S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 11–20 (2018) УДК 517.946
DOI 10.17377/semi.2018.15.002 MSC 35J46

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ФАКТОРИЗАЦИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Д.А. ЖУРАЕВ

Abstract. In the paper it is considered the problem of regularization of the Cauchy problem for systems of elliptic type equations of the first order with constant coefficients factorisable Helmholtz operator in three-dimensional bounded domain. Using the results of [1-6], is constructed explicitly Carleman matrix and, based on the regularized solution of the Cauchy problem.

Keywords: The Cauchy problem, regularization, factorization, regular solution, fundamental solution.

1. Введение

Известно, что задача Коши для эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами некорректна: решение задачи единственно, но неустойчиво.

В неустойчивых задачах образ оператора не является замкнутым, поэтому условие разрешимости не может быть записано в терминах непрерывных линейных функционалов. Так, в задаче Коши для эллиптических уравнений с данными на части границы области решение обычно единственно, задача разрешима для всюду плотного множества данных, но это множество не замкнуто. Следовательно, теория разрешимости таких задач существенно труднее и глубже, чем теория разрешимости уравнений Фредгольма. Первые результаты в этом направлении появились только в середине 1980-х годов в работах Л. А. Айзенберга, А. М. Кытманова, Н. Н. Тарханова (См. [3]). Единственность

Juraev, D.A., On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain.

Поступила 28 октября 2017 г., опубликована 12 января 2018 г.

решения следует из общей теоремы Холмгрена [11]. Условная устойчивость задачи следует из работы А. Н. Тихонова [10], если сузить класс возможных решений до компакта.

В данной работе строится семейство вектор-функций $U_{\sigma(\delta)}(x) = U(x, f_\delta)$ зависящих от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $U_{\sigma(\delta)}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ в точке $x \in G_\rho$.

Следуя А. Н. Тихонову [10], семейство вектор-функций $U_{\sigma(\delta)}(x)$ назовем регуляризованным решением задачи. Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближенного решения задачи. Для специальных областей задача продолжения ограниченных аналитических функций в случае, когда данные задаются только на части границы, была рассмотрена Т. Карлеманом [4]. Исследования Т. Карлемана были продолжены Г. М. Голузиным и В. И. Крыловым [9]. В работе [8] построен многомерный аналог формулы Карлемана для аналитических функций многих переменных. Использование классической формулы Грина для построения регуляризованного решения задачи Коши для уравнения Лапласа было предложено академиком М. М. Лаврентьевым [5], в его известной монографии. Используя идеи М. М. Лаврентьева [5], Ш. Ярмухамедовым было построено в явном виде регуляризованное решение задачи Коши для уравнения Лапласа [6]. В работе [13] рассмотрена задача Коши для уравнения Гельмгольца в произвольной ограниченной плоской области с данными Коши, известными только на участке границы области. Задача Коши для многомерной системы Ламе рассмотрена О. И. Махмудовым и И. Э. Ниёзовым [14]. В работе [15] рассмотрена задача продолжения решения системы уравнений Моисила—Теодореско на части границы области в пространстве $\mathbb{R}^3$. Задача продолжения решения системы уравнений Максвелла по ее значениям на части границы области рассмотрена Э. Н. Сатторовым [16]. Построением матрицы Карлемана для эллиптических систем занимались: Ш. Ярмухамедов, Н. Н. Тарханов, О. И. Махмудов, И. Э. Ниёзов и другие.

Система, рассматриваемая в данной работе, была введена Н.Н. Тархановым. Для этой системы им были изучены корректные граничные задачи и найден аналог интегральной формулы Коши в ограниченной области. Во многих корректных задачах для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизующих оператор Гельмгольца, недоступно вычисление значение вектор-функции на всей границе. Поэтому, задача восстановления решения системы уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизующей оператор Гельмгольца [17]–[21], является одной из актуальных задач теории дифференциальных уравнений.

На протяжении последних десятилетий сохраняется интерес к классическим некорректным задачам математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в работах [4]–[6] и развивалось впоследствии в [1]–[3] и [12]-–[21].

Пусть $\mathbb{R}^3$ — трехмерное вещественное евклидово пространство,

$$x = (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3, \;\; y = (y_1,\, y_2,\, y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$x' = (x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2, \;\; y' = (y_1,\, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Введем следующие обозначения:

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} -\text{транспонированный вектор } x,\ r = |y - x|\,,\ \alpha = |y' - x'|,$$

$$w = i\tau\sqrt{u^2 + \alpha^2} + \beta,\ w_0 = i\tau\alpha + \beta,\ \beta = \tau y_3,\ \tau = tg\frac{\pi}{2\rho},\ \rho > 1,\ u \geq 0,$$

$$s = \alpha^2,\ G_\rho = \{y:\ |y'| < \tau y_3,\ y_3 > 0\}\,,\ \partial G_\rho = \{y:\ |y'| = \tau y_3,\ y_3 > 0\}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T,\ U(x) = (U_1(x), \ldots, U_n(x))^T,\ u^0 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n,$$

$$n = 2^m,\ m = 3,\ E(z) = \begin{Vmatrix} z_1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots. \\ 0 \ldots z_n \end{Vmatrix} -\text{диагональная матрица},$$
$$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$G_\rho \subset \mathbb{R}^3-$ограниченная односвязная область, граница котрой состоит из поверхности конуса ∂G_ρ, и гладкого куска поверхности S, лежащего в конусе G_ρ, т.е. $\partial G_\rho = S \bigcup T,\ T = \partial G_\rho \backslash S$.

Пусть $D(x^T),\ (n \times n)-$матрица с элементами, состоящими из множества линейных функций с постоянными коэффициентами комплексной плоскости, для которых выполняется условие:

$$D^*(x^T)D(x^T) = E((|x|^2 + \lambda^2)u^0),$$

где $D^*(x^T)-$эрмитово сопряженная матрица $D(x^T)$, $\lambda-$вещественное число.

Рассмотрим в области G_ρ систему дифференциальных уравнений

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x) = 0, \tag{1}$$

где $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)-$матрица дифференциальных операторов первого порядка.

Обозначим через $A(G_\rho)-$класс вектор-функций в области G_ρ, непрерывных на $\overline{G}_\rho = G_\rho \bigcup \partial G_\rho$ и удовлетворяющих системе (1).

2. Постановка задачи

Пусть $U(y) \in A(G_\rho)$ и

$$U(y)|_S = f(y),\ y \in S. \tag{2}$$

Здесь, $f(y)-$заданная непрерывная вектор-функция на S.

Требуется восстановить вектор-функцию $U(y)$ в области G_ρ, исходя из её значений $f(y)$ на S.

Если $U(y) \in A(G_\rho)$, то верна следующая интегральная формула типа Коши

$$U(x) = \int_{\partial G_\rho} M(y, x)U(y)ds_y,\ \ x \in G_\rho, \tag{3}$$

где

$$M(y, x) = \left(E\left(-\frac{e^{i\lambda r}}{4\pi r}u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T).$$

Здесь $t = (t_1, t_2, t_3)-$единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y, поверхности ∂G_ρ, $-\frac{e^{i\lambda r}}{4\pi r}$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$ [12].

Обозначим, через $K(w)-$целую функцию, принимающую вещественные значения при вещественном w $(w=u+iv,\ u,\ v-$действительные числа) и удовлетворяющую условиям:

$$\begin{gathered}K(u)\neq 0,\ \sup_{v\geq 1}|v^pK^p(w)|=\mathrm{M}(u,p)<\infty,\\ -\infty<u<\infty,\ p=0,1,2,3.\end{gathered}\tag{4}$$

Функцию $\Phi(y,x)$ при $y\neq x$ определим следующим равенством:

$$\begin{gathered}\Phi(y,x)=-\tfrac{1}{2\pi^2K(x_3)}\int_0^\infty \mathrm{Im}\tfrac{K(w)}{w-x_3}\tfrac{\cos\lambda u}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}du,\\ w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3,\end{gathered}\tag{5}$$

В формуле (5), выбирая

$$K(w)=E_\rho(\sigma^{1/\rho}w),\ K(x_3)=E_\rho(\sigma^{1/\rho}\gamma),$$

$$w=i\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}+\beta,\ \gamma=\tau x_3,\ \sigma>0,$$

получим

$$\Phi_\sigma(y,x)=-\frac{E_\rho(\sigma^{1/\rho}\gamma)}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{Im}\frac{E_\rho(\sigma^{1/\rho}w)}{w-x_3}\frac{\cos\lambda u}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}du,\tag{6}$$

здесь $E_\rho(\sigma^{1/\rho}w)$- целая функция Миттаг-Леффлера.

Напомним основные свойства функции Миттаг-Леффлера ([7], гл. 3, §2). Целая функция Миттаг-Леффлера определяется рядом.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{w^n}{\Gamma(1+\rho^{-1}n)}=E_\rho(w),\ w=u+iv,$$

где $\Gamma(s)$- гамма функция Эйлера.

Обозначим через $\gamma_\varepsilon(\beta_0)(\varepsilon>0,\ 0<\beta_0<\pi)$ контур в комплексной плоскости ζ, пробегаемый в направлении неубывания $\arg\zeta$ и состоящий из следующих частей:

1. луч $\arg\zeta=-\beta_0,\ |\zeta|\geq\varepsilon$;
2. дуга $-\beta_0<\arg\zeta<\beta_0$ окружности $|\zeta|=\varepsilon$;
3. луч $\arg\zeta=\beta_0,\ |\zeta|\geq\varepsilon$.

Контур $\gamma_\varepsilon(\beta_0)$ разбивает плоскость ζ на две неограниченные односвязные области G_ρ^- и G_ρ^+, лежащие соответственно слева и справа от $\gamma_\varepsilon(\beta_0)$.

Пусть $\rho>1,\ \frac{\pi}{2\rho}<\beta_0<\frac{\pi}{\rho}$.

Обозначим

$$\psi_\rho(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon(\beta_0)}\frac{\exp(\zeta^\rho)}{\zeta-w}d\zeta.$$

Тогда справедливы следующие интегральные представления:

$$E_\rho(w)=\psi_\rho(w),\quad z\in G_\rho^-,$$

$$E_\rho(w)=\rho\exp(w^\rho)+\psi_\rho(w),\quad z\in G_\rho^+.$$

Из этих формул находим

$$\left.\begin{array}{l}|E_\rho(w)|\leq\rho\exp(\mathrm{Re}\,w^\rho)+|\psi_\rho(w)|,\ \ |\arg w|\leq\frac{\pi}{2\rho}+\eta_0,\\ |E_\rho(w)|\leq|\psi_\rho(w)|,\ \ \frac{\pi}{2\rho}+\eta_0\leq|\arg w|\leq\pi,\ \ \eta_0>0.\end{array}\right\}$$

$$|\psi_\rho(w)| \le \frac{M}{1+|w|},\ M = const$$

$$E_\rho(w) \approx \rho \exp(w^\rho),\ \ w > 0,\ \ w \to \infty,$$

Далее, так как $E_\rho(w)-$ вещественна при вещественных w, то

$$\operatorname{Re}\psi_\rho(w) = \frac{\rho}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon(\beta_0)} \frac{2\varsigma - \operatorname{Re} w}{(\zeta - w)\zeta - \overline{w})}\exp(\zeta^\rho)d\zeta,$$

$$\operatorname{Im}\psi_\rho(w) = \frac{\rho \operatorname{Im}(w)}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon(\beta_0)} \frac{\exp(\zeta^\rho)}{(\zeta - w)\zeta - \overline{w})}d\zeta,$$

Приведенные здесь сведения относительно функции $E_\rho(w)$ взяты из ([7], гл. 3, §2. См. также [14]-[16]).

В дальнейшем для доказательства основных теорем понадобятся следующие оценки функции $\Phi_\sigma(y,x)$.

Лемма. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in G_\rho,\ y \ne x,\ \sigma \ge \sigma_0,\ \sigma_0 > 0,$ тогда

1) при $\beta \le \alpha$ справедливы неравенства

$$|\Phi_\sigma(y,x)| \le C(\rho)\frac{\sigma}{r}\exp(-\sigma\gamma^\rho),\ \ \sigma > 1,\ x \in G_\rho, \tag{7}$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}\right| \le C(\rho)\frac{\sigma^3}{r^2}\exp(-\sigma\gamma^\rho),\ \ \sigma > 1,\ x \in G_\rho, \tag{8}$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}\right| \le C(\rho)\frac{\sigma^3}{r^2}\exp(-\sigma\gamma^\rho),\ \ \sigma > 1,\ x \in G_\rho, \tag{9}$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}\right| \le C(\rho)\frac{\sigma^3}{r^2}\exp(-\sigma\gamma^\rho),\ \ \sigma > 1,\ x \in G_\rho. \tag{10}$$

2) при $\beta > \alpha$ справедливы неравенства

$$|\Phi_\sigma(y,x)| \le C(\rho)\frac{\sigma}{r}\exp(-\sigma\gamma^\rho + \sigma \operatorname{Re} w_0^\rho),\ \ \sigma > 1,\ x \in G_\rho, \tag{11}$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}\right| \le C(\rho)\frac{\sigma^3}{r^2}\exp(-\sigma\gamma^\rho + \sigma \operatorname{Re} w_0^\rho),\ \ \sigma > 1,\ x \in G_\rho, \tag{12}$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}\right| \le C(\rho)\frac{\sigma^3}{r^2}\exp(-\sigma\gamma^\rho + \sigma \operatorname{Re} w_0^\rho),\ \ \sigma > 1,\ x \in G_\rho, \tag{13}$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}\right| \le C(\rho)\frac{\sigma^3}{r^2}\exp(-\sigma\gamma^\rho + \sigma \operatorname{Re} w_0^\rho),\ \ \sigma > 1,\ x \in G_\rho. \tag{14}$$

Здесь $C(\rho)-$ функции, зависящие только от ρ. Причем в различных неравенствах они различные. Для оценки $\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_j}\right| ds_y,\ j = 1, 2$ и далее воспользуемся равенством

$$\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_j} = \frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y_j} = 2(y_j - x_j)\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial s},\ j = 1, 2. \tag{15}$$

Формула (3) верна, если вместо $-\frac{e^{i\lambda r}}{4\pi r}$ подставим функцию

$$\Phi_\sigma(y,x) = -\frac{e^{i\lambda r}}{4\pi r} + g_\sigma(y,x), \tag{16}$$

где $g_\sigma(y,x)-$регулярное решение уравнения Гельмгольца по переменной y, включая и точку $y = x$.

Тогда интегральная формула (3) имеет следующий вид:

$$U(x)=\int_{\partial G_\rho} N_\sigma(y,x)U(y)ds_y,\ \ x\in G_\rho, \tag{17}$$

где

$$N_\sigma(y,x)=\left(E\left(\Phi_\sigma(y,x)u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T).$$

При фиксированном $x\in G_\rho$ обозначим через S^* ту часть S, на которой $\beta\geq\alpha$. Если $x\in G_\rho$, то $S=S^*$ (в этом случае $\beta=\tau y_3$ и неравенство $\beta\geq\alpha$ означает, что y лежит внутри или на поверхности конуса).

Теорема 1. *Пусть $U(y)\in A(G_\rho)$ удовлетворяет неравенству*

$$|U(y)|\leq 1,\ y\in T. \tag{18}$$

Если

$$U_\sigma(x)=\int_{S^*} N_\sigma(y,x)U(y)ds_y,\ \ x\in G_\rho, \tag{19}$$

то справедлива оценка

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\leq C(\rho,x)\sigma\exp(-\sigma\gamma^\rho),\ \ \sigma>1,\ x\in G_\rho. \tag{20}$$

Здесь и ниже функции, ограниченные на компактных подмножествах области G_ρ, обозначим через $C(\rho,x)$.

Доказательство. Используя интегральную формулу (17) и равенство (19), получим

$$U(x)=U_\sigma(x)+\int_{\partial G_\rho\backslash S^*} N_\sigma(y,x)U(y)ds_y,\ x\in G_\rho.$$

Учитывая неравенство (18), приходим к оценке

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\leq\left|\int_{\partial G_\rho\backslash S^*} N_\sigma(y,x)U(y)ds_y\right|\leq\int_{\partial G_\rho\backslash S^*}|N_\sigma(y,x)|\,ds_y,\ \ x\in G_\rho. \tag{21}$$

Далее оценим интегралы $\int_{\partial G_\rho\backslash S^*}|\Phi_\sigma(y,x)|\,ds_y$, $\int_{\partial G_\rho\backslash S^*}\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_j}\right|ds_y$, ($j=1,2$) и $\int_{\partial G_\rho\backslash S^*}\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_3}(y,x)\right|ds_y$ на T.

Отделяя мнимую часть равенства (6), получим

$$\Phi_\sigma(y,x)=\frac{E_\rho(\sigma^{1/\rho}\gamma)}{2\pi^2}\left[\int_0^\infty\frac{\mathrm{Re}\,E_\rho(\sigma^{1/\rho}w)}{u^2+r^2}\ \cos\lambda u\,du-\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty\frac{(y_3-x_3)\mathrm{Im}E_\rho(\sigma^{1/\rho}w)}{u^2+r^2}\frac{\cos\lambda u}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}du\right],\ y\neq x,\ x_3>0. \tag{22}$$

Учитывая равенство (22), имеем

$$\int_{\partial G_\rho\backslash S^*}|\Phi_\sigma(y,x)|\,ds_y\leq C(\rho,x)\sigma\exp(-\sigma\gamma^\rho),\ \sigma>1,\ x\in G_\rho. \tag{23}$$

Для оценки второго интеграла воспользуемся равенством

$$\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_j}=\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y_j}=2(y_j-x_j)\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial s},\ j=1,2. \tag{24}$$

Учитывая равенство (24), получим

$$\int_{\partial G_\rho \setminus S^*} \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1} \right| ds_y \le C(\rho,x)\sigma \exp(-\sigma\gamma^\rho), \ \sigma > 1, \ x \in G_\rho. \tag{25}$$

Аналогично получим

$$\int_{\partial G_\rho \setminus S^*} \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2} \right| ds_y \le C(\rho,x)\sigma \exp(-\sigma\gamma^\rho), \ \sigma > 1, \ x \in G_\rho. \tag{26}$$

Оценивая $\int_{\partial G_\rho \setminus S^*} \left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_3}(y,x) \right| ds_y$, получим

$$\int_{\partial G_\rho \setminus S^*} \left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_3}(y,x) \right| ds_y \le C(\rho,x)\sigma \exp(-\sigma\gamma^\rho), \ \sigma > 1, \ x \in G_\rho. \tag{27}$$

Из неравенств (23), (25), (26) и (27), получим (20), таким образом, теорема 1 доказана. □

Следствие 1. *Предельное равенство*

$$\lim_{\sigma\to\infty} U_\sigma(x) = U(x),$$

имеет место равномерно на каждом компакте из области G_ρ.

Теорема 2. *Пусть* $U(y) \in A(G_\rho)$ *удовлетворяет условию (18), а на гладкой поверхности* S *неравенству*

$$|U(y)| \le \delta, \ 0 < \delta < 1, \tag{28}$$

Тогда верна оценка

$$|U(x)| \le C(\rho,x)\sigma\delta^{\left(\frac{x_3}{R}\right)^\rho}, \ \sigma > 1, \ x \in G_\rho. \tag{29}$$

Здесь $R^\rho = \max_{y\in S} \operatorname{Re} w_0^\rho$.

Доказательство. Используя интегральную формулу (17), имеем

$$U(x) = \int_{S^*} N_\sigma(y,x)U(y)ds_y + \int_{\partial G_\rho \setminus S^*} N_\sigma(y,x)U(y)ds_y, \ x \in G_\rho.$$

и

$$|U(x)| \le \left| \int_{S^*} N_\sigma(y,x)U(y)ds_y \right| + \left| \int_{\partial G_\rho \setminus S^*} N_\sigma(y,x)U(y)ds_y \right|, \ x \in G_\rho. \tag{30}$$

Учитывая неравенство (28), оценим первый интеграл в неравенстве (30).

$$\begin{gathered} \left| \int_{S^*} N_\sigma(y,x)U(y)ds_y \right| \le \int_{S^*} |N_\sigma(y,x)|\,|U(y)|\,ds_y \le \\ \le \delta \int_{S^*} |N_\sigma(y,x)|\,ds_y, \ x \in G_\rho. \end{gathered} \tag{31}$$

Далее оценим интегралы $\delta\int_{S^*} |\Phi_\sigma(y,x)|\,ds_y$, $\delta\int_{S^*} \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_j} \right| ds_y$, $(j=1,2)$ и $\delta\int_{S^*} \left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_3}(y,x) \right| ds_y$ на гладкой поверхности S.

Учитывая равенство (22), имеем

$$\delta \int_{S^*} |\Phi_\sigma(y,x)|\,ds_y \le C(\rho,x)\sigma\delta \exp\sigma(\tau^\rho R^\rho - \tau^\rho x_3^\rho), \ \sigma > 1, \ x \in G_\rho. \tag{32}$$

Для оценки второго интеграла воспользуемся равенством (24):

$$\delta\int_{S^*}\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}\right|ds_y\le C(\rho,x)\sigma\delta\exp\sigma(\tau^\rho R^\rho-\tau^\rho x_3^\rho),\ \sigma>1,\ x\in G_\rho. \tag{33}$$

Аналогично, используя равенство (24), получим

$$\delta\int_{S^*}\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}\right|ds_y\le C(\rho,x)\sigma\delta\exp\sigma(\tau^\rho R^\rho-\tau^\rho x_3^\rho),\ \sigma>1,\ x\in G_\rho. \tag{34}$$

Оценивая $\delta\int_{S^*}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}\right|ds_y$, получим

$$\delta\int_{S^*}\left|\frac{\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}\right|ds_y\le C(\rho,x)\sigma\delta\exp\sigma(\tau^\rho R^\rho-\tau^\rho x_3^\rho),\ \sigma>1,\ x\in G_\rho. \tag{35}$$

Из (32)-(35) получим

$$\left|\int_{S^*}N_\sigma(y,x)U(y)ds_y\right|\le C(\rho,x)\sigma\delta\exp\sigma(\tau^\rho R^\rho-\tau^\rho x_3^\rho),\ \sigma>1,\ x\in G_\rho. \tag{36}$$

Известно следующее

$$\left|\int_{\partial G_\rho\setminus S^*}N_\sigma(y,x)U(y)ds_y\right|\le C(\rho,x)\sigma\exp(-\sigma\gamma^\rho),\ \sigma>1,\ x\in G_\rho. \tag{37}$$

Следовательно, учитывая (36)-(37), имеем

$$|U(x)|\le\frac{C(\rho,x)\sigma}{2}(\delta\exp(\sigma\tau^\rho R^\rho)+1)\exp(-\sigma\tau^\rho x_3^\rho),\ \sigma>1,\ x\in G_\rho. \tag{38}$$

Выбирая σ из равенства

$$\sigma=\frac{1}{\tau^\rho R^\rho}\ln\frac{1}{\delta}, \tag{39}$$

получим неравенство (29). Теорема 2 доказана. □

Пусть $U(y)\in A(G_\rho)$ и вместо $U(y)$ на S задано ее приближение $f_\delta(y)$, соответственно, с погрешностью $0<\delta<1$, $\max\limits_S|U(y)-f_\delta(y)|\le\delta$.

Положим

$$U_{\sigma(\delta)}(x)=\int_{S^*}N_\sigma(y,x)f_\delta(y)ds_y,\ x\in G_\rho. \tag{40}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $U(y)\in A(G_\rho)$ на всей границе ∂G_ρ удовлетворяет граничному условию (18).*

Тогда справедлива оценка

$$\left|U(x)-U_{\sigma(\delta)}(x)\right|\le C(\rho,x)\sigma\delta^{\left(\frac{x_3}{R}\right)^\rho},\ \sigma>1,\ x\in G_\rho. \tag{41}$$

Доказательство. Из интегральной формулы (17) и (40) имеем

$$U(x)-U_{\sigma(\delta)}(x)=\int_{S^*}N_\sigma(y,x)\left\{U(y)-f_\delta(y)\right\}ds_y+\int_{\partial G_\rho\setminus S^*}N_\sigma(y,x)U(y)ds_y.$$

Теперь, повторяя доказательство теорем 1 и 2, получим

$$\left|U(x)-U_{\sigma(\delta)}(x)\right|\le\frac{C(\rho,x)\sigma}{2}(\delta\exp(\sigma\tau^\rho R^\rho)+1)\exp(-\sigma\tau^\rho x_3^\rho),\ \sigma>1,\ x\in G_\rho.$$

Отсюда, выбирая σ из равенства (39), получим (41). Теорема 3 доказана. □

Следствие 2. *Предельное равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} U_{\sigma(\delta)}(x) = U(x),$$

имеет место равномерно на каждом компакте из области G_ρ.

Таким образом, функционал $U_{\sigma(\delta)}(x)$ определяет регуляризацию решения задачи (1)-(2).

В заключение автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за полезные советы.

References

[1] Tarkhanov N.N., *Ob integralnom predstavlenii resheniy sistem lineynykh differensialnyx uravneniy 1-go poryadka v chastnykh proizvodnykh i nekotoryx yego prilojeniyakh*, Nekotorye voprosy mnogomernogo kompleksnogo analiza. Institut fiziki AN SSSR, Krasnoyarsk, (1980), 147–160. MR0616307

[2] Tarkhanov N.N., *O matritse Karlemana dlya ellipticheskikh sistem*, DAN SSSR, **284**:2 (1985), 294–297. MR0806452

[3] Tarkhanov N.N., *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, Mathematical Topics, **7**, Akad. Verl., Berlin, 1995. MR1334094

[4] Carleman T., *Les fonctions quasi analytiques*, Paris: Gautier-Villars et Cie, 1926. JFM 52.0255.02

[5] Lavrent'ev M.M., *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki*, Novosibirsk: Nauka, 1962. MR0224319

[6] Yarmukhamedov Sh., *Funksiya Karlemana i zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasa*, Sib. mat. zhurnal, **45**:3 (2004), 702–719. MR2078727

[7] Djrbashyan M.M., *Integralnye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti*, M.: Nauka, 1966.

[8] Aizenberg L.A., *Formuly Karlemana v kompleksnom analize*, Novosibirsk: Nauka, 1990. MR1089612

[9] Goluzin G.M., Krylov V.M., *Obobshennaya formula Karlemana i yeyo prilozheniye k analiticheskomu prodolzheniyu funksiy*, Mat. sb., **40**:2 (1993), 144–149.

[10] Tikhonov A.N., *O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii*, Dokl. AN SSSR, **151**:3 (1963), 501–504. MR0162377

[11] Bers A., Dzhon F., Shekhter M., *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*, M.: Mir, 1966. MR0208121

[12] Aleksidze M.A., *Fundamentalnye funksii v priblizhennykh resheniyakh granichnykh zadach*, M.: Nauka, 1991. MR1154556

[13] Arbuzov E.V., Bukhgeim A.L., *Formula Karlemana dlya uravneniya Gelmgoltsa*, Sib. mat. zhurnal, **47**:3 (2006), 518–526. MR2249164

[14] Makhmudov O.I., Niyozov I.E., *O zadache Koshi dlya mnogomernoy sistemy uravneniy Lame*, Izv. vuzov. Matem., **4** (2006), 41–50. MR2241417

[15] Ishankulov T., *Prodoljeniye resheniye sistemy uravneniy Moisila-Teodoresko*, Uzbekskii Matematicheskii zhurnal, **3** (2007), 46–52. MR2568502

[16] Sattorov E.N., *O prodoljenii resheniya odnorodnoy sistemy uravneniy Maksvella*, Izv. vuzov. Matem., **8** (2008), 73–83. MR2468318

[17] Juraev D.A., *Integralnaya formula dlya sistem uravneniy ellipticheskogo tipa*, II Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya studentov i aspirantov «Matematika i yeyo prilozheniya v sovremennoy nauke i praktike», Kursk, (2012), 33–38.

[18] Juraev D.A., *Integralnaya formula dlya sistem uravneniy ellipticheskogo tipa v ogranichennoy oblasti*, «Aktualnye problemy mexaniki, matematiki, informatiki — 2012», Mezhdunarodnaya konferentsiya posvyashyennoy 100-letiyu so dnya rozhdeniya professorov S.N. Chernikova, I.F. Vereshagina, L.I. Volkovysskogo. Perm, (2012), 43.

[19] Juraev D.A., *Konstruktsiya fundamentalnogo resheniya uravneniya Gelmgoltsa*, Doklady Akademii nauk Respubliki Uzbekistan, **4** (2012), 14–17.

[20] Juraev D.A., *Regulyarizatsiya zadacha Koshi dlya sistem uravneniy ellipticheskogo tipa pervogo poryadka*, Uzbekskiy Matematicheskiy zhurnal, **2** (2016), 61–71.

[21] Juraev D.A., *Zadacha Koshi dlya matrichnykh faktorizatsiy uravneniya Gelmgoltsa v neogranichennoy oblasti*, Sib. Elektron. Matem. Izv., **14** (2017), 752–764. Zbl 1375.35153

Davron Aslonqulovich Juraev
Karshi State University,
Karshi city, Kuchabog-17,
180100, Republic of Uzbekistan, Kashkadarya region
E-mail address: juraev_davron@list.ru