S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1080–1090 (2018) УДК 517.518.23

DOI 10.17377/semi.2018.15.090 MSC 65D32

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ И ПОЧТИ МИНИМАЛЬНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.Л. ВАСКЕВИЧ

Abstract. A power-law order of convergence to zero of a sequence of norms of error functionals for minimal and almost minimal cubature formulas is established. Functionals act on multidimensional periodic Sobolev spaces, including on spaces with fractional smoothness.

Keywords: cubature formulas, minimal and almost minimal cubature formulas, the convergence order, error functionals, extremal functions, embedding constants.

1. Введение

В статье рассматриваются кубатурные формулы [1] следующего вида:

$$\int\limits_Q \varphi(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^N c_j \varphi(x^{(j)}), \qquad \sum_{j=1}^N c_j = 1. \tag{1}$$

Здесь область интегрирования — это полуоткрытый многомерный куб

$$Q = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_j < 1,\, j = 1, \dots, n\}, \quad n \ge 2,$$

узлы $x^{(j)}$ формулы лежат в Q, а все ее веса c_j ненулевые.

Предполагается также, что подынтегральная функция $\varphi(x)$ в (1) периодична с периодом 1 по каждой своей переменной, т.е. $\varphi(x+\gamma) = \varphi(x)$ для любого вектора γ из $\mathbb{Z}^n$.

Vaskevich, V.L., The error estimates of minimal and almost minimal cubature formulas on classes of periodic functions.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5., проект № 0314-2016-0013.

Поступила 28 августа 2018 г., опубликована 5 октября 2018 г.

Примеры функций с указанным свойством периодичности дают тригонометрические полиномы, т.е. линейные комбинации экспонент следующего вида

$$\varphi(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n} c[\beta] e^{-i2\pi\beta x}. \tag{2}$$

Здесь $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — мультииндекс, $\beta x = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ и лишь конечное число коэффициентов $c[\beta]$ отлично от нуля. Тригонометрический полином (2) имеет конечную степень d, которая определяется равенством

$$d = \max\{|\beta_1| + |\beta_2| + \ldots |\beta_n| \mid c[\beta] \neq 0\}.$$

Если кубатурная формула (1) точна на всех тригонометрических полиномах до степени d включительно и при этом существует тригонометрический полином степени $d+1$, на котором формула не точна, то говорят, что кубатурная формула (1) имеет тригонометрическую степень d [2].

Пример кубатурной формулы тригонометрической степени d дает *прямое произведение квадратурных формул прямоугольников*, построенных для отрезков $0 \le x_j \le 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Каждый из сомножителей в упомянутом прямом произведении имеет равные веса и равномерно с шагом h распределенные узлы, где $1/h = d + 1$ — натуральное число. Левый край отрезка множеству узлов принадлежит, в то время как правый край $x_j = 1$ узлом не является. Соответствующее прямое произведение задается соотношением

$$\int_Q \varphi(x)\, dx \approx h^n \sum_{h\gamma \in Q} \varphi(h\gamma), \tag{3}$$

где γ из $\mathbb{Z}^n$. Шаг решетки h и число узлов N рассматриваемого прямого произведения (3) связаны между собой соотношением $Nh^n = 1$, т.е. $N = (d+1)^n$. Веса кубатурной формулы (3) равны и дают в сумме единицу:

$$\sum_{k=1}^{N} |c_k| = h^n \sum_{h\gamma \in Q} 1 = h^n \sum_{\gamma_1 = 0}^{d} \cdots \sum_{\gamma_n = 0}^{d} 1 = 1.$$

Среди всех кубатурных формул заданной тригонометрической степени d выделяется класс *минимальных и почти минимальных формул.* Дадим соответствующее определение, для чего рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Пусть L — конечномерное подпространство в пространстве непрерывных функций $C(\overline{Q})$, а $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(L)$ — множество всевозможных кубатурных формул вида (1), точных на функциях из множества L. Определим функционал $\mathbf{N}$, положив его значение на произвольной кубатурной формуле σ из $\mathbf{\Sigma}$ равным числу ее узлов: $\mathbf{N}(\sigma) = N$. Задача состоит в том, чтобы, во-первых, найти минимум $N_{\min} = N_{\min}(L)$ этого нелинейного функционала на множестве $\mathbf{\Sigma}(L)$:

$$N_{\min}(L) = \inf_{\sigma \in \mathbf{\Sigma}(L)} \mathbf{N}(\sigma),$$

и, во-вторых, указать кубатурную формулу $\sigma_{\min} = \sigma_{\min}(L)$ (или множество таких кубатурных формул), на которой указанный инфимум достигается:

$$\sigma_{\min} = \arg \inf_{\sigma \in \mathbf{\Sigma}(L)} \mathbf{N}(\sigma).$$

В периодическом случае в качестве конечномерного подпространства L принято рассматривать пространство $\mathcal{T}_d$ всех тригонометрических полиномов степени не выше заданного натурального числа d: $L = \mathcal{T}_d$.

Множество $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(d)$ кубатурных формул, точных на функциях из $\mathcal{T}_d$, в этом случае не пусто: в нем заведомо содержится введенное выше прямое произведение одномерных формул прямоугольников. Значение $N_{\min}(\mathcal{T}_d) = N_{\min}(d)$ минимального числа узлов допускает следующую двустороннюю оценку:

$$N_0(d) \le N_{\min}(d) \le (d+1)^n.$$

Здесь $N_0(d)$ — это так называемая нижняя граница Меллера [2–4]. При четном d для этой границы справедливо равенство

$$N_0(d) = \dim \mathcal{T}_{d/2} = \sum_{s=0}^{d} 2^s C_n^s C_{d/2}^s.$$

Аналогичное соотношение имеет место и в случае нечетной степени d.

Кубатурную формулу σ тригонометрической степени d называют *минимальной* [4], если число ее узлов совпадает с нижней границей Меллера, т.е. если $\mathbf{N}(\sigma) = N_0(d)$.

Для достаточно большого множества значений d и n имеет место точное равенство $N_{\min}(d) = N_0(d)$. В этих случаях минимальная кубатурная формула является одновременно решением сформулированной выше экстремальной задачи. В то же время существуют значения d и n, для которых $N_{\min}(d) > N_0(d)$. В этом случае любую кубатурную формулу с числом узлов, равным или близким к $N_{\min}(d)$, назовем *почти минимальной.*

Отметим, что при $n = 1$ экстремальная задача вырождается: в этом случае для заданного значения d минимальное число узлов равно $d + 1$, а соответствующая квадратурная формула совпадает с обычной формулой прямоугольников. Для $n = 2$ задача полностью решена для любого нечетного d [4]. При этом получившаяся минимальная кубатурная формула имеет узлов в два раза меньше, чем кубатурная формула прямоугольников с той же самой точностью d.

В случае произвольной размерности n сформулированная выше экстремальная задача весьма трудна. Видимо, по этой причине процесс ее решения оказался исторически растянут, эволюционируя постепенно от меньших значений n к бóльшим. Для $n \ge 3$ взамен минимальных кубатурных формул ряд авторов предлагает воспользоваться специальными сериями кубатурных формул, точных на подпространстве $\mathcal{T}_d$ и имеющих при этом узлов в какое либо число раз меньшее, чем кубатурная формула прямоугольников с тем же самым d-свойством. Построение серий, заменяющих минимальные кубатурные формулы, производится обычно теоретико-числовыми методами [2–4].

В процессе поиска серий, состоящих из почти минимальных формул, были, в частности, получены кубатурные формулы тригонометрической степени d и с числом узлов N, удовлетворяющим неравенству

$$N \le \frac{(d+1)^n}{2^{n-1}} < (d+1)^n, \quad n \ge 2.$$

В [2] формулы с такими свойствами названы *формулами высокой тригонометрической степени.* Число узлов у кубатурной формулы высокой тригонометрической степени как минимум в 2^{n-1} раз меньше, чем у кубатурной формулы прямоугольников с тем же самым d-свойством. При $n = 3$ это в четыре раза меньше узлов, при $n = 4$ — в 8 раз меньше и т.д. Именно благодаря этому свойству минимальные и почти минимальные кубатурные формулы чрезвычайно привлекательны для практики.

При неограниченном увеличении числа узлов N минимальной или почти минимальной кубатурной формулы ее тригонометрическая степень $d = d(N)$ также неограниченно возрастает. Для формул высокой тригонометрической степени рост $d = d(N)$ ограничен оценкой снизу

$$d(N) \geq 2^{1-1/n} N^{1/n}.$$

Погрешность минимальной или почти минимальной кубатурной формулы на конкретных функциях, как это ясно показывает оценка снизу числа $N_{\min}(d)$ с помощью нижней границы Меллера, существенным образом зависит и от кратности n исходного интеграла, и от точности d кубатурной формулы.

В настоящей статье погрешность минимальных и почти минимальных кубатурных формул оценивается на периодических пространствах Соболева $\widetilde{H}^s(Q)$ при неограниченном увеличении числа узлов N, $N \to \infty$. Основной результат сформулирован в основной и единственной теореме статьи, доказательство которой приведено в последнем разделе.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 4$ и число узлов кубатурной формулы тригонометрической степени d лежит в интервале*

$$n^{n/2} < N < \frac{(d+1)^n}{2^{n-1}}. \tag{4}$$

Пусть при этом сумма модулей весов кубатурной формулы ограничена сверху равномерно по N:

$$K = \sup_{N \geq 1} \sum_{j=1}^{N} |c_j| < \infty. \tag{5}$$

Тогда для любой функции φ из периодического пространства Соболева $\widetilde{H}^s(Q)$, где $s > n/2 + 1$, справедлива следующая оценка погрешности

$$\Big| \int_Q \varphi(x)\, dx - \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(x^{(j)}) \Big| \leq M(n, s, q) K N^{-\alpha} \|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\|. \tag{6}$$

Здесь положительная постоянная $M(n, s, q)$ конечна и не зависит ни от φ, ни от кубатурной формулы (1). *Параметры n, s, q и α в* (6) *связаны следующими соотношениями:*

$$\frac{n}{2} < q < s - 1, \quad \alpha = \frac{2}{n}(s - q - 1) > 0.$$

Скорость убывания погрешности формулы к нулю зависит от величины степенного показателя α, задающего порядок убывания.

Максимально возможное значение порядка α в условиях теоремы 1 достигается при $q = \frac{n}{2}$. К сожалению, переход в оценке (6) к пределу при $q \to \frac{n}{2}$ к содержательному результату не приводит: постоянная $M(n, s, q)$ в этом случае неограниченно возрастает. По той же причине оценка (6) вырождается при $q \to s - 1$.

Отметим, что в условиях теоремы 1 слабая сходимость погрешностей кубатурных формул к нулю при $N \to \infty$ на любой функции из $\widetilde{H}^s(Q)$ сразу же следует из известной теоремы Банаха — Штейнгауза.

2. Предварительные сведения

В качестве стандартных средств приближения среднего по Q значения от непрерывной функции $\varphi(x)$, т.е. интеграла

$$(M_Q, \varphi) = \int_Q \varphi(x)\, dx,$$

общепринято использовать действие на пробную функцию линейных комбинаций сдвигов хорошо известной дельта-функция Дирака $\delta(x)$, т.е. кубатурные суммы вида

$$(\Sigma_N, \varphi) \equiv \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \delta(x - x^{(j)}), \varphi(x) \right) = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(x^{(j)}) \qquad \forall\, \varphi \in C(\overline{Q}).$$

Действие функционала $\Sigma_N(x)$ на пробную функцию $\varphi(x)$ полностью определяется значениями этой пробной функции в узлах кубатурной формулы.

Погрешность приближения функционала $M_Q(x)$ кубатурной суммой $\Sigma_N(x)$ исследуют [1], оценивая значения на конкретных элементах φ *функционала погрешности* l_N, задаваемого равенством

$$(l_N, \varphi) = (M_Q - \Sigma_N, \varphi) = \left(M_Q(x) - \sum_{j=1}^{N} c_j \delta(x - x^{(j)}), \varphi(x) \right) \qquad \forall\, \varphi \in C(\overline{Q}).$$

Естественная область определения функционала погрешности l_N — пространство $C(\overline{Q})$ непрерывных функций, где l_N линеен и ограничен.

Известно, что сходимость погрешности формулы к нулю при неограниченном возрастании ее числа узлов существенно зависит от гладкости подынтегральной функции. Для того чтобы учесть это обстоятельство в итоговом результате, используется следующая стандартная схема рассуждений.

Множество периодических подынтегральных функций предполагается банаховым пространством $\widetilde{X}$, вложенным ограниченным образом в пространство $C(\overline{Q})$ непрерывных на $\overline{Q}$ функций. При этом существует конечная *константа вложения* [5,6] — минимальное положительное число $\widetilde{A_n}$, для которого имеют место неравенства

$$\sup_{x \in \overline{Q}} |\varphi(x)| \le \widetilde{A_n} \|\varphi \mid \widetilde{X}\| \qquad \forall\, \varphi \in \widetilde{X}. \tag{7}$$

Указанная константа $\widetilde{A_n}$ представляет собой норму действующего из $\widetilde{X}$ в $C(\overline{Q})$ оператора вложения. Качество вложения тем лучше, чем меньше норма оператора вложения. Если тождественно единичная функция принадлежит $\widetilde{X}$, имея здесь единичную же норму, то $\widetilde{A_n} \ge 1$.

Погрешность формулы на произвольной функции φ из $\widetilde{X}$ подчинена оценке

$$|(l_N, \varphi)| \le \|l_N \mid \widetilde{X}^*\| \cdot \|\varphi \mid \widetilde{X}\| \qquad \forall\, \varphi \in \widetilde{X}. \tag{8}$$

Таким образом, достаточно исследовать поведение при $N \to \infty$ последовательности норм $\|l_N \mid \widetilde{X}^*\|$ для того чтобы с помощью (8) получить затем мажоранту погрешности формулы на любом конкретном элементе из класса $\widetilde{X}$.

В качестве пространства $\widetilde{X}$ далее используются периодические пространства Соболева $\widetilde{H}^s(Q)$ переменной гладкости s. По определению, $\widetilde{H}^s(Q)$ представляет собой пополнение совокупности всех тригонометрических полиномов $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n} c[\beta] e^{-i2\pi\beta x} \tag{9}$$

по норме

$$\left\|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\right\| = \left\{ |c[0]|^2 + \sum_{\beta \neq 0} |2\pi\beta|^{2s} |c[\beta]|^2 \right\}^{1/2}. \tag{10}$$

Здесь число s, возможно и дробное, характеризует минимально возможную гладкость элементов из $\widetilde{H}^s(Q)$. Суммирование в (10) производится по всем ненулевым β из $\mathbb{Z}^n$.

Как известно, пространство $\widetilde{H}^s(Q)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$\big(\varphi, \psi\big)_s = c_\varphi[0]\overline{c}_\psi[0] + \sum_{\beta \neq 0} |2\pi\beta|^{2s} c_\varphi[\beta]\overline{c}_\psi[\beta].$$

По теореме вложения Соболева при $s > n/2$ пространство $\widetilde{H}^s(Q)$ вложено в $C(\overline{Q})$ и при этом справедлива оценка

$$\sup_{x \in \overline{Q}} |\varphi(x)| \leq \widetilde{A}_n^s \|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\| \qquad \forall\, \varphi \in \widetilde{H}^s(Q). \tag{11}$$

Известен также следующий точный вид константы $\widetilde{A}_n^s$ вложения [6,7]:

$$\widetilde{A}_n^s = \left\{ 1 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} \right\}^{1/2}. \tag{12}$$

Произвольный элемент φ из $\widetilde{H}^s(Q)$ представляет собой периодическую функцию с единичной матрицей периодов, которая разлагается в сходящийся по норме (10) ряд (9). При этом равенство (10) дает выражение нормы произвольного элемента $\varphi(x)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$ через его коэффициенты Фурье

$$c[\beta] = c_\varphi[\beta] = \int\limits_Q \varphi(x) e^{i2\pi\beta x}\, dx \qquad \forall\, \beta \in \mathbb{Z}^n.$$

Тождественно единичная функция классу $\widetilde{H}^s(Q)$ принадлежит, имея здесь единичную норму.

3. Оценка погрешности

Пусть функционал l линеен и ограничен на пространстве $\widetilde{H}^s(Q)$. Функция $u(x)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$ называется *экстремальной* для l, если выполняются соотношения [8]

$$\|l \mid \widetilde{H}^{s*}(Q)\|^2 = (l, u) = \|u \mid \widetilde{H}^s(Q)\|^2.$$

Существование экстремальной для l функции вытекает из теоремы Рисса об общем виде линейного ограниченного на гильбертовом пространстве функционала. В соответствии с ней в $\widetilde{H}^s(Q)$ имеется такая единственная функция $u(x)$, что для всех функций φ из $\widetilde{H}^s(Q)$ справедливо равенство

$$(l,\varphi) = \big(\varphi, u\big)_s.$$

Именно эта функция $u(x)$ является для l экстремальной.

Пусть $s > n/2$. Тогда, как известно, экстремальная в $\widetilde{H}^s(Q)$ функция $u_N(x)$, соответствующая функционалу погрешности

$$(l_N,\varphi) \equiv \int\limits_Q \varphi(x)\,dx - \sum_{j=1}^N c_j\varphi(x^{(j)}), \qquad \sum_{j=1}^N c_j = 1,$$

представима в виде следующей линейной комбинации [9]:

$$u_N(x) = -\sum_{j=1}^N c_j\widetilde{G}(x - x^{(j)}). \tag{13}$$

Коэффициенты c_j и точки $x^{(j)}$ в этом равенстве — это в точности веса и узлы соответствующей кубатурной формулы. Функция же $\widetilde{G}(x)$ в равенстве (14) определяется разложением

$$\widetilde{G}(x) = \sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} e^{i2\pi\beta x}, \qquad s > \frac{n}{2}. \tag{14}$$

Ряд Фурье в правой части (14) сходится абсолютно и равномерно по x в силу условия $s > \frac{n}{2}$.

Функция $\widetilde{G}(x)$ называется *периодической функцией Грина* оператора $(-\Delta)^s$, где Δ — оператор Лапласа по x. Если число $s = m$ натуральное, то $(-\Delta)^m$ — это с точностью до знака полигармонический оператор Δ^m. Если же s дробное, то $(-\Delta)^s$ — это псевдодифференциальный оператор. При этом имеют место следующие равенства [8]:

$$(-\Delta)^s\widetilde{G}(x) = \sum_{\beta\neq 0} e^{i2\pi\beta x} = \sum_{\beta\neq 0}\delta(x-\beta).$$

Функция Грина $\widetilde{G}(x)$ принадлежит $\widetilde{H}^s(Q)$, а также непрерывна и периодична по каждой переменной x_j с единичным периодом.

Применив к обеим частям равенства (13) функционал l_N, придем к следующему явному представлению нормы через веса и узлы формулы:

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^{s*}(Q)\|^2 = \sum_{i,j=1}^N c_ic_j\widetilde{G}(x^{(i)} - x^{(j)}) = -\sum_{j=1}^N c_j(l_N, \widetilde{G}(x - x^{(j)})). \tag{15}$$

Доказательство теоремы 1. По условию функционал l_N равен нулю на тригонометрических полиномах до степени d включительно. Оказывается, что в этом случае равенство (15) допускает преобразование к следующему виду:

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^{s*}(Q)\|^2 = \sum_{i,j=1}^N c_ic_j\widetilde{G}_d(x^{(i)} - x^{(j)}). \tag{16}$$

В этом представлении $\widetilde{G}_d(x)$ — это *неполная периодическая функция Грина*, задаваемая соотношением

$$\widetilde{G}_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=J(d)}^{\infty} \frac{1}{N_k^s} \sum_{|\beta|^2=N_k} e^{i2\pi\beta x}. \tag{17}$$

Последовательность N_k, $k = 1, 2, \dots$, в (17) образуют натуральные числа, получаемые как всевозможные значения сумм вида $|\beta|^2 = \beta_1^2 + \dots + \beta_n^2$ при условии, что координаты ненулевого мультииндекса β изменяются на множестве целых чисел независимо друг от друга. При этом числа N_k упорядочены по возрастанию: $N_k < N_{k+1}$.

Очевидно, что $N_1 = 1$. Полагая еще $N_0 = 0$, индукцией по j легко обосновать неравенство $N_j \geq j$ для $j \geq 0$. Если $n \geq 4$, то имеет место точное равенство $N_j = j$, как это следует из известной теоремы Лагранжа о представимости любого натурального числа суммой четырех квадратов.

Нижний индекс суммирования $J(d)$ в правой части (17) — это наибольшее из тех натуральных чисел j, для которых $N_j \leq \frac{(d+1)^2}{n}$. Таким образом, $nN_{J(d)} \leq (d+1)^2$. Если $n \geq 4$, то $N_j = j$ и $J(d) = [\frac{(d+1)^2}{n}]$.

Равенство (16) получается из (15) с помощью следующего эквивалентного представления функции Грина, полученного из (14):

$$\widetilde{G}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{2s} N_k^s} \sum_{|\beta|^2=N_k} e^{i2\pi\beta x}. \tag{18}$$

По отдельности каждое из слагаемых

$$\widetilde{G}_k^{(n)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2s} N_k^s} \sum_{|\beta|^2=N_k} e^{i2\pi\beta x}$$

в правой части равенства (18) представляет собой тригонометрический полином, степень которого задается равенством

$$d_k = \max\{\beta_1 + \dots + \beta_n \mid \beta_1 \geq 0, \dots, \beta_n \geq 0,\ |\beta|^2 = N_k\}.$$

Любая функция вида $\widetilde{G}_k^{(n)}(x - x^{(j)})$ — это также тригонометрический полином степени d_k.

Из неравенства Коши—Буняковского имеем $\beta_1 + \dots + \beta_n \leq \sqrt{n}|\beta|$, и поэтому

$$d_k \leq \sqrt{nN_k}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Из этой оценки, определения индекса $J(d)$ и соотношения $N_k < N_{k+1}$ следует, что при $k < J(d)$ справедливы неравенства

$$d_k < \sqrt{nN_{J(d)}} \leq d + 1 \quad \Rightarrow \quad d_k \leq d.$$

По этой причине и в силу точности кубатурной формулы (1) на тригонометрических полиномах до степени d включительно, а также с учетом соотношений

$$\int_Q \widetilde{G}_k^{(n)}(x - x^{(j)})\, dx = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad k \geq 1,$$

имеем при $1 \le k < J(d)$ следующие равенства

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \widetilde{G}_k^{(n)}(x^{(i)} - x^{(j)}) = -(l_N, \widetilde{G}_k^{(n)}(x - x^{(j)})) = 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Пользуясь ими, а также определением (14) функции Грина, получаем

$$(l_N, \widetilde{G}(x - x^{(j)})) = (l_N, \widetilde{G}_d(x - x^{(j)})).$$

Подставляя эти соотношения в представление (15) нормы функционала погрешности, имеем далее

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\|^2 = -\sum_{j=1}^{N} c_j (l_N, \widetilde{G}_d(x - x^{(j)})) = \sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j \widetilde{G}_d(x^{(i)} - x^{(j)}).$$

Таким образом, представление (16) получено в условиях теоремы 1.

Воспользовавшись представлением (16), приходим к оценке

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\| \le \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\widetilde{G}_d(x)| \left(\sum_{i=1}^{N} |c_i| \right). \tag{19}$$

Учитывая, что $|e^{i2\pi\beta x}| \le 1$ и пользуясь определением (17) неполной функции Грина, получаем

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} |\widetilde{G}_d(x)| \le \sum_{k=J(d)}^{\infty} \frac{r_n(N_k)}{(2\pi)^{2s} N_k^s} = \sum_{k=J(d)}^{\infty} \frac{r_n(k)}{(2\pi)^{2s} k^s}. \tag{20}$$

Здесь через $r_n(N_k)$ обозначено общее число мультииндексов β, удовлетворяющих условию $|\beta|^2 = N_k$. Ясно, что $r_n(0) = 1$ и $r_n(1) = 2n$. Во всех тех натуральных точках j, для которых уравнение $|\beta|^2 = \beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2 = j$ не имеет решений в целых числах, полагаем $r_n(j) = 0$.

Таким образом, функция дискретной переменной $r_n(j)$ определена при всех целых неотрицательных значениях дискретного аргумента. По переменной n функция $r_n(j)$ монотонно возрастает: $r_n(j) < r_{n+1}(j)$. Отметим, что функция $r_n(j)$ широко используется в теории чисел [10].

Взяв в определении неполной функции Грина $x = 0$, получим

$$\widetilde{G}_d(0) = \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=J(d)}^{\infty} \frac{r_n(N_k)}{N_k^s} = \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=J(d)}^{\infty} \frac{r_n(k)}{k^s}.$$

Подставляя это равенство в (20), получаем

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} |\widetilde{G}_d(x)| = \widetilde{G}_d(0) = \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=J(d)}^{\infty} \frac{r_n(k)}{k^s}.$$

Известно [11], что для любого $q > n/2$ функция $r_n(k)$ растет на бесконечности не быстрее степени k^q, подчиняясь при этом оценке

$$r_n(k) \le C(n, q - \frac{n}{2})\, k^q, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

Здесь $C(n,p)$ — это определенная при $p > 0$ положительная функция, которая не зависит от k. По переменной p функция $C(n,p)$ монотонно убывает, удовлетворяя при этом неравенствам

$$0 < 2n \le C(n,p) < +\infty, \qquad p > 0.$$

Подставляя оценку (21) в (20), имеем

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} |\widetilde{G}_d(x)| \le C(n, q-\frac{n}{2})\frac{1}{(2\pi)^{2s}}\sum_{k=J(d)}^{\infty}\frac{1}{k^{s-q}}. \tag{22}$$

По условию теоремы $s-1 > n/2$. Поэтому найдется такое число q, что $n/2 < q < s-1$. Для любого такого q имеем $s-q > 1$, и ряд в правой части (22) сходится.

Для мажорирования нормы функционала погрешности $\|l_N \mid \widetilde{H}^{s*}(Q)\|$ подставим оценку (22) в (19). Тогда получим

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^{s*}(Q)\| \le \frac{1}{(2\pi)^s}C^{\frac{1}{2}}(n, q-\frac{n}{2})\left\{\sum_{k=J(d)}^{\infty}\frac{1}{k^{s-q}}\right\}^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{N}|c_j|\right). \tag{23}$$

Ряд в правой части (23) сходится в силу условия $\gamma = s-q > 1$.

Далее для любого натурального $J \ge 2$ имеем $J-1 \ge J/2$ и при этом

$$\sum_{k=J}^{\infty}\frac{1}{k^\gamma} \le \sum_{k=J}^{\infty}\int\limits_{k-1}^{k}\frac{1}{x^\gamma}\,dx = \int\limits_{J-1}^{+\infty}\frac{1}{x^\gamma}\,dx \le \int\limits_{J/2}^{+\infty}\frac{1}{x^\gamma}\,dx = \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{2}{J}\right)^{\gamma-1}. \tag{24}$$

По условию теоремы $n \ge 4$. В этом случае имеем равенство $J(d) = [\frac{(d+1)^2}{n}]$. Оценим эту величину снизу, воспользовавшись условием, что кубатурная формула имеет высокую тригонометрическую степень. Из неравенства (4) получаем следующие соотношения:

$$d+1 > 2^{1-\frac{1}{n}}N^{\frac{1}{n}} \ge 2^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{(d+1)^2}{n} \ge \frac{2}{n}N^{\frac{2}{n}},$$

$$[\frac{(d+1)^2}{n}] \ge [\frac{2}{n}N^{\frac{2}{n}}] \ge \frac{2}{n}N^{\frac{2}{n}} - 1 \ge \frac{1}{n}N^{\frac{2}{n}}.$$

Полагая в (24) $J = J(d) = [\frac{(d+1)^2}{n}]$ и пользуясь найденным соотношением $[\frac{(d+1)^2}{n}] \ge \frac{1}{n}N^{\frac{2}{n}}$, получаем

$$\sum_{k=[\frac{(d+1)^2}{n}]}^{\infty}\frac{1}{k^\gamma} \le \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{2}{J(d)}\right)^{\gamma-1} \le \frac{(2n)^{\gamma-1}}{\gamma-1}\left(\frac{1}{N^{\frac{2}{n}}}\right)^{\gamma-1} = \frac{(2n)^{\gamma-1}}{\gamma-1}N^{-\alpha}, \tag{25}$$

где $\alpha = \frac{2}{n}(\gamma-1) = \frac{2}{n}(s-q-1)$. Подставляя неравенство (25) в (23) и пользуясь условием равномерной ограниченности (5), получаем

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^{s*}(Q)\| \le \frac{K}{(2\pi)^s}C^{\frac{1}{2}}(n, q-\frac{n}{2})\frac{(2n)^{s-q-1}}{s-q-1}N^{-\alpha}. \tag{26}$$

Это и есть требуемая оценка (6), в которой взято

$$M(n,s,q) = \frac{1}{(2\pi)^s}C^{\frac{1}{2}}(n, q-\frac{n}{2})\frac{(2n)^{s-q-1}}{s-q-1}.$$

Таким образом, в условиях теоремы 1 норма $\|l_N \mid \widetilde{H}^{s*}(Q)\|$ убывает к нулю при $N \to \infty$ не медленнее чем степень $N^{-\alpha}$. □

При $q \to \frac{n}{2}$ оценка (26) вырождается: величина $C^{\frac{1}{2}}(n, q - \frac{n}{2})$ в пределе становится бесконечной. Точнее для функции $C(n,p)$ из оценки (21) справедливо следующее асимптотическое равенство в окрестности нуля [11]:

$$C(n,p) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\,\frac{1}{p} + O(1) \quad \text{при} \quad p \to 0.$$

References

[1] S. L. Sobolev and V. L. Vaskevich, *The Theory of Cubature Formulas*, Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 1996; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1997. MR1463155

[2] M.V. Noskov and H. J. Schmid, *Cubature formulas of high trigonometric accuracy*, Zh. Vychisl.Mat.Mat. Fiz., **44**:5 (2004), 786–795 [Comput. Math. Math. Phys. **44** (2004), 740–749]. MR2096921

[3] N. N. Osipov, *Construction of lattice rules with a trigonometric d-property on the basis of extreme lattices*, Zh. Vychisl.Mat. Mat. Fiz., **48**:2 (2008), 212–219 [Comput. Math. Math. Phys. **48**:2 (2008), 201–208]. MR2426458

[4] N. N. Osipov, *Cubature formulas for periodic functions*, Dissertation, Krasnoyarsk State Technical University, Krasnoyarsk, 2005.

[5] S. G. Krein, Yu. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Moscow: Nauka, 1978. MR0506343

[6] V. L. Vaskevich, *Embedding constants for periodic Sobolev spaces of fractional order*, Sib. Mat. Zh. **49**:5 (2008), 1019–1027 (2008) [Sib.Math. J. **49**:5 (2008), 806–813]. MR2469050

[7] V. L. Vaskevich, *The error and guaranteed accuracy of cubature formulas in multidimensional periodic Sobolev spaces*, Sib. Mat. Zh., **55** (2014), 971–988 [Sib.Math. J., **55** (2014), 792–806]. MR3289107

[8] S. L. Sobolev, *Introduction to the Theory of Cubature Formulas*, Moscow: Nauka, 1974 [Cubature Formulas and Modern Analysis. An Introduction (Gordon and Breach Science Publishers, Montreux, 1992)]. MR0478560

[9] V. L. Vaskevich, *Convergence of cubature formulas of high trigonometric precision in multidimensional periodic Sobolev spaces*, Siberian Adv. Math. **25**:4 (2015), 297–304. MR3408633

[10] A. Erdélyi (ed.), Higher Transcendental Functions. Vol. III (Bateman Manuscript Project, California Inst. Tech., 1981). MR0698781

[11] V. L. Vaskevich, *A Majorant for the Multiplicities of Eigenvalues of the Laplace Operator with Periodic Conditions*, Siberian Adv. Math. **28**:1 (2018), 74–77. MR3676093

Vladimir Vaskevich(1,2)
(1)Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia

(2)Novosibirsk State University,
Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: vask@math.nsc.ru