S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1091–1102 (2018) УДК 517.9
DOI 10.17377/semi.2018.15.091 MSC 35C05

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕОРИИ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Ю.Е.АНИКОНОВ, Н.Б. АЮПОВА

Abstract. We propose new representations of solutions to evolution equations and give their applications to identification problems.

Keywords: Blokhintsev equation, identification problems, prehistory, Wiener – Hopf integral equations.

1. Задачи с предысторией

В данном разделе изучаются общие проблемы для операторных уравнений с данными предыстории, когда известна не только субстанция в начальный момент времени, но также и тенденция, т.е. скорость изменения субстанции. При этом представляется важным, что знание оператора нужно только в начальный момент, а в остальном зависимость от времени его неизвестна. Данное обстоятельство существенно при исследовании задач управления, контроля, прогноза и прочее.

Рассматривается задача: найти комплеснозначные вектор-функции $w(x,t) = (w_1(x,t), w_2(x,t), \dots, w_n(x,t))$, $\lambda(z) = (\lambda_1(z), \lambda_2(z), \dots, \lambda_n(x,t))$, $z \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, такие что определен оператор $A(t)$, действующий по переменной $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(t)w + \lambda(w), \tag{1}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x) \tag{2}$$

Anikonov, Yu.E., Ayupova, N.B., Remarks on identification theory.

Работа поддержана Программой фундаментальных научных исследований СО РАН N I.1.5., проект N 0314-2016-0011 и РФФИ (грант 18-01-00057).

Поступила 20 марта 2018 г., опубликована 5 октября 2018 г.

с известными данными $w_0(x)$, $w_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. В равенстве (1) $A(t)$, вообще говоря, неизвестный линейный или нелинейный оператор, действующий по переменной $x \in \mathbb{R}^n$ для каждого $t \geq 0$ и такой, что оператор $\widehat{A} = A(0)$ известен. Вектор-функции $w_0(x)$, $w_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ предполагаются, как отмечалось выше, известными.

Поясним на примере более подробно то, что $\widehat{A} = A(0)$ — известный оператор, а $A(t)$, $t > 0$ — неизвестный.

С этой целью рассмотрим задачу управления вектором $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$ и оператор $A(t)$ определяется следующим образом

$$A(t) = \sum_{k=1}^{m} \Phi_k(t, u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) A_k(t)$$

Здесь $\Phi_k(t, z)$, $z \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$ — известные матрицы m-ого порядка, $A_k(t)$ — линейные дифференциальные операторы, действующие по x для каждого $t \geq 0$ такие, что операторы $A_k(0)$ известны.

Если считать, что $u(0) = u_0$ — известный вектор (это ограничение на управление $u(t)$), то оператор $\widehat{A} = \sum\limits_{k=1}^{m} \Phi_k(0, u_0) A_k(0)$ известен, хотя оператор $A(t)$, $t > 0$,

$$A(t) = \sum_{k=1}^{m} \Phi_k(t, u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) A_k(t).$$

в силу искомого управления $u(t)$, $A_k(t)$, $t > 0$ представляется неизвестным. Данная ситуация для нас вполне приемлема. Разумеется, чтобы найти управление $u(t)$ при заданных $A_k(t)$, $t > 0$ необходима дополнительная информация о решении $w(x, t)$. Данный пример показывает актуальность постановки (1), (2), в частности, новых задач управления. Что касается начально-краевых задач для уравнения (1), при заданном операторе $A(t)$ это вполне можно изучать, во всяком случае для линейных дифференциальных операторов $A(t)$ конечного порядка, скажем, параболических.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1), (2). *С точностью до обратного отображения к* $z = w_0(x)$ *имеет место формула для нелинейного слагаемого* $\lambda(z)$, $\lambda(z) = w_1(w_0^{-1}(z)) - \widehat{A} w_0(x)\Big|_{x = w_0^{-1}(z)}$.

Доказательство. Подставляя в (1) данные (2), имеем при $t = 0$ $w_1(x) = \widehat{A} w_0(x) + \lambda(w_0(x))$. По условию $\widehat{A} = A(0)$ — известный линейный или нелинейный оператор, действующий по $x \in \mathbb{R}^n$. Поэтому, с точностью до обратного отображения к $z = w_0(x)$, имеем $\lambda(z) = w_1(w_0^{-1}(z)) - \widehat{A} w_0(x)\Big|_{x = w_0^{-1}(z)}$. □

Замечание 1. Так как оператор $A_k(t)$, $t > 0$ неизвестен, то дальнейшее изучение, например, задач Коши для уравнения (1) при заданном векторе $\lambda(w)$ не представляется возможным. Если же оператор $A(t)$, $t > 0$ известен, то это возможно, естественно при соответствующих ограничениях.

Аналогично для дифференциально-разностного уравнения, $h \neq 0$ — фиксированная постоянная

$$w(x, t + h) = A(t) w(x, t) + \lambda(w(x, t)) \tag{3}$$

с данными

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad w|_{t=h} = w_h(x). \tag{4}$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3), (4). *С точностью до обратного отображения к* $z = w_0(x)$ *имеет место формула* $\lambda(z) = w_h(w_0^{-1}(z)) - \widehat{A}w_0(x)\Big|_{x=w_0^{-1}(z)}$.

Замечание 2. В данном случае сценарии развития процесса (3), (4) также как и в случае (1), (2) при заданном операторе $A(t)$, $t > 0$ можно считать в силу теоремы 2 вполне определенным, так как вектор-функция $\lambda(w)$ вычислена.

Замечание 3. В важном частном случае, когда вектор-функции $\lambda(z)$ являются целыми (в конкретных случаях это полиномы). информации $w_0(x)$, $w_1(x)$ или $w_0(x)$, $w_h(x)$, могут задаваться только на многообразии, аналитическое продолжение с которого в $\mathbb{C}^n$ однозначно определено.

Последнее замечание очень важно, так как позволяет находить по формулам аналитического продолжения, скажем, по формулам Коши, Мартинелли – Бохнера и другим вектор-функцию $\lambda(z)$, используя продолженные данные с возможным действием операторов при продолжении.

Приведем сначала формулу для голоморфных функций Мартинелли – Бохнера, которая в дальнейшем будет использована для задач идентификации нелинейности $\lambda(z)$ при аналитическом продолжении данных.

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — ограниченная область, имеющая гладкую границу ∂D, через $\overline{D}$ обозначаем замыкание области D, а через $A(D)$ класс голоморфных в области D функций. Положим $A_C(D) = A(D) \cap C(\overline{D})$, где $C(\overline{D})$ — класс непрерывных в замыкании $\overline{D}$ функций.

Теорема (Мартинелли – Бохнера). [1] *Имеет место формула*

$$\int\limits_{\partial D} f(\xi)\omega(\xi - z, \overline{\xi} - \overline{z}) = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin D, \end{cases}$$

где $\omega(\xi - z, \overline{\xi} - \overline{z}) = \dfrac{(n-1)!}{(2\pi \mathrm{i})^n} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(\overline{\xi}_k - \overline{z}_k)\mathrm{d}\overline{\xi}[k] \wedge \mathrm{d}\xi}{|\xi - z|^{2n}}$,
$\mathrm{d}\overline{\xi}[k] \wedge \mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\overline{\xi}_1 \wedge \mathrm{d}\overline{\xi}_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\overline{\xi}_{k-1} \wedge \mathrm{d}\overline{\xi}_{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\overline{\xi}_n \wedge \mathrm{d}\xi_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\xi_n$.

Рассмотрим эволюционное уравнение (1) с условием (2) и предположим, что данные $w_0(x)$, $w_1(x)$, $\widehat{A}w_0$, $\widehat{A} = A|_{t=0}$, $\lambda(z)$ продолжаются в комплексную плоскость $\mathbb{C}^n$ как аналитические вектор-функции $w_0(z) = w_0(x + \mathrm{i}y)$, $w_1(z) = w_1(x + \mathrm{i}y)$, $\widehat{A}w_0(z) = \widehat{A}w_0(x + \mathrm{i}y)$, $\lambda(z) = \lambda(x + \mathrm{i}y)$ в области $D \subset \mathbb{C}^n$. Полагая в формуле $t = 0$ и используя данные $w_0(z)$, $w_1(z)$, имеем $w_1(z) = \widehat{A}w_0(z) + \lambda(w_0(z))$. Следовательно $w_1(z) - \widehat{A}w_0(z) = \lambda(w_0(z))$. Поэтому если голоморфное отображение имеет обратное $w_0(z) = \eta$, $z = w_0^{-1}(\eta)$, $\eta = \eta_1 + \mathrm{i}\eta_2$, то $\lambda(\eta) = (w_1(z) - \widehat{A}w_0(z))\Big|_{z=w_0^{-1}(\eta)}$.

Поэтому и по теореме Мартинелли-Бохнера достаточно знать функцию $\lambda(\xi)$ только на границе ∂D области D, что немаловажно в теории задач идентификации. Таким образом в классе голоморфных вектор-функций имеются три проблемы:

1: голоморфное продолжение данных обратной задачи;
2: обращение голоморфного отображения $\eta = w_0(z)$, то есть поиск $z = w_0^{-1}(\eta)$;
3: использование формул типа Мартинелли-Бохнера для поиска голоморфной вектор-функции $\lambda(z)$, $z \in D$ с информацией $[w_1(z) - \widehat{A}w_0(z)]\Big|_{z=w_0^{-1}(\eta)}$, $\eta \in \partial D$.

Исследование задач идентификации для эволюционных уравнений (1), (3) может быть проведено различными способами при наличии той или другой информации о решениях $w(x,t)$ систем (1), (3).

Ограничимся здесь только некоторыми ссылками на опубликованные ранее работы [2] – [4].

2. Операторно-функциональные уравнения и задачи идентификации

Здесь рассматриваются задачи поиска векторного решения $F(x)$ и векторного смещения $w(x)$ в уравнении $F(x) = AF(w(x)) + a(x)$, где A — линейный дифференциальный оператор по переменной $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $a(x)$ — заданная вектор-функция. Приводятся формулы для решения, составляющие суть идентификации одновременного определения $F(x)$ и $w(x)$.

Исследования начнем с примера, а именно, рассмотрим векторное уравнение

$$F(x) = \Delta\left[F(w(x))\right] + a(x). \tag{5}$$

Здесь $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D — ограниченная область евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа, $a(x) = (a_1(x), a_2(x), \dots a_n(x))$ — заданная непрерывная вектор-функция, $x \in \overline{D}$, $\overline{D}$ — замыкание области D. Дважды непрерывно дифференцируемые функции $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$, $w(x) = (w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x))$ считаются искомыми и подлежат поиску.

Предположим, что область D такова, что существует функция Грина $g(x,y)$, $x \in D$, $y \in D$ для оператора Лапласа Δ, например, если $D = \{x, \quad |x| < R_0\}$, то [5]

$$g(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R_0|y|}{4\pi\,|x|y^2| - yR_0^2|}.$$

Оказывается, имеет место нижеследующая лемма о разложении вектор-функции источника $a(x)$

Лемма 1. *Если $a(x) = a_0(x) + a_1(x)$ и $a_1(x) = y$ имеет в области D обратную вектор-функцию $x = a_1^{-1}(y)$, то при $w|_{\partial D} = 0$ имеют место формулы*

$$F(x) = a_1(x), \quad w(x) = a_1^{-1}\left(-\int\limits_D g(x,y)a_0(y)d\,y\right),$$

при $\left(-\int\limits_D g(x,y)a_0(y)d\,y\right) \in D$.

Доказательство. Подставим найденные формулы в уравнение (5), получим равенства

$$a_1(x) = \Delta\left[a_1\left(a_1^{-1}\left(-\int\limits_D g(x,y)a_0(y)d\,y\right)\right)\right] + a_0(x) + a_1(x) =$$

$$= \Delta\left(-\int\limits_D g(x,y)a_0(y)d\,y\right) + a_0(x) + a_1(x) =$$

$$= -a_0(x) + a_0(x) + a_1(x).$$

□

Если вместо уравнения (5) рассматривается более общее

$$F(x) = A\left[F(w(x))\right] + a(x), \tag{6}$$

где A — некоторый линейный дифференциальный оператор, имеющий функцию Грина $g(x,y)$, $x \in D$, $y \in D$, то для вектор-функций $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$, $w(x) = (w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x))$ имеет место

Лемма 2. *Если $a(x) = a_0(x) + a_1(x)$ и $a_1(x) = y$ имеет в области D обратную вектор-функцию $x = a_1^{-1}(y)$, то выполнены формулы*

$$F(x) = a_1(x), \quad w(x) = a_1^{-1}\left(-\int\limits_D g(x,y)a_0(y)d\,y\right),$$

если $A\left(-\int\limits_D g(x,y)a_0(y)d\,y\right) = -a_0(x)$,

Доказательство. В формулу (6) подставим результаты леммы 2. Имеем

$$a_1(x) = A\left[a_1\left(a_1^{-1}\left(-\int\limits_D g(x,y)a_0(y)d\,y\right)\right)\right] + a_0(x) + a_1(x) =$$

$$= A\left(-A^{-1}a_0\right) + a_0(x) + a_1(x) =$$

$$= -a_0(x) + a_0(x) + a_1(x).$$

Что и требовалось доказать, в силу того, что оператор задаваемой функцией Грина является обратным к A, то есть $A^{-1}(x)a_0 = a_0(x)$. □

В силу того, что обратный оператор $A^{-1}(x)$ в лемме 2, как было уже сказано, соответствует функции Грина $g(x,y)$, можно формально усложнить результат леммы 2 для линейного пространства L,

Следствие 1. *Если $a(x) = a_0(x) + a_1(x)$, $x \in L$, $a_0(x) \in L$, $a_1(x) \in L$ и $a_1(x) = y$ имеет в L обратную $x = a_1^{-1}(y)$, то имеет место формальные формулы*

$$F(x) = a_1(x), \quad w(x) = a_1^{-1}\left(-A^{-1}(x)a_0\right).$$

3. К теории уравнений типа свертки

В теории интегральных уравнений Винера-Хопфа типа свертки, в том числе и уравнений первого рода, возникает проблема поиска функций $w_+(z)$, $w_-(z)$, $z = x + \mathrm{i}\, y$, аналитических в областях $\operatorname{Im} z > \alpha$, $\operatorname{Im} z < \beta$, $\alpha < \beta$, при $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ выполнено соотношение

$$a(z)w_+(z) + b(z)w_-(z) + c(z) = 0, \tag{7}$$

где $a(z) \neq 0$, $b(z) \neq 0$, $c(z)$ — заданные аналитические функции в полосе $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$, [6].

В работе [7] приведено интегральное уравнение первого рода типа свертки, зависящее от векторного параметра ξ, а именно

$$\widehat{w}(\xi, p) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[\int\limits_{a}^{b} \mathrm{e}^{(y-p)B(\xi,\tau)} d\tau \right] \widehat{F}(\xi, y) dy. \tag{8}$$

Здесь $\widehat{w}(\xi, p)$ — известная функция, зависящая от ξ, $|\xi| \leq R$, p, $\alpha \leq p \leq \beta$, определенная данными обратной задачи, $\widehat{F}(\xi, y)$ искомое решение интегрального уравнения типа свертки (8), также зависящее от ξ.

Там же в [7] приведены интегральные уравнения первого рода Винера-Хопфа, содержащие вектор ξ, также связанные с задачами идентификации.

Вместо (7) целесообразно рассматривать более общее уравнение, считая что искомые функции $w_+(z,\xi)$, $w_-(z,\xi)$ и известные коэффициенты $a(z,\xi)$, $b(z,\xi)$, $c(z,\xi)$ зависят еще непрерывно от вещественного вектора $\xi \in D \subset \mathbb{R}^n$, где D — некоторая область евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Другими словами, будем рассматривать уравнение с параметром $\xi \in D$

$$a(z,\xi)w_+(z,\xi) + b(z,\xi)w_-(z,\xi) + c(z,\xi) = 0, \tag{9}$$

где функции $w_+(z,\xi)$, $w_-(z,\xi)$ по прежнему аналитичны по z для каждого $\xi \in D$ в областях $\operatorname{Im} z > \alpha$, $\operatorname{Im} z < \beta$, а известные функции $a(z,\xi)$, $b(z,\xi)$, $c(z,\xi)$ аналитичны по z для каждого $\xi \in D$ при $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ и непрерывны по ξ, $a(z,\xi) \neq 0$, $b(z,\xi) \neq 0$.

В дальнейшем через $\varphi_+(z,\xi)$, $\psi_+(z,\xi)$ и $\varphi_-(z,\xi)$, $\psi_-(z,\xi)$ обозначаем функции, аналитические по z в областях $\operatorname{Im} z > \alpha$, $\operatorname{Im} z < \beta$ соответственно и непрерывные по $\xi \in D$, $b(z,\xi) \neq 0$. Имеет место по сути алгебраическая

Лемма 3. *Пусть выполнены условия при $\varphi_-(z,\xi) \neq 0$, $\varphi_+(z,\xi) \neq 0$*

$$\frac{a(z,\xi)}{b(z,\xi)} = \frac{\varphi_+(z,\xi)}{\varphi_-(z,\xi)}, \quad \frac{c(z,\xi)}{b(z,\xi)} = \frac{\psi_+(z,\xi) + \psi_-(z,\xi)}{\varphi_-(z,\xi)}.$$

Тогда для произвольной целой по z функции $f(z,\xi)$, $\xi \in D$ имеют место равенства

$$w_+(z,\xi) = \frac{f(z,\xi) - \psi_+(z,\xi)}{\varphi_+(z,\xi)}, \quad w_-(z,\xi) = \frac{-f(z,\xi) - \psi_-(z,\xi)}{\varphi_-(z,\xi)}.$$

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда при $\dfrac{a(z,\xi)}{b(z,\xi)} = \dfrac{\varphi_+(z,\xi)}{\varphi_-(z,\xi)}$, уравнение (9) переписывается в виде

$$\varphi_+(z,\xi)w_+(z,\xi) + \varphi_-(z,\xi)w_-(z,\xi) + \varphi_-(z,\xi)\frac{c(z,\xi)}{b(z,\xi)} = 0. \tag{10}$$

Подставляя в (10) $w_+(z,\xi) = \dfrac{f(z,\xi) - \psi_+(z,\xi)}{\varphi_+(z,\xi)}$, $w_-(z,\xi) = \dfrac{-f(z,\xi) - \psi_-(z,\xi)}{\varphi_-(z,\xi)}$ получаем, очевидно, тождество, так как $\dfrac{c(z,\xi)}{b(z,\xi)} = \dfrac{\psi_+(z,\xi) + \psi_-(z,\xi)}{\varphi_-(z,\xi)}$. $\square$

При этом целая по z функция $f(z,\xi)$ иногда вполне определяется по данным убывания решений $w_+(z,\xi)$, $w_-(z,\xi)$ и коэффициентов $a(z,\xi)$, $b(z,\xi)$, $c(z,\xi)$, [8]. Применение результатов с параметром ξ к интегральным уравнениям типа свертки аналогично.

4. Задачи идентификации для уравнения Блохинцева

В данном разделе изучаются прикладные задачи, связанные с уравнением Блохинцева [9] и представлениями решений неоднородных гиперболических уравнений в виде $w(x,t) = \varphi(x,t)F(u(x,t))$, [2], [10], [11], [12]. В дальнейшем все рассматриваемые функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми и обладают другими необходимыми свойствами.

Уравнение Блохинцева имеет вид для $x \in D$, $t \geq 0$, D — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = c^2(x,t)\Delta w + (\nabla P_0, \nabla w) + \frac{dw}{dt}(\overline{V}(x,t), \nabla \ln c^2(x,t)). \tag{11}$$

Здесь $w(x,t)$ — потенциал скорости звуковых колебаний, P_0 — потенциал давления, $\overline{V}(x,t)$ — вектор скорости потока, $c^2(x,t)$ — квадрат скорости звука, ∇u — градиент функции $u(x,t)$ по переменной x, т. е.

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Если $a = (a_1(x,t), a_2(x,t), \dots, a_n(x,t))$, $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), \dots, b_n(x,t))$ — два вектора, то $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = (a,b)$ — скалярное произведение

Производные $\dfrac{dw}{dt}$, $\dfrac{d^2 w}{dt^2}$ соответственно равны

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\overline{V}(x,t), \nabla w) \equiv \psi(x,t), \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\overline{V}(x,t), \nabla \psi). \tag{12}$$

Подставляя в уравнение (11) производные (12), получим уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial w}{\partial t} + (\overline{V}(x,t), \nabla w)\right] \\ &\qquad + \left(\overline{V}(x,t), \nabla\left(\frac{\partial \overline{V}(x,t)}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\partial w}{\partial t} + (\overline{V}(x,t), \nabla w)\right)\right)\right) \\ &\quad = c^2(x,t)\Delta w + (\nabla P_0, \nabla w) + \left[\frac{\partial w}{\partial t} + (\overline{V}(x,t), \nabla w)\right]\left(\overline{V}(x,t), \nabla \ln c^2(x,t)\right). \end{aligned}$$

Нам удобно представить данное уравнение в виде неоднородного гиперболического уравнения с функцией источника $R(x,t)$, зависящей от решения и коэффициентов

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2(x,t)\Delta w + (\nabla P_0, \nabla w) + R(x,t), \tag{13}$$

где

$$R(x,t)=\left[\frac{\partial w}{\partial t}+(\overline{V}(x,t),\nabla w)\right]\left(\overline{V}(x,t),\nabla\ln c^2(x,t)\right)-\frac{\partial}{\partial t}(\overline{V}(x,t),\nabla w)$$
$$-\left(\overline{V}(x,t),\nabla\left(\frac{\partial w}{\partial t}+(\overline{V}(x,t),\nabla w)\right)\right).$$

Заметим, что если $\overline{V}(x,t)=0$, то $R(x,t)=0$.

Сначала решение уравнения (13) будем искать в виде $w(x,t)=F(u(x,t))$, где $F(y)$, $u(x,t)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, [10]. Оказывается, для уравнения (13), справедлива

Теорема 3. *Пусть функция $u(x,t)$ является решением уравнения*

$$\frac{1}{|\nabla u|^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\Delta u\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2}{|\nabla u|^2}\right)=\beta(t),$$

с произвольной гладкой функцией $\beta(t)$ и

1: *$P_0(x,t)=\beta(t)u(x,t)+\gamma(t)$, где $\gamma(t)$ — произвольная гладкая функция;*

2: $c^2(x,t)=\dfrac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2}{|\nabla u|^2}$.

Тогда $w(x,t)=F(u(x,t))$ для произвольной гладкой функции $F(y)$, $y\in\mathbb{R}^1$ и функция источника

$$R(x,t)=\left[\left[\frac{\partial w}{\partial t}+(\overline{V}(x,t),\nabla w)\right]\left(\overline{V}(x,t),\nabla\ln c^2(x,t)\right)-\frac{\partial}{\partial t}(\overline{V}(x,t),\nabla w)\right.$$
$$\left.\left.-\left(\overline{V}(x,t),\nabla\left(\frac{\partial w}{\partial t}+(\overline{V}(x,t),\nabla w)\right)\right)\right]\right|_{w=F(u)}$$

удовлетворяют уравнению (13).

Доказательство. Пусть $w(x,t)=F(u(x,t))$, тогда

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$
$$\frac{\partial w}{\partial x_i}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i};$$
$$\Delta w=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}|\nabla u|^2+\frac{\partial F}{\partial u}\Delta u.$$

Подставляя $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial w}{\partial x_i}$, Δw, $\dfrac{\partial P_0}{\partial x_i}$, $R(x,t)$, в уравнение (13) и, используя соотношение 2, получаем тождество. □

Таким образом коэффициенты $c^2(x,t)$, $\dfrac{\partial P_0}{\partial x_i}$ вычисляются только функцией $u(x,t)$, а решение $w(x,t)$ и функция источника $R(x,t)$ зависят еще и от $F(y)$. Практические приложения теоремы 3 очевидны, в том числе для задач идентификации, см. [2], [11], [12]. Представления теоремы 3 позволяют установить уравнения связей коэффициентов и решения дифференциального уравнения. В данном случае способ сводится к вычислению функций $u(x,t)$, $F(y)$, подчиненных условиям теоремы 3 и другим ограничениям.

Имея в виду обобщения, будем в дальнейшем рассматривать уравнение вида

$$\frac{1}{\lambda^2(x,t)}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} + R(x,t), \tag{14}$$

где $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $a_i(x,t)$ — непрерывно дифференцируемы, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j > 0$.

Заметим, что если в (14) $\lambda^2(x,t) = c^2(x,t)$, $a_{ij} = \delta_{ij}$, $\lambda^2(x,t)a_i(x,t) = \dfrac{\partial P_0}{\partial x_i}$,

$$\begin{aligned} R(x,t) = \lambda^2(x,t)\left[\frac{\partial w}{\partial t} + (\overline{V}(x,t),\nabla w)\right]\big(\overline{V}(x,t),\nabla \ln c^2(x,t)\big) - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{V}(x,t),\nabla w) \\ - \left(\overline{V}(x,t),\nabla\left(\frac{\partial w}{\partial t} + (\overline{V}(x,t),\nabla w)\right)\right), \end{aligned}$$

то уравнение (14) превращается в уравнение (13).

Гиперболическое уравнение (14) запишем в виде

$$Lw = R(x,t), \tag{15}$$

где

$$Lw = \frac{1}{\lambda^2(x,t)}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

Используя результат работы [10] сформулируем обобщение теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть*

1: $\psi(x,t)$, $\varphi(x,t)$, $F(y)$, $y \in \mathbb{R}^1$ *— произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции,* $\varphi \neq 0$, $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right) \neq 0$*;*

2: $c^2(x,t) = \lambda^2(x,t)$*;* $\dfrac{1}{\lambda^2(x,t)} = \dfrac{\sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)\dfrac{\partial}{\partial x_l}\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)}{\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)^2}$*;*

3: $P_i = \dfrac{a_i(x,t)}{\lambda^2(x,t)}$.

Тогда $w(x,t) = \varphi(x,t)F\left(\dfrac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right)$ *и функция источника* $R(x,t) = \dfrac{1}{\lambda^2(x,t)}\left[F\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)L\varphi + \dfrac{\varphi L\psi - \psi L\varphi}{\varphi}F'(y)\Big|_{y=\frac{\psi}{\varphi}}\right]$ *удовлетворяют уравнению* (15).

Доказательство. Пусть $w(x,t)=\varphi(x,t)F\left(\dfrac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right)$. Тогда

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}F\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)+2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,F'(y)|_{y=\frac{\psi}{\varphi}}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right)$$
$$+\varphi\,F''(y)|_{y=\frac{\psi}{\varphi}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right)\right)^2+\varphi\,F'(y)|_{y=\frac{\psi}{\varphi}}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right);$$
$$\frac{\partial w}{\partial x_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}F\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)+\varphi\,F'(y)|_{y=\frac{\psi}{\varphi}}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right);$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}F\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,F'(y)|_{y=\frac{\psi}{\varphi}}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right)$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,F'(y)|_{y=\frac{\psi}{\varphi}}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right)$$
$$+\varphi\,F''(y)|_{y=\frac{\psi}{\varphi}}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right)$$
$$+\varphi\,F'(y)|_{y=\frac{\psi}{\varphi}}\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right).$$

Подставляя полученные соотношения и представления 2, 3, в уравнение (15), получим тождество. □

Таким образом вычисления сведены к определению функций φ, ψ, F с условиями теоремы 4.

Далее рассмотрим случай, когда коэффициенты $a_{ij}(x)$ не зависят от переменной t. Тогда при специальном выборе функций $\varphi(x,t)=\varphi_0(x)+t\varphi_1(x)$, $\psi(x)=\varphi_1(x)$ следует формула, [11]

$$w(x,t)=(\varphi_0(x)+t\varphi_1(x))F\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)+t\varphi_1(x)}\right)+(\varphi_0(x)-t\varphi_1(x))G\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)-t\varphi_1(x)}\right), \tag{16}$$

где $F(y)$, $G(y)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

При этом $\lambda^2(x)=c^2(x)$ вычисляется формулой

$$\frac{1}{\lambda^2(x)}=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\varphi_0-\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}\varphi_1\right)\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\varphi_0-\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_j}\varphi_1\right)}{\varphi_1^4(x)}.$$

Так как $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi_0(x)+t\varphi_1(x))=0$, $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_1(x)=0$, то с учетом этих равенств возможно конструктивное определение решения и коэффициентов гиперболического уравнения (14) с учетом уравнения (16).

Теорема 5. *Пусть*

1: $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$— *произвольные дважды дифференцируемые функции,* $\varphi_0(x)+t\varphi_1(x)\neq 0$, $\varphi_0(x)-t\varphi_1(x)\neq 0$, $a\le t\le b$, $x\in D\subset\mathbb{R}^n$, $a<b$ — *постоянные;*

2:

$$c^2(x) = \lambda^2(x), \quad \frac{1}{\lambda^2(x)} = \frac{\sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}\varphi_0 - \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_k}\varphi_1\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_l}\varphi_0 - \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_l}\varphi_1\right)}{\varphi_1^4(x)};$$

3: $P_i = \dfrac{a_i(x,t)}{\lambda^2(x)}$.

Тогда

$$w(x,t) = (\varphi_0(x) + t\varphi_1(x))F\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)+t\varphi_1(x)}\right) + (\varphi_0(x) - t\varphi_1(x))G\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)-t\varphi_1(x)}\right)$$

и

$$\begin{aligned} R(x,t) = \frac{1}{\lambda^2(x)}\Bigg\{ &(\varphi_0(x)+t\varphi_1(x))F\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)+t\varphi_1(x)}\right)L\varphi \\ &+ \frac{\varphi L\psi - \psi L\varphi}{\varphi}F'(y)\Big|_{y=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)+t\varphi_1(x)}} \\ &+ (\varphi_0(x)-t\varphi_1(x))G\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)-t\varphi_1(x)}\right)L(\varphi_0(x)-t\varphi_1(x)) \\ &+ \frac{\varphi L\psi - \psi L\varphi}{\varphi}F'(y)\Big|_{y=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)-t\varphi_1(x)}}\Bigg\}. \end{aligned}$$

удовлетворяют уравнению (15).

Замечание 4. Целесообразно добавлять к решению $w(x,t) = F(u(x,t))$ решение однородного уравнения $\widetilde{w}(x,t)$, возможно в качестве шума, то есть $w(x,t) = F(u(x,t)) + \widetilde{w}(x,t)$, где $\widetilde{w}(x,t)$ — произвольное решение однородного уравнения $\dfrac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial t^2} = c^2(x,t)\Delta\widetilde{w} + (\nabla P_0, \nabla\widetilde{w})$. То же самое в случае $w(x,t) = \varphi(x,t)F\left(\dfrac{\psi(x,t)}{\varphi(x,t)}\right)$.

Применение полученных представлений теоремы 5 (скорость звука $c(x)$ здесь не зависит от t) для решений гиперболических уравнений к обратным задачам или задачам идентификации аналогично применениям теорем 3, 4, в том числе и с учетом замечания 4, см. [2], [11], [12].

References

[1] L.A. Aizenberg, *Carleman's Formulas in Complex Analysis. Theory and Applications*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1993. MR1256735

[2] Yu. E. Anikonov, N. B. Ayupova, V. G. Bardakov, V. P. Golubyatnikov, and M. V. Neshchadim, *Inversion of mapping and inverse problems*, Sib. Elektron. Mat. Izv.,**9**, (2012), 382–432. MR2982998

[3] Yu. E. Anikonov, İ. Gölgeleyen , and M. Yildiz, *Identification problems for systems of nonlinear evolution equations and functional equations*, Advances in Difference Equations, **1** (2016), Art. 152. MR3510700

[4] Yu.E. Anikonov, *Remarks on functional equations and on their applications*, Journal of Mathematical Sciences, **221** (2017), 745—757. MR3608978

[5] V.S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Moscow: Mir, 1984. MR0764399
[6] A.V. Manzhirov and N.D.Polyanin, *Handbook of Integral Equations: Second Edition*, Chapman and Hall/CRC, 2008. MR2404728
[7] Yu.E. Anikonov, *On problems in mathematical physics with variable parameter*, Journal of Mathematical Sciences, **228** (2018), 335–346. MR3637314
[8] B. Noble, *Methods Based on the Wiener Hopf Technique*, American Mathematical Society, New York: Chelsea Publishing Company, 1988. Zbl 0657.35001
[9] D.I. Blokhintsev, *Acoustics of a Nonhomogeneous Moving Medium*, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, D.C., 1956. MR0075047
[10] Yu.E. Anikonov, N.B. Ayupova *Ray expansions and iIdentities for second order equations. Applications to inverse problems*, Journal of Mathematical Sciences, **231** (2018), 111–123.
[11] Yu.E. Anikonov, M.V.Neshchadim, *On analytical methods in the theory of inverse problems for hyperbolic equations I*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **5**:4 (2011), 506–518. MR2951441
[12] Yu.E. Anikonov, M.V.Neshchadim, *On analytical methods in the theory of inverse problems for hyperbolic equations II*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **6**:1 (2012), 6–11. MR2962151

Yurii Evgenievich Anikonov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: anikon@math.nsc.ru

Natalia Borisovna Ayupova
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
Novosibirsk State University,
Pirogova, 1,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: ayupova@math.nsc.ru