N_{n-2},\ N_{n-1}\big)$ и

$$n-1 = \left\lfloor \log_s \frac{s\cdot \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \log_s \frac{\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor.$$

Используя (23), число $N_{n-1} = \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2} - 2$, где $n > 2$, можно представить в следующем виде:

$$N_{n-1} = \frac{\big(n(s-1)-s\big)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} - 2$$
$$= \frac{\left(\left\lfloor \log_s \frac{s\cdot \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor (s-1) - s\right)\cdot s^{\left\lfloor \log_s \frac{s\cdot \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor} + s}{(s-1)^2} - 2.$$

Обозначим такое представление N_{n-1} через N^*.

Рассматривая $N = \dfrac{(ls-l-s)\cdot s^l+s}{(s-1)^2} - 2 + j$, где $0 < j < l\cdot s^l$, заключаем, что если $N \in \big(N_{n-2},\ N_{n-1}\big)$, то есть $N < N^*$, то параметр параметр l находится по формуле $l = \left\lfloor \log_s \frac{\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor$.

Если $N \in \big(N_{n-1},\ N_n\big)$, то есть $N \geq N^*$, то параметр l находится по формуле $l = \left\lfloor \log_s \frac{s\cdot \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor$

Следовательно, для числа $N = \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2} - 2 + j$, где $0 \leq j < ns^n$, удовлетворяющему неравенству (21), параметр n находится по формуле:

$$n = \begin{cases} \left\lfloor \log_s \dfrac{\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor, & \text{если } N < N^*; \\ \left\lfloor \log_s \dfrac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor, & \text{если } N \geq N^*. \end{cases}$$

Таким образом, доказано, что $n = m$.

Тогда, используя то, что $n = m$, с учетом (20) получим, что $T = \dfrac{s^m - s}{s-1} + r$. Следовательно, учитывая (22) имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} N &= \frac{(ms - m - s)\cdot s^m + s}{(s-1)^2} - 2 + mr - i = \frac{\big(m(s-1) - s\big)\cdot s^m + s}{(s-1)^2} - 2 + mr - i \\ &= \frac{m(s-1)\cdot s^m - m(s-1)\cdot s + m(s-1)\cdot s - s^{m+1} + s}{(s-1)^2} + mr - 2 - i \\ &= m\cdot\left(\frac{s^m - s}{s-1} + r\right) + \frac{-s^{m+1} + m(s-1)s + s}{(s-1)^2} - 2 - i \\ &= m\cdot T + \frac{-s^{m+1} + m(s-1)s + s}{(s-1)^2} - 2 - i, \end{aligned}$$

где $i = \overline{0, m-1}$ или $i = \overline{0, m-2}$.

Откуда получим, что

$$\begin{aligned} T &= \frac{(N+2)(s-1)^2 + s^{m+1} - m(s-1)s - s}{m(s-1)^2} + \frac{i}{m} \\ &= \left\lceil \frac{(N+2)(s-1)^2 + s^{m+1} - m(s-1)s - s}{m(s-1)^2} \right\rceil, \end{aligned}$$

поскольку $i \leq m-1$.

Очевидно, что для подобранного таким способом числа T (и соответствующего параметра m) неравенство (21) выполняется. Следовательно, $S = S_T(x_1, x_2, \ldots, x_T) \equiv 0 \ (mod\ R^{N+2})$ для любых $x_1, x_2, \ldots, x_T \in R$.

Лемма доказана. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы.

Нам понадобятся для доказательства теоремы одно из свойств стандартного полинома. Согласно [4] имеют место следующее равенство:

$$\begin{aligned} &S_T(x_1, x_2, \ldots, x_T) = \\ &\quad = \sum_{1\leq i<j\leq T} (-1)^{i+j-1}[x_i, x_j] S_{T-1}(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_T), \end{aligned} \tag{24}$$

где запись $\widehat{x_i}$ означает отсутствие элемента x_i в совокупности $x_1, \ldots, x_T$.

Заметим, что если $dim R^N/R^{N+1} = 2$, $dim R^{N+1}/R^{N+2} = 1$, то алгебра R либо нильпотентна индекса $(N+2)$, либо по предложению 1 [3] удовлетворяет перестановочным тождествам $p^{\sigma}_{N+2}(x_1, \ldots, x_{N+2}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{N+2}$, и, поэтому, с учетом леммы 6 алгебра R удовлетворяет и стандартному тождеству $S_T(x_1, x_2, \ldots, x_T) = 0$.

Поэтому далее считаем, что $dim R^N/R^{N+1} = dim R^{N+1}/R^{N+2} = 2$.

Если в записи элемента $S = S_T(x_1, x_2, \ldots, x_T)$ не встречается ни одного из порождающих c_m, $m = \overline{1, s-2}$, то согласно теореме в работе [4] алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству $S_{T_0}(x_1, x_2, \ldots, x_{T_0}) = 0$, где

$T_0 = \lceil \frac{N+2^{m+1}}{m} \rceil - 2$, параметр m вычисляется по формуле:

$$m = \begin{cases} \lfloor \log_2 \frac{N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor, & \text{если } N < \lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor 2^{\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor}; \\ \lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor, & \text{если } N \geq \lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor 2^{\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor}. \end{cases}$$

Поскольку функция $T = T(s)$ – неубывающая, что следует из процедуры построения числа T, то алгебра R, очевидно, удовлетворяет и стандартному тождеству $S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = 0$.

Предположим далее, что в записи элемента $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T)$ встречается хотя бы один из порождающих c_i, $i = \overline{1, s-2}$.

Тогда по лемме 6 все мономы элемента $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T)$ имеют длину от порождающих a, b, c_i, не меньшую, чем $N + 2$. Следовательно, по предложению 1 и следствию из предложения 2 (с учетом (24)), получим, что $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = 0$.

Второе утверждение теоремы очевидно ввиду предложения 1 и следствия из предложения 2.

Теорема доказана. $\square$

Замечание. Если $m \geq 3$, то для $N = \dfrac{(ms-m-s)\cdot s^m + s}{(s-1)^2} - 2 + mr$, где $1 \leq r < s^m$ (крайнее правое значение N столбца в вышеприведенных таблицах), найдется такая s-порожденная нильпотентная алгебра R над полем характеристики, не равной двум, с условием $dim R^N/R^{N+1} = 2$, которая не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени $(T-1)$.

Доказательство. Рассмотрим свободную алгебру $F\langle x_1, x_2, \dots x_s\rangle$ над полем F характеристики, не равной двум, в которой выберем идеал I, порожденный всеми словами длины не менее N, за исключением двух элементов x_1^N и $x_1^{N-1}x_2$.

Тогда фактор-алгебра $A = F\langle x_1, x_2, \dots x_s\rangle / I$ является s-порожденной нильпотентной индекса $(N+1)$ алгеброй над полем характеристики, не равной двум, с условием $dim A^N/A^{N+1} = 2$.

Предположим, что алгебра A удовлетворяет некоторому полилинейному тождеству $f(z_1, z_2, \ \dots \ , z_{T-1}) = 0$ степени $(T-1)$.

Обозначая образы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \dots, \overline{x_s}$ соответственно через $a, b, c_1, \dots, c_{s-2}$, подставим, как при доказательстве леммы 6, в $f(z_1, z_2, \ \dots \ , z_{T-1})$ вместо $z_1, z_2, \ \dots \ , z_{T-1}$ базисные элементы: сначала порождающие a, b, c_i, $1 \leq i \leq (s-2)$, затем слова длины 2 от порождающих a, b, c_i, образующие базис R^2 по модулю R^3, и так далее, получим, что

$$\min(deg f(z_1, z_2, \ \dots \ , z_{T-1})) = \frac{(ms-m-s)\cdot s^m + s}{(s-1)^2} + m\cdot(r-1) = N + 2 - m,$$

поскольку $N = \dfrac{(ms-m-s)\cdot s^m + s}{(s-1)^2} - 2 + mr$, где $r \geq 1$.

Таким образом, так как $m \geq 3$, можно подобрать такие $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \ \dots \ , \widetilde{z}_{T-1} \in A$, что $f(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \ \dots \ , \widetilde{z}_{T-1}) \notin A^N$.

Поскольку полином $f(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \ \dots \ , \widetilde{z}_{T-1})$ находится в "свободной" части алгебры A, то $f(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \ \dots \ , \widetilde{z}_{T-1}) \neq 0$, противоречие. $\square$

References

[1] E.P. Petrov, *Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition* $dim R^2/R^3 = 2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1052—1066. MR3580049

[2] E.P. Petrov, *Structure, defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition* $dim R^N/R^{N+1} = 2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 1153—1187. MR3744051

[3] E.P. Petrov, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, Algebra i Logika, **30**:5 (1991), 540–556. MR1202508

[4] L. H. Rowen, *Polynomial identities in ring theory*, New York – London: Academic Press, Inc., 1980. MR0576061

Evgeniy Petrovich Petrov
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: pep@email.asu.ru