S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1065–1079 (2018) УДК 517.977.56
DOI 10.17377/semi.2018.15.089 MSC 49J20

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ СИСТЕМЫ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

К.С. МУСАБЕКОВ

Abstract. In this paper the problem of optimal control of mathematical model of a non-adiabatic tubular reactor is considered. The proof of existence and uniqueness of the solution of the adjoint system in weight Hölder classes is carried out.

Keywords: mathematical model, chemical reactor, optimal control, functional, necessary condition of an optimality, maximum principle of Pontryagin, the adjoint system.

1. Введение

При выводе необходимого условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [1] возникает так называемая «сопряженная система», состоящая из линейных дифференциальных уравнений, доказательство существования и единственности решения которой требует специального исследования. В настоящей работе сопряженная система состоит из двух линейных параболических и линейного обыкновенного дифференциального уравнений.

Наиболее общие результаты, связанные с разрешимостью параболических систем в классах гладких функций, получены В.А. Солонниковым в работе [2]. В.С. Белоносов в работах [3, 4] исследовал существование и единственность решения таких систем при недостаточно гладких начальных данных и получил точные оценки решений в весовых гельдеровских классах.

В данной работе сопряженная система не удовлетворяет условию согласования начальных и граничных данных. Поэтому существование и единственность

Mussabekov, K.S., Existence and uniqueness of the solution of the adjoint system in one problem of optimal control.

Поступила 5 апреля 2017 г., опубликована 25 сентября 2018 г.

решения сопряженной системы доказываются в весовых гельдеровских классах.

2. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{x : 0 < x < 1\}$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T-$ фиксированное число. В области Q_T рассмотрим систему дифференциальных уравнений, являющуюся математической моделью неадиабатического трубчатого реактора [5]:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} - c \cdot v_1 \cdot f(v_2), \\ \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} = b \cdot \frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} + k \cdot v_1 \cdot f(v_2) + g \cdot (v_3(t) - v_2(x,t)), \\ \frac{dv_3(t)}{dt} = p \cdot (\int\limits_0^1 v_2(x,t)dx - v_3(t)) + u(t) \cdot (E - v_3(t)) \end{array}\right\} \quad (1)$$

с граничными

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot \frac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} - v_1(0,t) = -1, \frac{\partial v_1(1,t)}{\partial x} = 0, \\ b \cdot \frac{\partial v_2(0,t)}{\partial x} - v_2(0,t) = -1, \frac{\partial v_2(1,t)}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

и начальными условиями

$$v_1(x,0) = v_{10}(x), v_2(x,0) = v_{20}(x), v_3(0) = v_{30}, \quad (3)$$

где $f(v_2) = \exp(\Gamma - \Gamma / v_2(x,t))$; a, b, c, Γ, k, g, p, E, $v_{30}-$ константы, положительные параметры системы; $u(t)$ — управляющая функция (управление); $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$, $v_3(t)$ — функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно; при естественных предположениях о характере начальных данных и других параметров задачи в работе [6] доказана справедливость неравенства $v_2(x,t) \neq 0$, $(x,t) \in \overline{Q_T}$.

Здесь будут использованы обозначения функциональных пространств, принятые в работах [3],[4],[7]. Приведем еще некоторые обозначения:

$C_1[0,T]$ — банахово пространство непрерывных функций $v(t)$, заданных на $[0,T]$ и удовлетворяюших условию Липшица, с нормой

$\|v\|_{C_1} = \sup\limits_{0 \le t \le T} |v(t)| + \sup\limits_{t', t'' \in [0,T], t' \neq t''} \frac{|v(t') - v(t'')|}{|t' - t''|}$;

Множество допустимых управлений

$U_\partial = \{u(t) : 0 \le u(t) \le u_0 = const,\ u(t)$ — измеримая функция, $0 \le t \le T\}$.

Пусть s, r вещественные числа, причем $s \ge 0$. Прежде чем определить гельдеровские пространства, введем некоторые обозначения: $Q'_T = \bar{\Omega} \times (0,T]$, $\Delta^x_y v = v(x,t) - v(y,t)$, $\Delta^t_\tau v = v(x,t) - v(x,\tau)$.

$H^{s,\frac{s}{2}}(\overline{Q_T})$ -банахово пространство функций $v(x,t)$ имеющих непрерывные в $\overline{Q_T}$ производные $D^\mu_t D^\nu_x v(x,t)$, $2 \cdot \mu + \nu \le s$ и конечную норму

$$\|v\|^{Q_T}_s = \sum_{0 \le k \le [s]} [v]^{Q_T}_k + [v]^{Q_T}_{s,x} + [v]^{Q_T}_{\frac{s}{2},t}$$

где

$$[v]^{Q_T}_k = \sum_{2 \cdot \mu + \nu = k} \sup_{\overline{Q_T}} |D^\mu_t D^\nu_x v|;\ [v]^{Q_T}_{s,x} = \sum_{2 \cdot \mu + \nu = [s]} \sup_{x,y \in \Omega, 0 < t < T} |\Delta^x_y D^\mu_t D^\nu_x v| \cdot |x - y|^{[s]-s};$$

$$[v]^{Q_T}_{\frac{s}{2},t} = \sum_{0 < s - 2 \cdot \mu - \nu < 2} \sup_{x \in \Omega, 0 < t, \tau < T} |\Delta^t_\tau D^\mu_t D^\nu_x v| \cdot |t - \tau|^{-\frac{s - 2 \cdot \mu - \nu}{2}}.$$

$H_r^{s,\frac{s}{2}}(\overline{Q_T})$ -банахово пространство функций $v(x,t)$ имеющих непрерывные в Q'_T производные $D_t^\mu D_x^\nu v(x,t)$, $2\cdot\mu+\nu\le s$ и конечную норму

$$\|v\|_{r,s}^{Q_T}=[v]_{r,s}^{Q_T}+\sum_{r<k<s}|v|_{r,k}^{Q_T}+\|v\|_r^{Q_T},\ r\ge 0$$

и

$$\|v\|_{r,s}^{Q_T}=[v]_{r,s}^{Q_T}+\sum_{0\le k<s}|v|_{r,k}^{Q_T},\ r<0$$

где

$$[v]_{r,s}^{Q_T}=[v]_{r,s,x}^{Q_T}+[v]_{r,\frac{s}{2},t}^{Q_T};\ [v]_{r,s,t}^{Q_T}=\sup(\theta^{\frac{s-r}{2}}\cdot|\Delta_\tau^t D_t^\mu D_x^\nu v|\cdot|t-\tau|^{-\frac{s-2\cdot\mu-\nu}{2}});$$

$$[v]_{r,s,x}^{Q_T}=\sup(t^{\frac{s-r}{2}}\cdot|\Delta_y^x D_t^\mu D_x^\nu v|\cdot|x-y|^{[s]-s});$$

где r,s -нецелые, причем $r\le s$; $\theta=\min(t,\tau)$; верхняя грань берется в первом случае по всем $(x,t),(x,\tau)\in Q'_T$, $(x,t)\ne(x,\tau)$ и всем μ,ν таким, что $0<s-2\cdot\mu-\nu<2$, а во втором случае - по всем $(x,t),(y,t)\in Q'_T$ и $(x,t)\ne(y,t)$, $2\cdot\mu+\nu=[s]$;

$$|v|_{r,k}^{Q_T}=\sup_{(x,t)\in Q'_T,2\cdot\mu+\nu=k}(t^{\frac{k-r}{2}}\cdot|D_t^\mu D_x^\nu v|);$$

выражение $\|v\|_r^{Q_T}$ определяет норму в пространстве $H^{r,\frac{r}{2}}$. При $s=r$ пространство $H_r^{s,\frac{s}{2}}(\overline{Q_T})$ совпадает с $H^{s,\frac{s}{2}}(\overline{Q_T})$, соответственно и норма пространства $H_r^{s,\frac{s}{2}}(\overline{Q_T})$ переходит в норму пространства $H^{s,\frac{s}{2}}(\overline{Q_T})$.

Для сокращения записи пространств $H^{s,\frac{s}{2}}$, $H_r^{s,\frac{s}{2}}$ воспользуемся обозначением H^s, H_r^s. Если v не зависит от t, то величина $\|v\|_s^{Q_T}$ превращается в норму $\|v\|_s^\Omega$ в гельдеровском пространстве $C^s(\Omega)$.

При соответствующей гладкости начальных данных и выполнении условия согласования начальных и граничных данных

$$a\cdot\frac{dv_{10}(0)}{dx}-v_{10}(0)=-1,\ \frac{dv_{10}(1)}{dx}=0,\ b\cdot\frac{dv_{20}(0)}{dx}-v_{20}(0)=-1,\ \frac{dv_{20}(1)}{dx}=0$$

в работе [8] была доказана теорема существования и единственности решения

$$v_1(x,t),v_2(x,t)\in H^{2+\alpha}(\overline{Q_T}),v_3(t)\in C_1[0,T],\ 0<\alpha<1$$

системы (1)-(3) при произвольной функции $u(t)\in U_\partial$.

Введем функционал

$$J_A^\beta(u)=\int_0^T v_1(1,t)\,dt+A\int_0^T\int_0^1\Phi(v_2(x,t))\,dxdt+\frac{\beta}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt, \tag{4}$$

где $\int_0^T v_1(1,t)\,dt$ -суммарное за время T количество непрореагировавшего вещества на выходе реактора, A - постоянная величина (штрафной коэффициент), $\Phi(v_2)$ - штрафная функция,

$$\Phi(v_2)=\begin{cases}0, & \text{если } v_2\le v_2^*\\ (v_2-v_2^*)^2, & \text{если } v_2>v_2^*,\end{cases}$$

$\beta>0$ - числовой параметр.

Рассмотрим задачу минимизации функционала (4) при условиях (1)-(3) и следующем ограничении на управление $u(t)$:

$$u(t)\in U_\partial. \tag{5}$$

В работе [9] доказано существование оптимального управления в задаче (1)-(5).

Решения системы (1)-(3), при $u(t) \in U_\partial$, удовлетворяют следующим условиям [6]: если $0 \le v_{10}(x) \le 1$, $0 < v_{20}(x) \le b_3$, $v_{30} > 0$ для любой точки $x \in \bar{\Omega}$, то

$$0 \le v_1(x,t) \le 1, \delta \le v_2(x,t) \le b_1, \delta_1 \le v_3(t) \le b_2, \tag{6}$$

для любой точки $(x,t) \in \overline{Q_T}$, где $\delta, \delta_1, b_1, b_2, b_3$ -некоторые положительные постоянные числа, зависящие лишь от параметров системы и начальных условий задачи.

Для задачи (1)-(5) при выводе необходимого условия оптимальности в форме принципа максимума Л.С.Понтрягина осуществляется построение сопряженной системы:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\psi_1}{\partial t} = -a\cdot\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x} + (c\cdot\psi_1 - k\cdot\psi_2)\cdot f(v_2) + \varphi_1(x,t), \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t} = -b\cdot\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x} + (c\cdot\psi_1 - k\cdot\psi_2)\cdot v_1\cdot\frac{df(v_2)}{dv_2} + g\cdot\psi_2 - p\cdot\psi_3 \\ \qquad +\varphi_2(x,t), \\ \frac{d\psi_3}{dt} = -g\cdot\int\limits_0^1 \psi_2(x,t)dx + \psi_3\cdot(u+p) + \varphi_3(t) \end{array}\right\} \tag{7}$$

с граничными

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\psi_1(0,t)}{\partial x} = 0,\ a\cdot\frac{\partial\psi_1(1,t)}{\partial x} + \psi_1(1,t) = -1, \\ \frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x} = 0,\ b\cdot\frac{\partial\psi_2(1,t)}{\partial x} + \psi_2(1,t) = 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

и конечными условиями

$$\psi_1(x,T) = 0, \psi_2(x,T) = 0, \psi_3(T) = 0, \tag{9}$$

где $\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t), \varphi_3(t)$-заданные в $\overline{Q_T}$ функции.

Для доказательства существования и единственности решения этой системы перейдем к новой временной переменной $T-t$ и в результате получим следующую систему:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\psi_1}{\partial t} = a\cdot\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} - (c\cdot\psi_1 - k\cdot\psi_2)\cdot f(v_2) - \varphi_1(x,t), \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t} = b\cdot\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - (c\cdot\psi_1 - k\cdot\psi_2)\cdot v_1\cdot\frac{df(v_2)}{dv_2} - g\cdot\psi_2 + p\cdot\psi_3 \\ \qquad -\varphi_2(x,t), \\ \frac{d\psi_3}{dt} = g\cdot\int\limits_0^1 \psi_2(x,t)dx - \psi_3\cdot(u+p) - \varphi_3(t) \end{array}\right\} \tag{10}$$

с граничными

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\psi_1(0,t)}{\partial x} = 0,\ a\cdot\frac{\partial\psi_1(1,t)}{\partial x} + \psi_1(1,t) = -1, \\ \frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x} = 0,\ b\cdot\frac{\partial\psi_2(1,t)}{\partial x} + \psi_2(1,t) = 0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

и начальными условиями

$$\psi_1(x,0) = 0, \psi_2(x,0) = 0, \psi_3(0) = 0. \tag{12}$$

Систему уравнений (10)-(12) запишем в матричной форме. Для этого введем следующие обозначения:

$$a_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -c\cdot f(v_2) & k\cdot f(v_2) \\ -c\cdot v_1\cdot\frac{df(v_2)}{dv_2} & k\cdot v_1\cdot\frac{df(v_2)}{dv_2} - g \end{pmatrix},$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi(x,t)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,t)\\ \psi_2(x,t)\end{pmatrix},\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\varphi(x,t)=\begin{pmatrix}-\varphi_1(x,t)\\ -\varphi_2(x,t)\end{pmatrix}.$$

С учетом этих обозначений система (10)-(12) примет вид

$$\left.\begin{aligned}&-D_t\psi+a_0\cdot D_x^2\psi+a_1\cdot D_x\psi+a_2\cdot\psi+a_3\cdot\psi_3+\varphi=\mathbf{0},\\ &-D_t\psi_3+g\cdot\int\limits_0^1\psi_2(x,t)dx-(u+p)\cdot\psi_3-\varphi_3(t)=0,\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

с граничными

$$D_x\psi(0,t)=\mathbf{0},\ a_0\cdot D_x\psi(1,t)+\psi(1,t)=a_4,\tag{14}$$

и начальными условиями

$$\psi(x,0)=\mathbf{0},\psi_3(0)=0.\tag{15}$$

В линейной системе дифференциальных уравнений (13)-(15), функции

$$\varphi_1(x,t),\varphi_2(x,t)\in H^\alpha(\overline{Q_T}),\varphi_3(t)\in L_\infty(0,T),$$

а функция $\psi_1(x,t)$ не удовлетворяет условию согласования начальных и граничных данных в точке $x=1$. Поэтому доказательство существования и единственности решения системы (13)-(15) осуществляется с привлечением гельдеровских пространств с весовыми нормами [3, 4].

3. Существование решения сопряженной системы на малом промежутке времени.

Рассмотрим прямоугольник $Q_{t_1}=\Omega\times(0,t_1)$, где $0<t_1<T$. Очевидно, что $Q_{t_1}\subset Q_T$.Будем считать, что $t_1<1$.

Лемма 1. *Если* $\varphi_1(x,t),\varphi_2(x,t)\in H^\alpha(\overline{Q_{t_1}})$, $\varphi_3(t)\in L_\infty(0,t_1)$, $(0<\alpha<1)$ *то при малом* t_1, *система уравнений (13)-(15) имеет решение* $\psi_1(x,t),\psi_2(x,t)\in H_\alpha^{2+\alpha}(\overline{Q_{t_1}})$, $\psi_3(t)\in C_1[0,t_1]$.

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений (МПП). В качестве начального приближения рассмотрим функции $\psi^0(x,t)\equiv 0$, $\psi_3^0(t)\equiv 0$, где $(x,t)\in Q_{t_1}$. Алгоритм МПП можно представить следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}&-D_t\psi^{n+1}+a_0\cdot D_x^2\psi^{n+1}+a_1\cdot D_x\psi^{n+1}+a_2\cdot\psi^{n+1}+a_3\cdot\psi_3^{n+1}+\varphi\\ &\qquad=\mathbf{0},\\ &-D_t\psi_3^{n+1}+g\cdot\int\limits_0^1\psi_2^n(x,t)dx-(u+p)\cdot\psi_3^{n+1}-\varphi_3(t)=0,\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

с граничными

$$D_x\psi^{n+1}(0,t)=\mathbf{0},\ a_0\cdot D_x\psi^{n+1}(1,t)+\psi^{n+1}(1,t)=a_4,\tag{17}$$

и начальными условиями

$$\psi^{n+1}(x,0)=\mathbf{0},\ \psi_3^{n+1}(0)=0\tag{18}$$

$n=0,1,2,\ldots$.

Предположим, что $\varphi(x,t)\in H^\alpha(\overline{Q_{t_1}}),\varphi_3(t)\in L_\infty(0,t_1)$. Если $\psi_2^n(x,t)\in H_\alpha^{2+\alpha}(\overline{Q_{t_1}})$, то решение второго уравнения системы (16) существует в силу теоремы Каратеодори [10] и $\psi_3^{n+1}(t)\in C_1[0,t_1]$. Тогда в силу работ [3, 4] система (16)-(18) имеет единственное решение

$$\psi^{n+1}(x,t)\in H_\alpha^{2+\alpha}(\overline{Q_{t_1}}),\psi_3^{n+1}(t)\in C_1[0,t_1].$$

Чтобы доказать сходимость построенных последовательностей

$$\{\psi_1^n(x,t), \psi_2^n(x,t), \psi_3^n(t)\}$$

в пространстве $H_\alpha^{2+\alpha}(\overline{Q_{t_1}}) \times H_\alpha^{2+\alpha}(\overline{Q_{t_1}}) \times C_1[0,t_1]$, установим справедливость следующих оценок

$$\|\psi^{n+1}(x,t) - \psi^n(x,t)\|_{\alpha,2+\alpha}^{Q_{t_1}} \leq M_1(t_1) \cdot \|\psi^n(x,t) - \psi^{n-1}(x,t)\|_{\alpha,2+\alpha}^{Q_{t_1}}, \qquad (19)$$

$$\|\psi_3^{n+1}(t) - \psi_3^n(t)\|_{\frac{\alpha}{2}}^{(0,t_1)} \leq M_1(t_1) \cdot \|\psi_3^n(t) - \psi_3^{n-1}(t)\|_{\frac{\alpha}{2}}^{(0,t_1)}, \qquad (20)$$

где $M_1(t_1)$-некоторая постоянная, не зависящая от $\psi^n(x,t), \psi_3^n(t)$, а зависящая лишь от t_1 и данных системы (13)-(15).

Обозначим $\omega^{n+1}(x,t) = \psi^{n+1}(x,t) - \psi^n(x,t), \omega_3^{n+1}(t) = \psi_3^{n+1}(t) - \psi_3^n(t)$, $n = 0,1,2,...$, $\omega(x,t) = (\omega_1(x,t), \omega_2(x,t))'$. В данной работе такой штрих означает операцию транспонирования вектор-строки.

Тогда функции $\omega^{n+1}(x,t), \omega_3^{n+1}(t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} -D_t\omega^{n+1} + a_0 \cdot D_x^2\omega^{n+1} + a_1 \cdot D_x\omega^{n+1} + a_2 \cdot \omega^{n+1} + a_3 \cdot \omega_3^{n+1} = \mathbf{0}, \\ -D_t\omega_3^{n+1} + g\int\limits_0^1 \omega_2^n(x,t)dx - (u+p) \cdot \omega_3^{n+1} = 0, \end{array}\right\} \qquad (21)$$

с граничными

$$D_x\omega^{n+1}(0,t) = \mathbf{0},\ a_0 \cdot D_x\omega^{n+1}(1,t) + \omega^{n+1}(1,t) = \mathbf{0}, \qquad (22)$$

и начальными условиями

$$\omega^{n+1}(x,0) = \mathbf{0}, \omega_3^{n+1}(0) = 0 \qquad (23)$$

$(n = 1,2,...)$.

Рассмотрим второе уравнение системы (21). Из явного вида решения этого обыкновенного дифференциального уравнения нетрудно получить следующее неравенство

$$\|\omega_3^{n+1}\|_{C[0,t_1]} \leq g \cdot t_1 \cdot \|\omega_2^n\|_{C(\overline{Q_{t_1}})}. \qquad (24)$$

Рассмотрим выражение

$$\omega_3^{n+1}(t) = \int\limits_0^t \frac{d\omega_3^{n+1}(\tau)}{d\tau}d\tau = \int\limits_0^t [g \cdot \int\limits_0^1 \omega_2^n(x,\tau)dx - (p+u) \cdot \omega_3^{n+1}]d\tau.$$

Оценим полунорму

$$[\omega_3^{n+1}]_{\frac{\alpha}{2}}^{(0,t_1)} = \sup_{t',t'' \in [0,t_1]} \frac{|\omega_3^{n+1}(t') - \omega_3^{n+1}(t'')|}{|t'-t''|^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Для этого при $t', t'' \in [0,t_1],\ t' \neq t''$ рассмотрим выражения

$$\frac{|\omega_3^{n+1}(t') - \omega_3^{n+1}(t'')|}{|t'-t''|^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{|t'-t''|^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot |\int\limits_{t'}^{t''} [g \cdot \int\limits_0^1 \omega_2^n(x,\tau)dx - (p+u) \cdot \omega_3^{n+1}]d\tau|$$

$$\leq \frac{1}{|t'-t''|^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot [g + (p+u_0) \cdot g \cdot t_1] \cdot \|\omega_2^n\|_{C(\overline{Q_{t_1}})} \cdot |t'-t''|$$

$$= [g + (p+u_0) \cdot g \cdot t_1] \cdot \|\omega_2^n\|_{C(\overline{Q_{t_1}})} \cdot |t'-t''|^{1-\frac{\alpha}{2}} \leq c_1 \cdot \|\omega_2^n\|_{C(\overline{Q_{t_1}})} \cdot t_1^{1-\frac{\alpha}{2}},$$

т.е.

$$[\omega_3^{n+1}]_{\frac{\alpha}{2}}^{(0,t_1)} \leq t_1^{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot c_1 \cdot \|\omega_2^n\|_{C(\overline{Q_{t_1}})}. \qquad (25)$$

Здесь и в дальнейшем, через c_1 будем обозначать всевозможные положительные константы, точные значения которых для нас несущественны. Из (24) и (25) следует, что норма функции $\omega_3^{n+1}(t)$ в $C^{\frac{\alpha}{2}}[0,t_1]$ оценивается неравенством

$$\|\omega_3^{n+1}\|_{\frac{\alpha}{2}}^{(0,t_1)} \le c_1 \cdot t_1^{\gamma} \cdot \|\omega^n\|_{C(\overline{Q_{t_1}})}. \tag{26}$$

где $\gamma = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Для первого уравнения системы (21), в силу работы [2] здесь имеем

$$\|\omega^{n+1}\|_{2+\alpha}^{Q_{t_1}} \le c_1 \cdot \|\omega_3^{n+1}\|_{\frac{\alpha}{2}}^{(0,t_1)}.$$

Из последних двух неравенств имеем следующие два неравенства

$$\|\omega_3^{n+1}\|_{\frac{\alpha}{2}}^{(0,t_1)} \le c_1^2 \cdot t_1^{\gamma} \cdot \|\omega_3^n\|_{\frac{\alpha}{2}}^{(0,t_1)}, \tag{27}$$

$$\|\omega^{n+1}\|_{2+\alpha}^{Q_{t_1}} \le c_1^2 \cdot t_1^{\gamma} \cdot \|\omega^n\|_{2+\alpha}^{Q_{t_1}}, n = 2, 3, \dots. \tag{28}$$

Сравнивая неравенства (19),(20) и (27),(28), обозначим $M_1(t_1) = c_1^2 \cdot t_1^{\gamma}$.

Рассмотрим ряды

$$\omega^1(x,t) + \omega^2(x,t) + \cdots + \omega^n(x,t) + \cdots, \tag{29}$$

$$\omega_3^1(t) + \omega_3^2(t) + \cdots + \omega_3^n(t) + \cdots. \tag{30}$$

В ряде (29) первое слагаемое $\omega^1(x,t) \in H_\alpha^{2+\alpha}(\overline{Q_{t_1}})$, а все остальные слагаемые принадлежат пространству $H^{2+\alpha}(\overline{Q_{t_1}})$. Частичные суммы этих рядов имеют вид

$$\omega^1(x,t) + \omega^2(x,t) + \cdots + \omega^n(x,t) = \psi^n(x,t),$$

$$\omega_3^1(t) + \omega_3^2(t) + \cdots + \omega_3^n(t) = \psi_3^n(t).$$

В силу неравенств (27)-(28) функциональные ряды (29) и (30), начиная со второго члена, мажорируются следующими числовыми рядами:

$$\|\omega^2\|_{2+\alpha}^{Q_{t_1}} \cdot [1 + c_1^2 \cdot t_1^{\gamma} + (c_1^2 \cdot t_1^{\gamma})^2 + \cdots + (c_1^2 \cdot t_1^{\gamma})^n + \cdots]. \tag{31}$$

$$\|\omega_3^2\|_{\frac{\alpha}{2}}^{(0,t_1)} \cdot [1 + c_1^2 \cdot t_1^{\gamma} + (c_1^2 \cdot t_1^{\gamma})^2 + \cdots + (c_1^2 \cdot t_1^{\gamma})^n + \cdots]. \tag{32}$$

Подбирая малые значения $t_1 > 0$ можно добиться выполнения неравенства $|c_1^2 \cdot t_1^{\gamma}| < 1$. Таким образом, для выбранного значения t_1 числовые ряды (31),(32) являются сходящимися. Но это означает равномерную сходимость ряда (29) в $H_\alpha^{2+\alpha}(\overline{Q_{t_1}})$, а ряда (30) в $C^{\frac{\alpha}{2}}[0,t_1]$. Тогда последовательности $\{\psi^n(x,t)\}, \{\psi_3^n(t)\}$ сходятся равномерно к функциям $\psi(x,t), \psi_3(t)$. Поэтому имеем сходимость

$$\psi^n(x,t) \to \psi(x,t)$$

по норме пространства $H_\alpha^{2+\alpha}(\overline{Q_{t_1}})$, и сходимость $\psi_3^n(t) \to \psi_3(t)$ по норме пространства $C^{\frac{\alpha}{2}}[0,t_1]$ при $n \to \infty$. Следовательно последовательности $\{\psi_1^n(x,t)$, $\psi_2^n(x,t)$, $\psi_3^n(t)\}$ будут сходится к решению $\psi_1(x,t), \psi_2(x,t), \psi_3(t)$ системы (13)-(15), в пространстве $H_\alpha^{2+\alpha}(\overline{Q_{t_1}}) \times H_\alpha^{2+\alpha}(\overline{Q_{t_1}}) \times C_1[0,t_1]$. Лемма 1 доказана. $\square$

4. Интегральные оценки решений сопряженной системы.

Теперь получим интегральные оценки решений сопряженной системы, которые в дальнейшем будут использованы при доказательстве единственности решений и в других случаях.

Граничное условие функции $\psi_1(x,t)$ в точке $x = 1$, примем в следующем виде

$$a \cdot \frac{\partial \psi_1(1,t)}{\partial x} + \psi_1(1,t) = -q, \ q = const \geq 0.$$

В дальнейшем будет доказано, что при $q \neq 0$ имеем систему (13)-(15), решение которой $\psi_1(x,t) \in H_{\alpha}^{2+\alpha}(\overline{Q_T})$, $\psi_2(x,t) \in H^{2+\alpha}(\overline{Q_T})$, $\psi_3(t) \in C_1[0,T]$, а при $q = 0$ функция $\psi_1(x,t)$ удовлетворяет условию согласования начальных и граничных данных, поэтому решение системы (13)-(15) удовлетворяет условию: $\psi_1(x,t)$, $\psi_2(x,t) \in H^{2+\alpha}(\overline{Q_T})$, $\psi_3(t) \in C_1[0,T]$.

Граничные условия сведем к однородным. Для этого введем в рассмотрение функцию $\bar{\psi}_1(x,t) = \psi_1(x,t) + q$. Тогда система (13)-(15) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &-D_t\bar{\psi} + a_0 \cdot D_x^2\bar{\psi} + a_1 \cdot D_x\bar{\psi} + a_2 \cdot \bar{\psi} + a_3 \cdot \psi_3 + \bar{\varphi} = 0, \\ &-D_t\psi_3 + g \cdot \int_0^1 \psi_2(x,t)dx - (u+p) \cdot \psi_3 - \varphi_3(t) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

с граничными

$$D_x\bar{\psi}(0,t) = 0, \ a_0 \cdot D_x\bar{\psi}(1,t) + \bar{\psi}(1,t) = 0, \tag{34}$$

и начальными условиями

$$\bar{\psi}(x,0) = \bar{z}, \psi_3(0) = 0 \tag{35}$$

где

$$\bar{\psi}(x,t) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1(x,t) \\ \psi_2(x,t) \end{pmatrix}, \bar{\varphi}(x,t) = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1(x,t) \\ \bar{\varphi}_2(x,t) \end{pmatrix}, \bar{z} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\varphi}_1(x,t) = -\varphi_1(x,t) + q \cdot c \cdot f(v_2), \ \bar{\varphi}_2 = -\varphi_2(x,t) + q \cdot c \cdot v_1 \cdot \frac{df(v_2)}{dv_2}.$$

Обозначения матриц $a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3$ введены ранее.

Лемма 2. *Если $\bar{\psi}(x,t) \in H_{\alpha}^{2+\alpha}(\overline{Q_T})$, $(0 < \alpha < 1)$, $\psi_3(t) \in C_1[0,T]$ -решение системы (33)-(35), то справедливы неравенства*

$$\int_0^1 |\bar{\psi}(x,\tau)|^2 dx + \int_0^\tau\int_0^1 |\bar{\psi}|^2 dxdt + \int_0^\tau\int_0^1 |\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}|^2 dxdt$$
$$\leq M_1(T) \cdot [\|\psi_3\|^2_{2,(0,\tau)} + q^2 + \|\bar{\varphi}\|^2_{2,Q_T}], \tag{36}$$

$$\int_0^1 |\psi_2(x,\tau)|dx \leq M_2(T) \cdot [\|\psi_3\|_{C[0,\tau]} + q + \|\bar{\varphi}\|_{2,Q_T}], \tag{37}$$

$$\|\psi_3\|_{C[0,\tau]} \leq M_3(T) \cdot [q + \|\bar{\varphi}\|_{2,Q_T} + \|\varphi_3\|_{L_1(0,T)}], \tag{38}$$

где M_1, M_2, M_3-некоторые положительные постоянные, не зависящие от решений системы, от времени τ, а зависящие лишь от данных задачи и от T; $\|\cdot\|_{2,Q_\tau}$-норма в пространстве $L_2(Q_\tau)$; $0 < \tau \leq T$.

Доказательство. Умножив первое уравнение системы (33) скалярно на $e^{-\theta\cdot t}\cdot\bar{\psi}(x,t)$ и проинтегрировав по области $Q_\tau=\Omega\times(0,\tau)$, имеем

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1[-(D_t\bar{\psi},\bar{\psi})+(a_0\cdot D_x^2\bar{\psi},\bar{\psi})+(a_1\cdot D_x\bar{\psi},\bar{\psi})+(a_2\cdot\bar{\psi},\bar{\psi})]\cdot e^{-\theta\cdot t}dxdt$$

$$=\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1[-(a_3\cdot\psi_3,\bar{\psi})-(\bar{\varphi},\bar{\psi})]\cdot e^{-\theta\cdot t}dxdt.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^1 e^{-\theta\cdot\tau}\cdot|\bar{\psi}(x,\tau)|^2dx+\theta\cdot\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 e^{-\theta\cdot t}\cdot|\bar{\psi}|^2dxdt+\int\limits_0^\tau|\bar{\psi}(1,t)|^2\cdot e^{-\theta\cdot t}dt$$

$$+2\cdot\bar{a}\cdot\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1|\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}|^2\cdot e^{-\theta\cdot t}dxdt$$

$$+\int\limits_0^\tau|\bar{\psi}(0,t)|^2\cdot e^{-\theta\cdot t}dt\le 2\cdot\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1|(a_2\cdot\bar{\psi},\bar{\psi})|\cdot e^{-\theta\cdot t}dxdt+q^2$$

$$+2\cdot\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1(a_3\cdot\psi_3,\bar{\psi})\cdot e^{-\theta\cdot t}dxdt+2\cdot\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1(\bar{\varphi},\bar{\psi})\cdot e^{-\theta\cdot t}dxdt,\tag{39}$$

где $\bar{a}=\min\{a,b\}$.

В силу неравенств (6) здесь имеем

$$|(a_2\cdot\bar{\psi},\bar{\psi})|\le c_1\cdot|\bar{\psi}|^2.\tag{40}$$

Используя неравенство $2\cdot a\cdot b\le\epsilon\cdot a^2+\frac{b^2}{\epsilon}$, $\epsilon>0$ оценим третье и четвертое слагаемые из правой части (39)

$$2\cdot\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 e^{-\theta\cdot t}\cdot[(a_3\cdot\psi_3,\bar{\psi})+(\bar{\varphi},\bar{\psi})]dxdt\le 2\cdot\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 e^{-\theta\cdot t}[|a_3\cdot\psi_3|\cdot|\bar{\psi}|+|\bar{\varphi}|\cdot|\bar{\psi}|]dxdt$$

$$\le\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 e^{-\theta\cdot t}[2\cdot\epsilon\cdot|\bar{\psi}|^2+\frac{p^2}{\epsilon}\cdot|\psi_3|^2+\frac{1}{\epsilon}\cdot|\bar{\varphi}|^2]dxdt.$$

С учетом последних двух неравенств соотношение (39) примет вид

$$\int\limits_0^1 e^{-\theta\cdot\tau}|\bar{\psi}(x,\tau)|^2dx+(\theta-2\cdot c_1-2\cdot\epsilon)\cdot\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 e^{-\theta\cdot t}\cdot|\bar{\psi}|^2dxdt+\int\limits_0^\tau e^{-\theta\cdot t}\cdot|\bar{\psi}(1,t)|^2dt$$

$$+2\cdot\bar{a}\cdot\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 e^{-\theta\cdot t}|\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}|^2dxdt+\int\limits_0^\tau e^{-\theta\cdot t}\cdot|\bar{\psi}(0,t)|^2dt$$

$$\le\frac{p^2}{\epsilon}\cdot\int\limits_0^\tau e^{-\theta\cdot t}\cdot|\psi_3|^2dt+q^2+\frac{1}{\epsilon}\cdot\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 e^{-\theta\cdot t}|\bar{\varphi}|^2dxdt.$$

Выбирая малое $\epsilon > 0$ и достаточно большое $\theta > 0$, из последнего неравенства получим следующее неравенство

$$\int_0^1 |\bar{\psi}(x,\tau)|^2 dx + \int_0^\tau \int_0^1 |\bar{\psi}|^2 dxdt + \int_0^\tau |\bar{\psi}(1,t)|^2 dt + \int_0^\tau \int_0^1 |\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}|^2 dxdt + \int_0^\tau |\bar{\psi}(0,t)|^2 dt$$

$$\leq c_1(T) \cdot [\int_0^\tau |\psi_3|^2 dt + q^2 + \int_0^\tau \int_0^1 |\bar{\varphi}|^2 dxdt]. \tag{41}$$

Обозначим $M_1(T) = c_1(T)$. Следовательно, выполняется неравенство (36). Отсюда получим

$$\int_0^1 |\bar{\psi}(x,\tau)|^2 dx \leq c_1 \cdot [\int_0^\tau |\psi_3|^2 dt + q^2 + \int_0^\tau \int_0^1 |\bar{\varphi}|^2 dxdt].$$

С учетом последнего неравенства имеем

$$\int_0^1 |\psi_2(x,\tau)| dx \leq \sqrt{\int_0^1 |\psi_2(x,\tau)|^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^1 |\bar{\psi}(x,\tau)|^2 dx}$$

$$\leq c_1 \cdot [\|\psi_3\|_{C[0,\tau]} + q + \|\bar{\varphi}\|_{2,Q_T}].$$

Таким образом, имеем

$$\int_0^1 |\psi_2(x,\tau)| dx \leq c_1(T) \cdot [\|\psi_3\|_{C[0,\tau]} + q + \|\bar{\varphi}\|_{2,Q_T}]. \tag{42}$$

Обозначая $M_2(T) = c_1$, получим неравенство (37).

Обыкновенное дифференциальное уравнение системы (33) запишем в следующем виде

$$\psi_3(\tau) = g \cdot \int_0^\tau \int_0^1 \psi_2(x,t) dxdt - \int_0^\tau (u+p) \cdot \psi_3(t) dt - \int_0^\tau \varphi_3(t) dt.$$

Поэтому

$$|\psi_3(\tau)| \leq g \cdot \int_0^\tau \int_0^1 |\psi_2(x,t)| dxdt + (u_0 + p) \int_0^\tau |\psi_3(t)| dt + \int_0^\tau |\varphi_3(t)| dt.$$

Используя оценку (42), из последнего неравенства получим

$$\|\psi_3\|_{C[0,\tau]} \leq (g \cdot c_1 + u_0 + p) \int_0^\tau \|\psi_3(t)\|_{C[0,t]} dt + c_1 \cdot (q + \|\bar{\varphi}\|_{2,Q_T} + \|\varphi_3\|_{L_1(0,T)}).$$

В силу неравенства Гронуолла здесь имеем

$$\|\psi_3\|_{C[0,\tau]} \leq c_1(T) \cdot (q + \|\bar{\varphi}\|_{2,Q_T} + \|\varphi_3\|_{L_1(0,T)}). \tag{43}$$

Обозначая $M_3(T) = c_1(T)$, получим неравенство (38). Лемма 2 доказана. $\square$

5. Единственность решения сопряженной системы.

Лемма 3. *Если при* $\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t) \in H^{\alpha}(\overline{Q_T}), (0 < \alpha < 1), \varphi_3(t) \in L_\infty(0,T)$, *решение* $\psi_1(x,t), \psi_2(x,t) \in H^{2+\alpha}_{\alpha}(\overline{Q_T})$, $\psi_3(t) \in C_1[0,T]$ *системы дифференциальных уравнений (13)-(15) существует, то оно будет единственным.*

Доказательство. Допустим, что система (13)-(15) имеет два решения $(\psi_1^1(x,t), \psi_2^1(x,t), \psi_3^1(t))$, $(\psi_1^2(x,t), \psi_2^2(x,t), \psi_3^2(t))$, где $\psi_1^1(x,t)$,$\psi_2^1(x,t)$,$\psi_1^2(x,t)$,$\psi_2^2(x,t) \in H^{2+\alpha}_{\alpha}(\overline{Q_T})$, $\psi_3^1(t)$,$\psi_3^2(t) \in C_1[0,T]$. Обозначим $\omega_i = \psi_i^1 - \psi_i^2$, $i = 1,2,3$. Тогда функции $\omega_1(x,t)$,$\omega_2(x,t)$, $\omega_3(t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &-D_t\omega + a_0 \cdot D_x^2\omega + a_1 \cdot D_x\omega + a_2 \cdot \omega + a_3 \cdot \omega_3 = 0, \\ &-D_t\omega_3 + g \cdot \int_0^1 \omega_2(x,t)dx - (u+p) \cdot \omega_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$D_x\omega(0,t) = 0,\ a_0 \cdot D_x\omega(1,t) + \omega(1,t) = 0, \tag{45}$$

$$\omega(x,0) = 0,\ \omega_3(0) = 0. \tag{46}$$

В силу работы [2], первое уравнение системы (44)-(46) имеет единственное решение $\omega(x,t) \in H^{2+\alpha}(\overline{Q_T})$ и выполняется неравенство

$$\|\omega\|^{Q_T}_{2+\alpha} \le c_1 \cdot \|\omega_3\|^{(0,T)}_{\frac{\alpha}{2}}. \tag{47}$$

Воспользуемся неравенствами леммы 2. Для системы (44)-(46) имеем $q = 0$, $\bar\varphi(x,t) \equiv 0$, $\varphi_3(t) \equiv 0$, $z = 0$, $(x,t) \in Q_T$. Поэтому, в силу неравенства (38) имеем $\omega_3(t) \equiv 0$, $0 \le t \le T$. В силу неравенства (47) здесь имеем $\|\omega\|^{Q_T}_{2+\alpha} = 0$. Следовательно

$$\psi_1^1(x,t) \equiv \psi_1^2(x,t),\ \psi_2^1(x,t) \equiv \psi_2^2(x,t),\ \psi_3^1(t) \equiv \psi_3^2(t),\ (x,t) \in \overline{Q_T}.$$

Лемма 3 доказана. □

6. Существование решения сопряженной системы на заданном промежутке времени.

Обозначим $Q_{(t_1,T)} = \Omega \times (t_1,T)$. Теперь докажем существование решения системы дифференциальных уравнений (13)-(15) в области $\overline{Q_{(t_1,T)}}$. В качестве начальных данных системы (13)-(15) в области $\overline{Q_{(t_1,T)}}$ примем значения решения $\psi_1(x,t), \psi_2(x,t), \psi_3(t)$, полученного в лемме 1, при $t = t_1$, т.е. $\psi_1(x,t_1) = z_1(x)$, $\psi_2(x,t_1) = z_2(x)$, $\psi_3(t_1) = z_3$. В силу работы [3], функция $z(x) \in H^{2+\alpha}[0,1]$, (где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))'$), и выполнены условия согласования начальных и граничных данных:

$$D_xz(0) = 0,\ a_0 \cdot D_xz(1) + z(1) = a_4. \tag{48}$$

В силу работы [3] и леммы 1 имеем следующую оценку

$$\|z\|^{\Omega}_{2+\alpha} + |z_3| \le c_1(t_1), \tag{49}$$

где $c_1(t_1)$ -постоянная, зависящая от α, t_1 и от данных задачи, и не зависящая от решения системы.

Значения граничных и начальных условий сведем к нулевым. Для этого введем новые функций: $\widetilde{\psi_i}(x,t) = \psi_i(x,t) - z_i(x),\ i = 1,2;\ \widetilde{\psi_3}(t) = \psi_3(t) - z_3$. Тогда система уравнений (13)-(15) в области $\overline{Q_{(t_1,T)}}$ примет вид

$$\left.\begin{array}{l} -D_t\widetilde{\psi} + a_0 \cdot D_x^2\widetilde{\psi} + a_1 \cdot D_x\widetilde{\psi} + a_2 \cdot \widetilde{\psi} + a_3 \cdot \widetilde{\psi_3} + \widetilde{\varphi} = \mathbf{0}, \\ -D_t\widetilde{\psi_3} + g \cdot \int\limits_0^1 \widetilde{\psi}_2(x,t)dx - (u+p) \cdot \widetilde{\psi_3} + \widetilde{\varphi_3}(t) = 0, \end{array}\right\} \tag{50}$$

с граничными

$$D_x\widetilde{\psi}(0,t) = \mathbf{0},\ a_0 \cdot D_x\widetilde{\psi}(1,t) + \widetilde{\psi}(1,t) = \mathbf{0}, \tag{51}$$

и начальными условиями

$$\widetilde{\psi}(x,t_1) = \mathbf{0}, \widetilde{\psi_3}(t_1) = 0. \tag{52}$$

где

$$\widetilde{\psi}(x,t) = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi_1}(x,t) \\ \widetilde{\psi_2}(x,t) \end{pmatrix}, \widetilde{\varphi}(x,t) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi_1}(x,t) \\ \widetilde{\varphi_2}(x,t) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\varphi_1}(x,t) = -\varphi_1(x,t) + a \cdot \frac{d^2 z_1}{dx^2} + \frac{dz_1}{dx} - (c \cdot z_1 - k \cdot z_2) \cdot f(v_2),$$

$$\widetilde{\varphi_2}(x,t) = -\varphi_2(x,t) + b \cdot \frac{d^2 z_2}{dx^2} + \frac{dz_2}{dx} - (c \cdot z_1 - k \cdot z_2) \cdot v_1 \cdot \frac{df(v_2)}{dv_2} - g \cdot z_2 + p \cdot z_3,$$

$$\widetilde{\varphi_3}(t) = -\varphi_3(t) + g \cdot \int\limits_0^1 z_2(x)dx - (u+p) \cdot z_3.$$

Рассмотрим число τ удовлетворяющее неравенству $0 < t_1 < \tau \leq T$.

Лемма 4. *Пусть* $\widetilde{\psi}(x,t) \in H^{2+\alpha}(\overline{Q_{(t_1,\tau)}})$, $\widetilde{\psi_3}(t) \in C_1[t_1,\tau]$ *решение системы (50)-(52), при фиксированных* $\widetilde{\varphi}(x,t) \in H^{\alpha}(\overline{Q_{(t_1,\tau)}})$, $\widetilde{\varphi_3}(t) \in L_\infty(t_1,\tau)$. *Тогда*

$$\|\widetilde{\psi}\|_{2+\alpha}^{Q_{(t_1,\tau)}} \leq c_1(T),$$

где $c_1(T)$ *-постоянная зависящая от* α, T *и от данных задачи, и не зависящая от решения системы.*

Доказательство. В силу работы [2] решение $\widetilde{\psi}(x,t)$ первого уравнения системы (50)-(52) в области $\overline{Q_{(t_1,\tau)}}$ удовлетворяет неравенству

$$\|\widetilde{\psi}\|_{2+\alpha}^{Q_{(t_1,\tau)}} \leq c_1(\tau) \cdot (\|\widetilde{\varphi}\|_{\alpha}^{Q_{(t_1,\tau)}} + \|\widetilde{\psi_3}\|_{\frac{\alpha}{2}}^{(t_1,\tau)}). \tag{53}$$

Теперь найдем оценку функции $\widetilde{\psi_3}(t)$ по норме пространства $C^{\frac{\alpha}{2}}[t_1,\tau]$.

В силу леммы 2 (при $q = 1$) и неравенства (49) здесь имеем $\|\widetilde{\psi_3}\|_{C[0,T]} \leq c_1(T)$. Поскольку

$$\|\widetilde{\psi_3}\|_{C[t_1,\tau]} \leq \|\widetilde{\psi_3}\|_{C[0,\tau]} \leq \|\widetilde{\psi_3}\|_{C[0,T]} \leq c_1(T),$$

то

$$\|\widetilde{\psi_3}\|_{C[t_1,\tau]} \leq c_1(T). \tag{54}$$

Из неравенств леммы 2 и неравенства (49) также следует

$$\int\limits_0^1 |\widetilde{\psi_2}(x,\tau)|dx \leq c_1(T). \tag{55}$$

Для произвольных $t', t'' \in [t_1, \tau],\ t' \neq t''$, используя неравенства (54) и (55), оценим

$$|\widetilde{\psi_3}(t') - \widetilde{\psi_3}(t'')| = |\int\limits_{t''}^{t'} \frac{d\widetilde{\psi_3}}{dt} dt| = |\int\limits_{t''}^{t'} [g \cdot \int\limits_0^1 \widetilde{\psi_2}(x,t)dx - (u+p)\cdot\widetilde{\psi_3} + \widetilde{\varphi_3}(t)]dt| \leq c_1 \cdot |t' - t''|.$$

Поэтому

$$\frac{|\widetilde{\psi_3}(t') - \widetilde{\psi_3}(t'')|}{|t' - t''|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq c_1 \cdot |t' - t''|^{1-\frac{\alpha}{2}} \leq c_1 \cdot T^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно

$$[\widetilde{\psi_3}]_{\frac{\alpha}{2}}^{(t_1,\tau)} = \sup_{t',t'' \in [t_1,\tau], t' \neq t''} \frac{|\widetilde{\psi_3}(t') - \widetilde{\psi_3}(t'')|}{|t' - t''|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq c_1 \cdot T^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому, с учетом неравенства (54) здесь имеем $\|\widetilde{\psi_3}\|_{\frac{\alpha}{2}}^{(t_1,\tau)} \leq c_1(T)$. В силу последнего неравенства, и неравенства (49), из (53) следует $\|\widetilde{\psi}\|_{2+\alpha}^{Q_{(t_1,\tau)}} \leq c_1(T)$. Лемма 4 доказана. $\square$

Теорема 1. *Пусть* $\widetilde{\varphi_1}(x,t), \widetilde{\varphi_2}(x,t) \in H^\alpha(\overline{Q_{(t_1,T)}}),\ \widetilde{\varphi_3}(t) \in L_\infty(t_1,T)$. *Тогда система (50)-(52) имеет единственное решение*

$$\widetilde{\psi_1}(x,t), \widetilde{\psi_2}(x,t) \in H^{2+\alpha}(\overline{Q_{(t_1,T)}}), \widetilde{\psi_3}(t) \in C_1[t_1,T].$$

Доказательство. В принципе, можно доказать теорему 1 пользуясь теоремой Лере-Шаудера [10], на основании полученных в лемме 4 априорных оценок, в области $\overline{Q_{(t_1,\tau)}}$, где $0 < t_1 < \tau \leq T$.

Мы воспользуемся идеей продолжения решения системы из области $\overline{Q_{t_1}}$ на оставшуюся часть $\overline{Q_{(t_1,T)}}$. Используя лемму 1 существования решения системы уравнений в области $\overline{Q_{t_1}}$ где $(t_1 < T)$ и априорные оценки решений системы (лемма 4) продолжим решение $\widetilde{\psi}(x,t), \widetilde{\psi_3}(t)$ системы (50)-(52) из области $\overline{Q_{t_1}}$ на область $\overline{Q_{(t_1,T)}}$. Пусть T^* верхняя грань тех τ, для которых решение данной системы существует на $[0,\tau)$. Доопределим $\widetilde{\psi}(x,t), \widetilde{\psi_3}(t)$ предельными значениями при $t \to T^*$. Для этого рассмотрим возростающую последовательность $\{t_n\}$ сходящуюся к T^*. Последовательности t_n поставим в соответствие функциональную последовательность $\{\widetilde{\psi}(x,t_n)\}$ и числовую последовательность $\{\widetilde{\psi_3}(t_n)\}$. В силу леммы 4 имеем

$$\|\widetilde{\psi}(x,t_n)\|_{2+\alpha}^\Omega \leq c_1,\ |\widetilde{\psi_3}(t_n)| \leq c_2, \tag{56}$$

где c_1, c_2 -постоянные, не зависящие от решений $\widetilde{\psi}(x,t), \widetilde{\psi_3}(t)$. Первое из неравенств (56), в силу определения нормы, дает компактность последовательности $\{\widetilde{\psi}(x,t_n)\}$ в $C^2[0,1]$, а второе неравенство, в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса, дает компактность числовой последовательности $\{\widetilde{\psi_3}(t_n)\}$ в R. Тогда из последовательностей $\{\widetilde{\psi}(x,t_n)\}$, $\{\widetilde{\psi}_3(t_n)\}$ можно выбрать подпоследовательности $\{\widetilde{\psi}(x,t_{n_k})\}$, $\{\widetilde{\psi}_3(t_{n_k})\}$, сходящиеся соответственно $\widetilde{\psi}(x,t_{n_k}) \to \widetilde{\psi}^0(x)$ по норме $C^2[0,1]$, $\widetilde{\psi}_3(t_{n_k}) \to \widetilde{\psi}_3^0$ при $k \to \infty$, где $\widetilde{\psi}^0(x) = (\widetilde{\psi}_1^0(x), \widetilde{\psi}_2^0(x))'$. Таким образом

$$\|\widetilde{\psi}(x,t_{n_k}) - \widetilde{\psi}^0(x)\|_{C^2[0,1]} \to 0 \tag{57}$$

при $k \to \infty$.

Рассмотрим

$$\|\widetilde{\psi}(x,t_n)-\widetilde{\psi}^0(x)\|_{C^2[0,1]} \le \|\widetilde{\psi}(x,t_n)-\widetilde{\psi}(x,t_{n_k})\|_{C^2[0,1]}$$
$$+\|\widetilde{\psi}(x,t_{n_k})-\widetilde{\psi}^0(x)\|_{C^2[0,1]}. \quad (58)$$

Поскольку вектор-функции $\widetilde{\psi}(x,t)$,$D_x\widetilde{\psi}(x,t)$, $D_x^2\widetilde{\psi}(x,t)$ удовлетворяют условию Гельдера, то здесь имеем $|\widetilde{\psi}_i(x,t_n)-\widetilde{\psi}_i(x,t_{n_k})| \le c_1\cdot|t_n-t_{n_k}|^{\frac{\alpha}{2}}\to 0$ при $n\to\infty, k\to\infty$; $i=1,2$; т.е.

$$\|\widetilde{\psi}(x,t_n)-\widetilde{\psi}(x,t_{n_k})\|_{C[0,1]}\to 0 \quad (59)$$

при $n\to\infty, k\to\infty$.

Совершенно аналогично имеем

$$\|D_x\widetilde{\psi}(x,t_n)-D_x\widetilde{\psi}(x,t_{n_k})\|_{C[0,1]}\to 0, \quad (60)$$

$$\|D_x^2\widetilde{\psi}(x,t_n)-D_x^2\widetilde{\psi}(x,t_{n_k})\|_{C[0,1]}\to 0 \quad (61)$$

при $n\to\infty, k\to\infty$ Из (57)-(61) следует, что

$$\|\widetilde{\psi}(x,t_n)-\widetilde{\psi}^0(x)\|_{C^2[0,1]}\to 0$$

при $n\to\infty$. Предельное значение $\widetilde{\psi}^0(x)$ не зависит от выбора последовательности $\{t_n\}$.

Предельное значение $\widetilde{\psi_3^0}$ для функции $\widetilde{\psi}_3(t)$ находится аналогично случаю значений функции $\widetilde{\psi}^0(x)$.

Таким образом мы до определили $\widetilde{\psi}(x,t),\widetilde{\psi}_3(t)$ предельными значениями при $t\to T^*$:

$$\widetilde{\psi}^0(x)=\widetilde{\psi}(x,T^*)=\lim_{t\to T^*}\widetilde{\psi}(x,t),\ \widetilde{\psi}_3^0=\widetilde{\psi}_3(T^*)=\lim_{t\to T^*}\widetilde{\psi}_3(t).$$

Покажем, что вектор-функции $\widetilde{\psi}^0(x), D_x\widetilde{\psi}^0(x), D_x^2\widetilde{\psi}^0(x)$ удовлетворяют условию Гельдера. Рассмотрим

$$|\widetilde{\psi}_i^0(x)-\widetilde{\psi}_i^0(y)|=|\lim_{t\to T^*}\widetilde{\psi}_i(x,t)-\lim_{t\to T^*}\widetilde{\psi}_i(y,t)|\le\lim_{t\to T^*}|\widetilde{\psi}_i(x,t)-\widetilde{\psi}_i(y,t)|\le c_1\cdot|x-y|^\alpha,$$

$(i=1,2)$. Совершенно аналогично можно получить следующие неравенства

$$|D_x\widetilde{\psi}_i^0(x)-D_x\widetilde{\psi}_i^0(y)|\le c_1\cdot|x-y|^\alpha,$$

$$|D_x^2\widetilde{\psi}_i^0(x)-D_x^2\widetilde{\psi}_i^0(y)|\le c_1\cdot|x-y|^\alpha, (i=1,2).$$

Итак, вектор-функции $\widetilde{\psi}^0(x), D_x\widetilde{\psi}^0(x), D_x^2\widetilde{\psi}^0(x)$ удовлетворяют условию Гельдера.

Таким образом, решение системы (50)-(52) продолжено на область $\overline{Q_{(t_1,T^*)}}$. Если окажется что $T^*\ne T$, то указанным выше способом решение можно продолжить на $[T^*,T^*+\Delta t)$, где $\Delta t>0$. Но тогда получим противоречие $T^*<T^*$. Поэтому предположение о том, что $T^*\ne T$ неверно. Следовательно, здесь имеем $T^*=T$. В итоге система (50)-(52) имеет решение

$$\widetilde{\psi_1}(x,t),\widetilde{\psi_2}(x,t)\in H^{2+\alpha}(\overline{Q_{(t_1,T)}}),\widetilde{\psi_3}(t)\in C_1[t_1,T].$$

Единственность решения следует из леммы 3. Теорема 1 доказана. □

Из леммы 1 и теоремы 1 следует, что в конечном итоге система уравнений (10)-(12) имеет решение $\psi_1(x,t), \psi_2(x,t) \in H^{2+\alpha}_{\alpha}(\overline{Q_T})$, $\psi_3(t) \in C_1[0,T]$. При этом функция $\psi_2(x,t)$ удовлетворяет условиям согласования начальных и граничных данных, поэтому можно считать, что $\psi_2(x,t) \in H^{2+\alpha}(\overline{Q_T})$. Функция $\psi_1(x,t) \in H^{2+\alpha}_{\alpha}(\overline{Q_T})$. Таким образом, имеем следующий результат

Теорема 2. *Если* $\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t) \in H^{\alpha}(\overline{Q_T}), (0 < \alpha < 1), \varphi_3(t) \in L_\infty(0,T)$, *то система дифференциальных уравнений (10)-(12) имеет единственное решение* $\psi_1(x,t), \psi_2(x,t)$, $\psi_3(t)$, *удовлетворяющее следующим условиям:* $\psi_1(x,t) \in H^{2+\alpha}_{\alpha}(\overline{Q_T})$, $\psi_2(x,t) \in H^{2+\alpha}(\overline{Q_T})$, $\psi_3(t) \in C_1[0,T]$.

References

[1] L.S. Pontryagin, V.G., R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York: Wiley& Sons, 1962. MR0166037

[2] V.A.Solonnikov, *About boundary value Problems and linear parabolic common view differential equations systems*, Proceedings of the Steklov Inst.Math., **83** (1965), 3–162. (In Russian). MR0211083

[3] V.S. Belonosov, T.I. Zelenyak, *Nonlocal problems in the theory of quasilinear parabolic equations*, Novosibirsk: Novosib. Gos. Univ., 1975. (In Russian). MR0499727

[4] V.S. Belonosov, *Decision assessment of parabolic systems in Hölder's weight class in some use*, Mathematical Sb., **110(152)**:2 (1979), 163–188. (In Russian). MR0552110

[5] C. Georgakis, R. Aris, N.R. Amundson *Studies in the control of Tubular Reactors*, Chemical Engineering Sience, **32**:11 (1977), 1359–1387.

[6] K.S. Mussabekov, *Existence theorems for the solution in a problem of optimal control of a chemical reactor*, Controllable processes and optimization. Controllable systems, Novosibirsk, **22** (1982), 30–50. (In Russian).

[7] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Uralcheva, *Linear and kvazilinear equations parabolic type*, Moscow: Nauka 1967. (In Russian). MR0241821

[8] K.S. Musabekov, *Existence of Optimal Control for regularized problem with Phase constraint*, Journal of Mathematical Sciences, **186**:3 (2012), 466–477. MR3049181

[9] K.S. Musabekov, *Penalty Method for Optimal Control Problem with Phase constraint*, Journal of Mathematical Sciences, **203**:4 (2014), 558–569. MR3279921

[10] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955. MR0069338

[11] J. Leray, J. Schauder, *Topologie et equations fonctionnelles*, Ann. Sci l'Ecole Norm. Sup., **51** (1934), 45–78. MR1509338

Kalimulla Sultanovich Mussabekov
University named after Shokhan Ualikhanov,
Abay Street, 76,
020000, Kokshetau State, Republic Kazakhstan
E-mail address: it.kgu@mail.ru