$\mathbf{S} \stackrel{\cdot}{\mathbf{e}} \mathbf{M} \mathbf{R}$ ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 115–134 (2018) DOI 10.17377/semi.2018.15.013 УДК 519.633.2 MSC 76S05

МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРОСАЧИВАНИЯ ОДНОФАЗНОГО ФЛЮИДА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

С.И. МАРКОВ, Н.Б. ИТКИНА

ABSTRACT. In the paper, we propose a modern mathematical method for solving seepage problems in multiscale porous media. We present a discrete variational formulation for a Discontinuous Galerkin Method (DG-method) with special stabilizing parameters. The DG-method is used for solving the single-phase fluid flow problem with full permeability tensor of the second rank in the macrolevel medium. A problem of homogenizing the heterogeneous mesolevel medium with non-periodic inclusions is considered. An algorithm for solving an inverse data problem is based on the Fletcher-Reeves method and the local Newton method. Mathematical modeling results of solving the seepage problem in the anisotropic heterogeneous and efficient media are given. A comparative analysis of the obtained mathematical modeling results is carried out. **Keywords:** seepage problem, Discontinuous Galerkin Method, permeability tensor, homogenization.

1. Введение

Одним из современных методов извлечения нефти является гидравлический разрыв нефтеносного пласта. Согласно работе Т. Хи и др. [1], слишком высокое давления впрыска воды может привести к нежелательным трещинам в пласте и ухудшить водоизмещение. С другой стороны, необходимо обеспечить хорошую инъекцию флюида, чтобы гарантировать ожидаемый дебит скважины. Данная

Markov, S.I., Itkina, N.B., Mathematical modeling single-phase fluid flows in porous media.

^{© 2018} Марков С.И., Иткина Н.Б.

Работа выполнена при финансовой поддержке стипендии Президента РФ (СП- $3627\ 2016\ 5$).

Поступила 6 мая 2017 г., опубликована 12 февраля 2018 г.

проблема не может быть решена в полном объёме без применения аппарата математического моделирования.

Для наглядного математического моделирования процесса просачивания многофазных флюидов активно используется метод дискретных элементов DEM (от англ. Discrete Element Method). В DEM каждая частица жидкости интерпретируется как дискретный элемент, движение которого в системе каналов пористой среды описывается соответствующим уравнением [2]. Очевидным недостатком такого подхода являются значительные вычислительные затраты, необходимые для решения поставленной задачи.

В качестве альтернативы DEM используются вычислительные схемы прямого моделирования процесса просачивания на базе методов конечных разностей (МКР), конечных объёмов (МКО) и конечных элементов (МКЭ).

Для решения задачи просачивания в гетерогенных средах, как правило, применяются неструктурированные и несогласованные сетки, что делает классический МКР менее привлекательным в связи с его чувствительностью к качеству и ориентации конечноразностной сетки [2]. Классический МКЭ не является локально консервативным, поэтому может быть неустойчивым при решении сингулярно-возмущённых задач просачивания, что приводит к нефизическим осцилляциям конечноэлементного решения, если не наложены жёсткие ограничения на используемую сетку [3]. МКО является локально консервативным, однако, как отмечают авторы работы [2], данный метод требует адаптивного выбора противопотоковых схем интерполяции и жёстко привязан к топологии конечнообъёмной сетки.

В данной работе предлагается подход к решению задачи просачивания, основанный на вычислительных схемах разрывного метода Галёркина DG (от англ. Discontinuous Galerkin Method). DG входит в семейство неконформных конечноэлементных методов и сочетает в себе достоинства МКО и МКЭ, поскольку обладает свойством локальной консервативности и гибкой вычислительной структурой МКЭ. В разрывном методе Галёркина каждый конечный элемент является носителем локального конечноэлементного решения. Согласование поведения решения на межэлеметных границах обеспечивается за счёт введения в вариационную формулировку специальных численных потоков [4], [5].

Для моделирования процесса просачивания широко применяется многомасштабный подход, поскольку реальная геологическая среда может содержать поры и трещины различной геометрии и размеров. В рамках многомасштабного подхода обычно выделяются два уровня иерархии пористой среды [6]. На мезоуровне рассматривается гетерогенная пористая среда с включениями, отношение размеров которых меняется от 1:100 до 1:10 в предположении о их недеформируемости [6]. На макроуровне рассматривается однородная среда с физическими свойствами, эквивалентными физическим свойствам исходной гетерогенной пористой среды [7].

Для того чтобы предсказать макроскопическое поведение неоднородных сред, используются различные методы гомогенизации. Свойства гомогенизированной среды называются эффективными. Анализ существующих работ по теории осреднения гетерогенных сред показывает, что методы гомогенизации можно разделить на два семейства: аналитические подходы, которые предполагают

некоторую периодичность расположения микровключений, и подходы численной гомогенизации, которые являются вычислительно более сложными и широко применяются для осреднения сред с произвольной структурой.

Среди отечественных работ следует выделить труды О.А. Олейника, В.В. Жикова, С.А. Назарова, В.В. Шелухина. Подходы применения теории осреднения на основе свойства *p*-связности для перфорированных сред изложены в [8], [9]. Методы гомогенизации сред с ветвящейся периодической структурой описаны в научной статье С.А. Назарова [10]. В работе [6] предложены статистические подходы для гомогенизации гетерогенной среды с известным законом распределения включений и методы логарифмической оценки эффективного коэффициента гидравлической проницаемости. В работе [7] описаны детерминистские и эвристические подходы гомогенизации сред с периодической структурой включений. Число публикаций по вопросу вычисления эффективных физических характеристик для сред с произвольной структурой весьма ограничено. Как правило, для описания сред с произвольной структурой используются подходы, основанные на модификации математических моделей, которые описывают исследуемый физический процесс. Изложение таких идей можно найти в работах Ү. Атігат и В.В. Шелухина [11], [12].

Отличительной особенностью реальных геологических сред является их анизотропная природа физических свойств, обусловленная наличием наслоений и неравномерностью распределения системы каналов и пустот. Поэтому возникает необходимость в разработке специальных численных методов оценки эффективных тензорных характеристик таких сред. Классический метод вычисления тензорных характеристик основан на определении главных направлений тензора проницаемости гетерогенной среды и повороте тензора с вычисленными диагональными коэффициентами [13], [14]. Как правило, в таких случаях требуется решение ряда прямых задач. В работе [15] отмечается, что оператор прямой задачи с тензорным коэффициентом при старшей производной требует дополнительного исследования, поскольку в определённых случаях задача может становиться сингулярно-возмущённой.

В статье предлагается метод вычисления эффективного тензора гидравлической проницаемости второго ранга, основанный на решении многомерной обратной коэффициентной задачи с помощью градиентного метода Флетчера-Ривса и локального метода Ньютона. Приводится сравнительный анализ решений в гетерогенной пористой и эффективной средах.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача просачивания воды в следствие перепада давления (сверху вниз) в пористую среду (керн) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, пустоты которой заполнены нефтью. Предполагается, что проницаемость матрицы среды по воде постоянна и составляет 10^{-5} м². Поры полностью заполнены нефтью, проницаемость которой по воде 10^{-8} м². Керн имеет форму цилиндра с радиусом 1 см и высотой 5 см. На рис. 1 показаны варианты расположения и формы пор. Микропористость матрицы керна $\varphi = 20\%$.

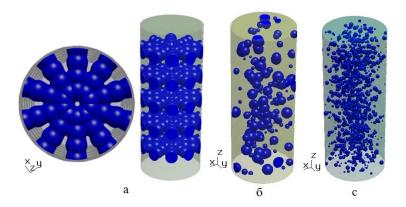


Рис. 1. Структура и пористость среды: 56% (a), 2% (б), 4% (c)

Необходимо найти макроскопические характеристики (проницаемость по воде) фильтрационных систем при просачивании воды в следствие перепада давления по высоте образца.

3. Математическая модель однофазной фильтрации

Будем предполагать, что флюид является ньютоновским, и скорость течения удовлетворяет закону Дарси [2]

(1)
$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho \mathbf{g}) \text{ in } \Omega \subset \mathbf{R}^3,$$

где **u** – вектор скорости (м/с), K – тензор проницаемости (м²), μ – динамическая вязкость флюида (Па·с), p – давление (Па), ρ – плотность флюида (кг/м³), **g** – ускорение свободного падения (м/с²).

Уравнение неразрывности для пористых сред имеет вид [16]

(2)
$$\frac{\partial (\varphi \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

где φ – пористость $(0 < \varphi < 1)$, для пустот $\varphi = 1$.

Уравнение состояния слабосжимаемого флюида при постоянной температуре связывает плотность и давление [16]

(3)
$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = C_f,$$

где C_f – изотермическая сжимаемость флюида (Πa^{-1}).

Подставим уравнение (2) в (1) и, при условии, что $dp=\frac{1}{\rho C_{\rm f}} d\rho$, запишем уравнение однофазной фильтрации относительно плотности [16]

(4)
$$\varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu \mathbf{C_f}} \cdot \nabla \rho \right) + 2\rho \mathbf{g} \cdot \nabla \rho = 0,$$

здесь мы применили тождество векторного анализа для $\mathbf{g} = \mathrm{const}$

$$\nabla \cdot (\rho^2 \mathbf{g}) = \rho^2 \nabla \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot \nabla \rho^2 = 2\rho \mathbf{g} \cdot \nabla \rho.$$

Дополним уравнение (4) начальными условиями

(5)
$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \, p|_{t=0} = p_0.$$

Краевые условия, соответствующие перепаду давления, можно получить путём интегрирования уравнения состояния (3)

(6)
$$\rho|_{\Gamma_D} = \rho_0 \exp\left(C_f\left(p|_{\Gamma_D} - p_0\right)\right),\,$$

где Γ_D – верхняя или нижняя граница с краевыми условиями Дирихле.

На границе $\Gamma_N = \partial \Omega \setminus \Gamma_D$ заданы условия непротекания (однородные условия Неймана) в предположении, что $\rho \neq 0$

(7)
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{N} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot (\nabla p \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_{N}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\mathbf{K}}{\mu \mathbf{C}_{f}} \cdot (\nabla \rho \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_{N}} = 0,$$

где **n** – вектор внешней нормали.

4. Вариационная формулировка разрывного метода Галёркина

Введем разбиение области Ω : $\Xi_h = \{\Omega_k\}$, где Ω_k – тетраэдр. Определим решение задачи в виде линейной комбинации полиномов на каждом конечном элементе. Для каждого $\Omega_k \in \Xi_h$ обозначим через m наивысшую локальную степень полиномов. Конечноэлементные пространства определим в виде [5]

(8)
$$V_h = \left\{ v | v \in L^2(\Omega) : v|_{\Omega_K} = P_m(\Omega_K) \,\forall \Omega_K \in \Xi_h \right\},$$

(9)
$$\mathbf{U}_{h} = \left\{ \mathbf{u} | \mathbf{u} \in \left[L^{2} \left(\Omega \right) \right]^{3} : \mathbf{u}|_{\Omega_{K}} = \left[P_{m}(\Omega_{K}) \right]^{3} \, \forall \Omega_{K} \in \Xi_{h} \right\},$$

Для согласования решения на межэлементной границе вводятся операторы скачка и среднего для элементов пространств (8) и (9) как [5]

(10)
$$[v]|_{\Gamma_0} = v_i \mathbf{n}_i + v_j \mathbf{n}_j, \{v\}|_{\Gamma_0} = \frac{1}{2} (v_i + v_j),$$

(11)
$$[\mathbf{u}]|_{\Gamma_0} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i + \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j, \{\mathbf{u}\}|_{\Gamma_0} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j),$$

(12)
$$[v]|_{\partial\Omega} = v\mathbf{n}, \{v\}|_{\partial\Omega} = v,$$

(13)
$$|\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \{\mathbf{u}\}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}.$$

где $\partial\Omega$ – внешняя граница, Γ_0 – смежная граница элементов i и j.

Вариационная формулировка DG-метода для уравнения (4) в IP-форме (Inner Penalty) имеет вид: найти $\rho^h \in V^h \subset V$, что для $\forall v^h \in V^h \subset V$ выполнено [5]

(14)
$$a\left(\rho^{h}, v^{h}\right) + b\left(\rho^{h}, v^{h}\right) = f\left(v^{h}\right),$$

$$(15) \ a\left(\rho^{h}, v^{h}\right) = \int_{\Omega} \varphi \rho_{t}^{h} v^{h} d\Omega + \int_{\Omega} \left(2\rho^{h} \mathbf{g} \cdot \nabla \rho^{h}\right) v^{h} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu \mathbf{C}_{f}} \cdot \nabla \rho^{h}\right) \cdot \nabla v^{h} d\Omega,$$

(16)
$$b\left(\rho^{h}, v^{h}\right) = -\left(\int_{\Gamma_{0} \cup \partial\Omega} \left[\rho^{h}\right] \cdot \left\{\frac{K}{\mu C_{f}} \cdot \nabla v^{h}\right\} + \left\{\frac{K}{\mu C_{f}} \cdot \nabla \rho^{h}\right\} \cdot \left[v^{h}\right] + \sigma[\rho^{h}] \cdot \left[v^{h}\right] dS\right),$$

(17)
$$f(v^h) = -\int_{\Gamma_D} \rho_D \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu \mathbf{C_f}} \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla v^h + \sigma v^h \right) dS,$$

здесь ρ_D – значение плотности на границе с условием Дирихле, σ – коэффициент стабилизации. Проблема выбора коэффициента стабилизации решена в работе [3]. Отметим, что вариационная формулировка (14) учитывает условие (7) автоматически, как нулевой вклад в правую часть.

Для аппроксимации производной по времени применим неявную схему

$$\rho_t = \frac{\rho^{i+1} - \rho^i}{h_t}.$$

5. Линеаризация уравнения однофазной фильтрации

Линеаризацию нелинейного уравнения однофазной фильтрации на основе вариационной формулировки (14) выполним с помощью метода Ньютона. Запишем СЛАУ конечноэлементной аппроксимации в виде

$$A(\rho) \rho = f,$$

Представим решение задачи в виде суммы

(19)
$$\rho = \rho^0 + \delta \rho,$$

где ρ^0 — начальное приближение, $\delta \rho$ — коррекция.

Вариационная формулировка метода Ньютона-Галёркина относительно коррекции имеет вид: найти $\delta \rho^h \in V^h$, что $\forall v^h \in V^h$ выполнено

(20)
$$a(\delta \rho^h, v^h) + b(\delta \rho^h, v^h) = f(v^h) - a(\rho^0, v^h) - b(\rho^0, v^h)$$

где линейные и билинейные формы определяются соотношениями (15) – (17), при этом на границе Γ_D должны выполняться условия Дирихле

(21)
$$\delta \rho|_{\partial\Omega} = \rho_D - \rho^0.$$

Полученная вариационная формулировка сохраняет однородные условия Неймана.

6. Вычисление эффективного тензора гидравлической проницаемости

Будем предполагать, что перепад давления не влияет на деформацию порового пространства, т.е. тензор гидравлической проницаемости не является функцией давления. Для определения элементов тензора проницаемости необходимо решить обратную коэффициентную задачу

$$\mathbf{A}\mathbf{\Theta} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{A}: X \to Y$ — оператор обратной задачи, $\mathbf{\Theta} \in X$ — вектор неизвестных параметров, $\mathbf{F} \in Y$ — модель наблюдения, X и Y — гильбертовы пространства. Модель наблюдения в общем случае имеет вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* + \xi,$$

где ${\bf F}^*$ — истинные данные, ξ — шум, имеющий нормальное распределение $N(0,\sigma^2).$

В соответствии с принципом Онзагера, тензор гидравлической проницаемости является симметричным [16], поэтому пространство неизвестных параметров состоит из 6 элементов в случае трёхмерного порового пространства и $X=E^6$.

(24)
$$\mathbf{\Theta} = \{k_{xx}, k_{xy}, k_{xz}, k_{yy}, k_{yz}, k_{zz}\}.$$

В общем случае задача (22) является некорректной. Получить приближённое решение задачи (22) можно путём минимизации сглаживающего функционала А.Н. Тихонова [17]

(25)
$$J_{\alpha}(\mathbf{\Theta}) = \|\mathbf{A}\mathbf{\Theta} - \mathbf{F}\|^2 + \alpha \|\mathbf{\Theta}\|^2,$$

где α – параметр регуляризации, который должен быть согласован с величиной ошибки ξ [17].

Таким образом, если Θ^* является приближённым решением задачи (22), то $J_{\alpha}\left(\Theta^*\right)=\min_{\theta\in E^6}J_{\alpha}\left(\Theta\right)$.

В качестве измеряемых данных используется модуль вектора скорости просачивания во всей области Ω (вертикальный пористый цилиндр). Оператор ${\bf A}^{-1}$ является оператором решения прямой задачи (4)-(7). Поскольку разрывный метод Галёркина позволяет определить решение прямой задачи в пространстве $L^2(\Omega)$, то $Y=L^2(\Omega)$ с соответствующей нормой

(26)
$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \phi^2 d\Omega.$$

Минимизация функционала (25) эквивалента минимизации функционала [17]

(27)
$$J_{\alpha}(\boldsymbol{\Theta}) = \int_{T} \int_{\Omega} (F - F^{*})^{2} d\Omega dt + \alpha \|\boldsymbol{\Theta}\|^{2},$$

где F^* — измерения модуля скорости фильтрации в неоднородной (гетерогенной) области Ω , F — модуль скорости фильтрации в однородной (гомогенной) области Ω^0 для заданного набора параметров (24), α — параметр регуляризации.

Из физических соображений на параметры Θ должно быть наложено ограничение

$$(28) 0 < k_{xx}, k_{xy}, k_{xz}, k_{yy}, k_{yz}, k_{zz} < k_{\Omega},$$

где k_{Ω} — априорная гидравлическая проницаемость матрицы среды. Ограничение (28) реализуется как увеличение параметра α для компоненты решения, которая становится отрицательной, и как уменьшение итерационного параметра в случае превышения k_{Ω} .

Пусть ошибка задания правой части уравнения (22) $||F^* - F|| = \delta$ неизвестна, определим квазиоптимальное значение параметра регуляризации по оценке разности приближенных решений на соседних итерациях $||\Theta_{\alpha_{k+1}} - \Theta_{\alpha_k}||$. Алгоритм вычисления параметра регуляризации можно найти в работах [17], [18] и [19].

Согласно работам [16] и [17], функционал (27) является сильно выпуклым. Поэтому для его минимизации можно применить градиентные итерационные методы. Для минимизации функционала (27) можно использовать метод сопряжённых градиентов Флетчера-Ривса.

Основой градиентных методов является утверждение о том, что если в некоторой точке $p \in P$ градиент функционала J(p) не равен нулю, то, двигаясь в направлении антиградиента в точку $(p + \delta p)$, можно уменьшить значение

функционала $J(p + \delta p)$ при условии, что шаг спуска достаточно мал [20]. Метод Флетчера-Ривса позволяет минимизировать выпуклую квадратичную пмерную функцию за (n+1)-итерацию.

Введём вспомогательные обозначения. Вектор градиента функционала (27) обозначим как

(29)
$$\mathbf{d} = 2 \int_{0}^{T} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_{i}} \right)^{T} (F - F^{*}) dt + 2\alpha \mathbf{\Theta}.$$

Пусть $\Theta^{(0)}$ — начальное приближение, ${\bf s}$ — вектор направления, n — текущая итерация. Векторная функция чувствительности имеет вид

(30)
$$\Psi = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \theta_i}, i = 1..6 \right\},\,$$

градиент функционала (27) без регуляризации

(31)
$$\nabla J = \left\{ \frac{\partial J}{\partial \theta_i} = 2 \int_0^T \frac{\partial F}{\partial \theta_i} (F - F^*) \ dt, i = 1..6 \right\}.$$

Алгоритм метода Флетчера-Ривса [20]:

- (1) выбрать $\mathbf{\Theta}^{(0)}$, MAX число итераций, итерационный параметр $\tau^{(0)}$; (2) вычислить $\mathbf{d}^{(0)}\left(\mathbf{\Theta}^{(0)}\right)$, $\mathbf{s}^{(0)}:=-\mathbf{d}^{(0)}$;

$$(4) \ \tau^{(n+1)} := \arg\min_{\beta} J\left(\mathbf{\Theta}^{(n)} + \beta^{(n)}\mathbf{s}^{(n)}\right) = -\frac{\left(\mathbf{d}^{(n)}\right)^{T} \cdot (\nabla J)}{\left(\mathbf{d}^{(n)}\right)^{T} \left(\int_{0}^{t} \mathbf{\Psi}^{T} \cdot \mathbf{\Psi} dt\right) \cdot \left(\mathbf{d}^{(n)}\right)};$$

- (5) $\Theta^{(n+1)} := \Theta^{(n)} + \tau^{(n)} \mathbf{s}^{(n)};$ (6) вычислить $\mathbf{d}^{(n+1)} \left(\Theta^{(n+1)} \right)$

(7)
$$\mathbf{s}^{(n+1)} := -\mathbf{d}^{(n+1)} + \mathbf{s}^{(n)} \frac{\left(\mathbf{d}^{(n+1)}, \mathbf{d}^{(n)}\right)}{\left(\mathbf{d}^{(n)}, \mathbf{d}^{(n)}\right)};$$

- (8) n := n + 1;(9) $\mathbf{s}^{(n)} := -\mathbf{d}^{(n)};$
- (10) if $\|\mathbf{d}^{(n)}\| < \varepsilon$ or n > MAX then STOP else go to 4.

Алгоритм Флетчера-Ривса использует функцию чувствительности Ψ . Применим для её вычисления следующее выражение [7]

(32)
$$\frac{\partial F}{\partial \theta_{i}} = \frac{F(\theta_{i} + \Delta \theta_{i}) - F(\theta_{i})}{\Delta \theta_{i}},$$

где
$$\Delta \theta_i = \theta_i^{(n)} - \theta_i^{(n-1)}$$
.

Особенностью градиентных итерационных методов является их чувствительность к выбору начального значения $\Theta^{(0)}$, поэтому при приближении к точному решению могут наблюдаться осцилляции градиента функционала (27). В связи с этим предлагается использовать метод Ньютона для локальной минимизации функционала (27) с начальным приближением параметров после останова метода Флетчера-Ривса.

Локальный метод Ньютона

Пусть $\Theta^{(0)}$ – результат минимизации функционала (27) по методу Флетчера-Ривса. Поскольку $J_{\alpha}(\mathbf{\Theta}) \in C^{2}(\Omega)$, то в окрестности точки $\mathbf{\Theta}^{(0)}$ можно использовать разложение в ряд Тейлора функции многих переменных до полинома второй степени

(33)
$$J_{\alpha}(\boldsymbol{\Theta}) = J_{\alpha}\left(\boldsymbol{\Theta}^{(0)}\right) + \nabla J_{\alpha}\left(\boldsymbol{\Theta}^{(0)}\right)^{T} \cdot (\Delta\boldsymbol{\Theta}) + \frac{1}{2}\left(\Delta\boldsymbol{\Theta}\right)^{T} \cdot H\left(\boldsymbol{\Theta}^{(0)}\right) \cdot (\Delta\boldsymbol{\Theta}) + o\left(\|\Delta\boldsymbol{\Theta}\|^{2}\right),$$

где $\mathbf{H}\left(\mathbf{\Theta}^{(0)}\right)$ – матрица Гессе, $\Delta\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta} - \mathbf{\Theta}^{(0)}$.

Необходимым и достаточным условием существования экстремума сильно выпуклого функционала является равенство нулю его градиента

(34)
$$\nabla J_{\alpha}(\mathbf{\Theta}) = \nabla J_{\alpha} \left(\mathbf{\Theta}^{(0)}\right)^{T} + \mathbf{H} \left(\mathbf{\Theta}^{(0)}\right) \cdot (\Delta \mathbf{\Theta}) = 0,$$

откуда

(35)
$$\mathbf{\Theta}^{(n+1)} = \mathbf{\Theta}^{(n)} - \left[\mathbf{H} \left(\mathbf{\Theta}^{(n)} \right) \right]^{-1} \cdot \nabla J_{\alpha} \left(\mathbf{\Theta}^{(n)} \right).$$

Алгоритм итерационного метода минимизации функционала (27) принимает вид:

- (1) выбрать начальное приближение $\Theta^{(0)}$;
- (2) согласовать выбор параметра регуляризации α с ошибкой задания модели наблюдения;
- (3) выполнить не менее 7-ми итераций метода Флетчера-Ривса;
- (4) продолжить минимизацию с помощью метода Ньютона для полученного решения, пока не выполнено условие $\frac{\|J(\mathbf{\Theta}^{(n+1)}) J(\mathbf{\Theta}^{(n)})\|}{\|J(\mathbf{\Theta}^{(n)})\|} < \varepsilon$.

Отметим, что $J\left(\mathbf{\Theta}^{(n)}\right)$ вычисляется по формуле (27) при $\alpha=0$.

7. Алгоритм зашумления данных

Результаты решения обратной задачи для определения эффективного тензора гидравлической проницаемости целесообразно привести для разных уровней зашумления данных в модели наблюдения. В качестве синтетических данных используется модуль скорости просачивания в неоднородной (гетерогенной) среде, содержащей поры с нефтью. Предлагается использовать уровни зашумления синтетических данных 5, 10 и 15%.

Генерацию нормально распределённой случайной величины можно выполнить с помощью функции NormalDistribution(Value) из сборки System. Web. Data Visualization.dll для платформы .NET. Данное распределение имеет среднее значение 0 со стандартным отклонением 1. Предположим, что истинное измерение модуля скорости фильтрации изменяется в отрезке $[F\min, F\max]$. Тогда случайную величину зашумления можно выразить как

$$\xi = \lambda F$$
 NormalDistribution (f) ,

где λ — уровень зашумления (0.05, 0.1 или 0.15), F — модуль скорости фильтрации, f — масштабированный модуль скорости в отрезке [–1, 1], который вычисляется по формуле

$$f = \frac{2F - (F_{\text{max}} + F_{\text{min}})}{F_{\text{max}} - F_{\text{min}}}.$$

8. Анализ функции чувствительности и градиента функционала ошивки

Поскольку для вычисления функций чувствительности (30) и градиента функционала (31) требуется дополнительное решение прямой задачи при малых вариациях компонент тензора проницаемости, то целесообразно выяснить, при каких возмущениях допустим данный подход.

Рассмотрим прямую задачу (4)-(7) в однородной среде Ω^0 цилиндрической формы. Ось цилиндра лежит между точками (0,0,0) и (0,0,5), радиус цилиндра R=1. Флюид – вода. Перепад давления по высоте цилиндра составляет 10^4 Па, и градиент давления сонаправлен с вектором свободного падения (сверху вниз). Параметр микропористости матрицы выберем $\varphi=20\%$. Для начального приближения предлагается использовать вектор $\Theta^{(0)}=\{\theta_i=0.1\}$. Рассмотрим функции чувствительности (32) с $\Delta\theta_i=0.05\theta_i,\,0.1\theta_i$ и $0.15\theta_i,\,$ что соответствует возмущению его компонент $5,\,10$ и $15\%,\,$ соответственно.

Расчётная область Ω^0 и её триангуляция представлены на рис. 2. Для решения прямой задачи используется разрывный метод Галёркина с линейными скалярными базисными функциями. Систему линейных алгебраических уравнений предлагается решать смешанным итерационным методом BiCGStab и GMRES(5) в качестве сглаживателя.

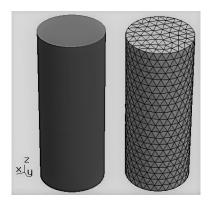


Рис. 2. Расчётная область Ω и триангуляция: 3760 тетраэдров, 15040 степеней свободы

На рис. 3 представлены графики функций чувствительности (32) в зависимости от возмущения компонент тензора гидравлической проницаемости. Изменяется только одна компонента тензора при фиксированном значении остальных.

Графики функций чувствительности вдоль оси цилиндра при возмущении компонент выбранного начального тензора проницаемости показывают, что удовлетворительную оценку функции чувствительности с помощью решения прямой задачи можно получить для уровня возмущения не более 10%. Отмечается быстрый рост функции чувствительности при возмущении недиагональных компонент тензора проницаемости. Так, для компоненты k_{xy} возмущение 15% приводит к значению функции чувствительности 10^4 , что может вызвать осцилляции градиента функционала обратной задачи и привести к физически нерелевантному решению задачи минимизации.

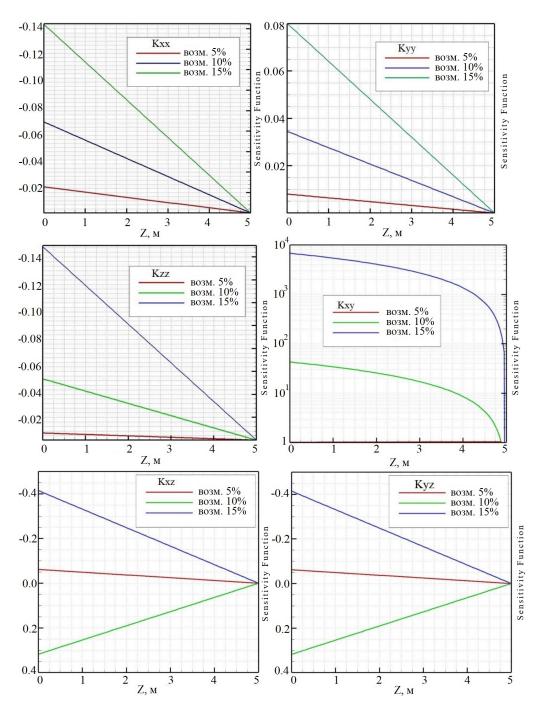


Рис. 3. Функции чувствительности для разных возмущений компонент тензора проницаемости

Пусть оператор прямой задачи $\mathbf{L}: X \to Y$ действует из вещественного банахова пространства X в аналогичное пространство Y. Производная Фреше оператора прямой задачи является линейным оператором $\mathbf{P}: X \to Y$

(36)
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{L} (\mathbf{\Theta} + \mathbf{h}) - \mathbf{L} (\mathbf{\Theta}).$$

Если производная Фреше существует, то оператор прямой задачи непрерывен и определён в каждой точке области Ω^0 . Нарушение данного условия может привести к некорректности задачи (22), поскольку в этом случае оператор \mathbf{A}^{-1} может быть определён не на всём пространстве H. Для проверки существования производной Фреше можно воспользоваться SVD-разложением (Singular Value Decomposition) её матрицы. Предлагается использовать QR-алгоритм для построения сингулярного разложения матрицы производной Фреше оператора прямой задачи. Диагональная матрица SVD-разложения состоит из сингулярных чисел, упорядоченных по убыванию. Ранг данной матрицы должен совпадать с рангом матрицы оператора прямой задачи [16]. QR-алгоритм можно найти в работе [16].

На рис.4 и 5 показаны сингулярные числа SVD-разложения матрицы Фреше оператора прямой задачи для аппроксимации с помощью непрерывного метода Галёркина (классический метод конечных элементов) и разрывного метода Галёркина.

Анализ графиков на рис. 4 и 5 позволяет сделать вывод, что возмущение недиагональных элементов тензора проницаемости приводит к сингулярновозмущённой прямой задаче в дискретной постановке классического метода Галёркина. При этом ранги матрицы сингулярных чисел и матрицы оператора прямой задачи не совпадают. Использование специальных вычислительных схем разрывного метода Галёркина позволяет эффективно аппроксимировать сингулярно-возмущённые операторы прямых задач [3].

Единственность решения обратной задачи (22) и существование градиента функционала (31) согласно работам [16], [17] могут быть обеспечены использованием устойчивых вычислительных схем для решения соответствующих прямых сингулярно-возмущённых задач и эффективной схемой регуляризации в случае некорректно заданной модели наблюдений. Для рассмотренной расчётной области при начальном приближении тензора гидравлической проницаемости $\Theta^{(0)} = \{\theta_i = 0.1\}$ установлен допустимый порог возмущения данных не более чем на 10% при использовании разрывного метода Галёркина для решения прямой задачи.

Чувствительность градиента функционала (27) к вариациям компонент тензора согласно формуле (31) определяется функцией чувствительности (32). Поэтому графики частных производных $\frac{\partial J}{\partial \theta_i}$ отличаются от графиков функций чувствительности только масштабом $2(F-F^*)$.

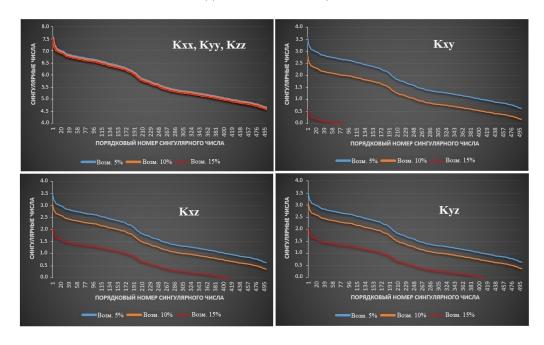


Рис. 4. Сингулярные числа матрицы Фреше: классический МКЭ

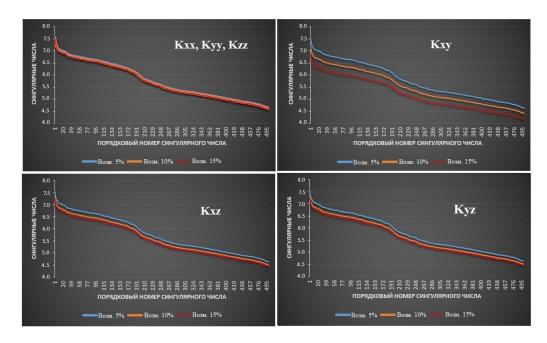


Рис. 5. Сингулярные числа матрицы Фреше: разрывный МКЭ

9. Результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим пористые среды, представленные на рис. 1. Для каждой среды определим эффективный тензор гидравлической проницаемости, который описывает макроскопическую гидравлическую проницаемость однородной цилиндрической среды Ω^0 , представленной на рис. 2.

Ось цилиндра лежит между точками (0,0,0) и (0,0,5), радиус цилиндра R=1. Флюид – вода $(\rho=1000~{\rm kr/m^3},\,C_f=4.1\cdot 10^{10}~{\rm Ha^{-1}})$. Перепад давления по высоте цилиндра составляет $10^4~{\rm Ha}$, и градиент давления сонаправлен с вектором свободного падения (сверху вниз). Проницаемость матрицы среды по воде постоянна и составляет $10^{-5}~{\rm m^2}$. Поры полностью заполнены нефтью, проницаемость которой по воде $10^{-8}~{\rm m^2}$. Параметр микропористости матрицы $\varphi=20\%$. Начальное приближение $K^{(0)}=\{k_{ij}|k_{ij}=0.1\}$. Рассмотрим зашумление модели наблюдения с величиной 5, 10 и 15%.

Для решения прямой задачи используется разрывный метод Галёркина с линейными скалярными базисными функциями. Систему линейных алгебраческих уравнений в результате конечноэлементной аппроксимации предлагается решать смешанным итерационным методом BiCGStab и GMRES(5) в качестве сглаживателя. Для аппроксимации по времени используется неявная двухслойная схема. Отрезок по временной оси $[0,10^5]$ с шагом $h_t=100$.

Приведём таблицы, которые содержат информацию об уровне зашумления измерений модуля скорости просачивания в неоднородной среде, вычисленный параметр регуляризации по методу квазиоптимального значения, эффективный тензор и относительную погрешность решений.

Относительная погрешность решения определяется в норме пространства $L^2(\Omega)$ по формуле

$$\Delta = \frac{\int_{\Omega} (F - F^*)^2 d\Omega}{\int_{\Omega} (F^*)^2 d\Omega} \cdot 100\%,$$

где F – модуль скорости просачивания в однородной среде с вычисленным эффективным тензором проницаемости, F^* – модуль скорости просачивания в пористой неоднородной среде.

Величина F^* получена в результате предварительного решения прямой задачи (4) – (7) в неоднородной среде с учётом пор, заполненных нефтью. Алгоритм зашумления описан выше.

Вычисленный тензор проницаемости будет приводиться с двумя верхними индексами K^{M+N} , где M — число итераций метода Флетчера-Ривса, N — число итераций метода Ньютона.

Слоистая пористая среда: ортотропия

Рассмотрим слоистую пористую среду, изображённую на рис. 1а. Теоретически известно, что такая структура среды обладает ортотропными физическими свойствами, т.е. одно из главных направлений осей тензора должно совпадать с ортом декартовой системы координат. В рассматриваемом случае одно из главных направлений совпадаем с осью Oz. Триангуляция неоднородной среды представлена на рис. 6

Результаты решения задачи просачивания в неоднородной среде представлены на рис. 7 и 8.

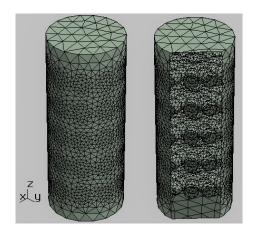


Рис. 6. Слоистая пористая среда (пористость 54%): 54571 тетраэдр, 218284 степени свободы

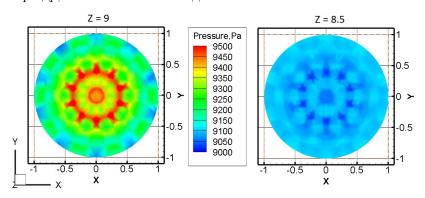


Рис. 7. Распределение давления в плоскости xOy

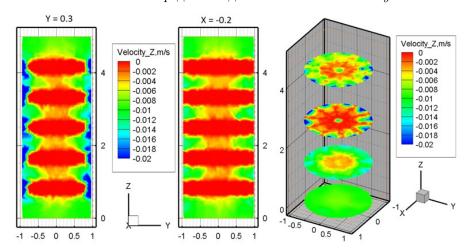


Рис. 8. Распределение z-компоненты вектора скорости

В таблице 1 представлены результаты решения обратной задачи для разного уровня зашумления измерений модуля скорости просачивания, влияние параметра регуляризации на погрешность решения обратной коэффициентной задачи. Выполнена оценка относительной погрешности модуля скорости просачивания Δ в однородной и в неоднородной средах.

Таблица 1. Эффективный тензор и погрешность: ортотропи:	Таблица 1.	Эффективный	тензор и	погрешность:	виподтотдо
---	------------	-------------	----------	--------------	------------

Уровень шума, %	Регуляр. α	Тензор гидравлической проницаемости, м ²	$\Delta,\%$
5	1.2e - 9	$K^{10+5} = \begin{pmatrix} 1.62e - 6 & 3.81e - 6 & 4.73e - 7 \\ 3.81e - 6 & 5.13e - 6 & 1.26e - 7 \\ 4.73e - 7 & 1.26e - 7 & 8.23e - 7 \end{pmatrix}$	2.31
10	5.2e - 9	$K^{10+9} = \begin{pmatrix} 3.91e - 6 & 5.44e - 6 & 5.11e - 7 \\ 5.44e - 6 & 2.78e - 6 & 3.89e - 7 \\ 5.11e - 7 & 3.89e - 7 & 3.19e - 7 \end{pmatrix}$	3.91
15	9.4e - 9	$K^{10+10} = \begin{pmatrix} 8.36e - 6 & 8.35e - 6 & 2.99e - 6 \\ 8.35e - 6 & 1.36e - 6 & 6.56e - 6 \\ 2.99e - 6 & 6.56e - 6 & 6.23e - 6 \end{pmatrix}$	11.71

Равномерно заполненная пористая среда (пористость 2% и 4%)

Рассмотрим пористые среды, изображённые на рис. 16 и 1с. Главные направления осей тензора гидравлической проницаемости выделить невозможно. Триангуляции неоднородных сред представлены на рис. 9. Результаты решения задачи в неоднородной среде с пористостью 4% приведены на рис. 10.

В таблицах 2 и 3 содержатся результаты решения обратной задачи для пористости 2 и 4%, соответственно.

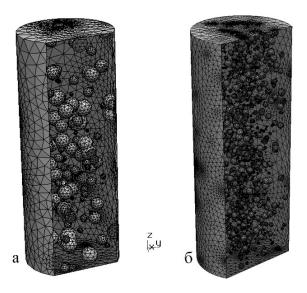


Рис. 9. Пористая среда «а» (пористость 2%): 176718 тетраэдров, 707272 степени свободы; Пористая среда «б» (пористость 4%): 1622528 тетраэдров, 6490112 степеней свободы

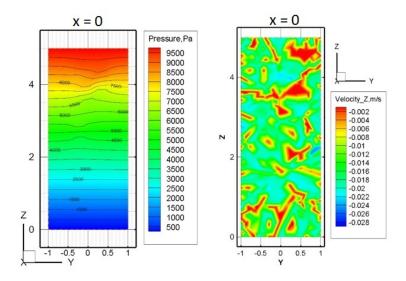


Рис. 10. Распределение давления и z-компоненты вектора скорости в плоскости yOz (пористость 4%)

Таблица 2. Эффективный тензор и погрешность: пористость 2%

Уровень шума, %	Регуляр. α	Тензор гидравлической проницаемости, м ²	$\Delta,\%$
5	5.2e - 9	$K^{10+4} = \begin{pmatrix} 7.19e - 6 & 7.61e - 6 & 5.78e - 6 \\ 7.61e - 6 & 8.78e - 6 & 6.13e - 6 \\ 5.78e - 6 & 6.13e - 6 & 4.97e - 6 \end{pmatrix}$	3.65
10	6.5e - 9	$K^{10+7} = \begin{pmatrix} 6.31e - 6 & 6.17e - 6 & 9.56e - 6 \\ 6.17e - 6 & 5.91e - 6 & 5.73e - 6 \\ 9.56e - 6 & 5.73e - 6 & 9.31e - 6 \end{pmatrix}$	4.13
15	1.8e - 8	$K^{10+10} = \begin{pmatrix} 5.12e - 6 & 4.89e - 6 & 3.17e - 6 \\ 4.89e - 6 & 6.34e - 6 & 5.42e - 6 \\ 3.17e - 6 & 5.42e - 6 & 8.38e - 6 \end{pmatrix}$	4.48

Таблица 3. Эффективный тензор и погрешность: пористость 4%

Уровень шума, %	Регуляр. α	Тензор гидравлической проницаемос	ти, м ² Δ ,	, %
5	6.1e - 9	$K^{10+4} = \begin{pmatrix} 6.35e - 6 & 4.56e - 6 & 6.03 \\ 4.56e - 6 & 5.91e - 6 & 4.99 \\ 6.03e - 6 & 4.99e - 6 & 6.49 \end{pmatrix}$	e - 6 4.0	03
10	9.3e - 9	$K^{10+7} = \begin{pmatrix} 8.12e - 6 & 5.93e - 6 & 4.59 \\ 5.93e - 6 & 7.28e - 6 & 5.91 \\ 4.59e - 6 & 5.91e - 6 & 8.28 \end{pmatrix}$	e-6 5.9	91
15	8.2e - 8	$K^{10+10} = \begin{pmatrix} 6.32e - 6 & 5.49e - 6 & 8.32 \\ 5.49e - 6 & 5.91e - 6 & 5.32 \\ 8.32e - 6 & 5.32e - 6 & 6.92 \end{pmatrix}$	ee-6 6.3	39

10. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для пористой слоистой среды с пористостью $\varphi=54\%$ получены эффективные тензоры гидравлической проницаемости ортотропной структуры при уровнях зашумления 5 и 10% с относительной погрешностью 2.31 и 3.91%, соответственно. Ортотропия наблюдается вдоль осей Ox и Oy, что соответствует структуре неоднородной слоистой среды. Для уровня зашумления 15% не удалось восстановить ортотропную структуру тензора, о чём говорит высокий уровень полученной погрешности в 11.71%. Число итераций локальной минимизации методом Ньютона увеличивается с увеличением ошибки модели наблюдения.

Для пористых неоднородных равномерно заполненных сред с пористостью $\varphi=2$ и 4% получены эффективные тензоры проницаемости, в которых нельзя выделить главные направления осей, что соответствует исходной структуре неоднородной среды. Относительные погрешности решения, вычисленные для разных уровней зашумления измерений модуля скорости просачивания, близки. В данной ситуации компоненты тензора гидравлической проницаемости соизмеримы в логарифмическом масштабе в отличие от пористой слоистой среды, поэтому при выбранном алгоритме вычисления параметра регуляризации удаётся построить устойчивую итерационную процедуру решения обратной задачи для уровня зашумления от 0 до 15%. Аналогичные результаты были получены в работах [6] и [7].

11. Заключение

Решение задачи математического моделирования процесса просачивания однофазного флюида в пористых средах основано на применении многомасштабного подхода. В рамках данного подхода выделены два уровня иерархии пористой среды: мезоуровень и макроуровень. Связь уровней обеспечена численной гомогенизацией пористой неоднородной среды, которая основана на решении обратной коэффициентной задачи по определению эффективного тензора гидравлической проницаемости макроскопической однородной среды.

Для решения прямой задачи просачивания на мезо- и макроуровне, описываемой уравнением однофазной фильтрации для слабосжимаемого флюида, используется разрывный метод Галёркина в несимметричной форме "Inner Penalty" на тетраэдральных сетках. Метод является локально консервативным и обеспечивает устойчивое решение сингулярно-возмущённой задачи просачивания.

Для решения обратной коэффициентной задачи выбраны итерационные методы. Глобальный метод минимизации функционала качества основан на градиентном методе Флетчера-Ривса, локальное уточнение решения выполняется с помощью метода Ньютона. В качестве модели наблюдения используются измерения модуля скорости просачивания в неоднородной среде.

Рассмотрены три типа пористых сред: пористая ортотропная среда с пористостью 54% и равномерно заполненные пористые среды с пористостью 2 и 4%. Для ортотропной среды эффективный тензор гидравлической проницаемости удалось восстановить для уровней зашумления модели наблюдения до 10% с величиной относительной погрешности модуля скорости просачивания до 3.91%. Для равномерно заполненных пористых сред эффективная оценка тензора гидравлической проницаемости выполнялась для диапазона зашумления от 0 до

15% с погрешностью до 6.39%. Для равномерно заполненных пористых сред практически установлена соизмеримость компонент тензора гидравлической проницаемости в логарифмическом масштабе, поэтому при выбранном алгоритме вычисления параметра регуляризации удаётся построить устойчивую итерационную процедуру решения обратной задачи для уровня зашумления до 15%.

References

- T. Xu, P.G. Ranjith, A.S.K. Au, P.L.P. Wasantha, T.H.Yang, C.A. Tang, H.L. Liu, C.F. Chen, Numerical and experimental investigation of hydraulic fracturing in Kaolin clay, Journal of Petroleum Science and Engineering, 134 (2015), 223–236.
- [2] Y. Wang, S. Wang, Sh. Xue, D. Adhikary, Numerical Modeling of Porous Flow in Fractured Rock and Its Applications in Geothermal Energy Extraction, Journal of Earth Science, 26:1 (2015), 20–27. DOI: 10.1007/s12583-015-0507-1.
- [3] N.B. Itkina, S.I. Markov, Discontinuous Galerkin Method for solution of singularly perturbed problems, Computational technologies, 21:4 (2016), 49–63. Zbl 1352.65514
- [4] B. Cocburn, Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems, High-Order Methods for Computational Physics, 9 (2005), 69—224.
- [5] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cocburn, D. Marini, Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, SIAM J. Numer. Anal., 39:5 (2002), 1749–1779. Zbl 1008.65080
- [6] A. Boschan, B. Noetinger, Scale Dependence of Effective Hydraulic Conductivity Distributions in 3D Heterogeneous Media: A Numerical Study, Transport in Porous Media, 94:1 (2012), 101–121.
- M.R. Karim, K. Krabbenhoft, New Renormalization Schemes for Conductivity Upscaling in Heterogeneous Media, Transp. Porous Med., 85 (2010), 677-690. DOI: 10.1007/s11242-010-9585-9. MR2740217
- [8] V. V. Zhikov, Connectedness and homogenization. Examples of fractal conductivity, Sb. Math., 187:8 (1996), 1109—1147. MR1418340
- [9] O. A. Oleinik, V. V. Zhikov, On the homogenization of elliptic operators with almost-periodic coefficients, Seminario Mat e Fis di Milano, 52:1 (1982), 149–166. MR0802999
- [10] S. A. Nazarov, A. S. Slutskii, Branching periodicity: Homogenization of the Dirichlet problem for an elliptic system, Doklady Mathematics, 70:1 (2004), 628. MR2120175
- [11] Y. Amirat, V.V. Shelukhin, Homogenization of composite electrets, European Journal of Applied Mathematics, 28:2 (2017), 261–283. MR3613311
- [12] Y. Amirat, V.V. Shelukhin, Nonhomogeneous incompressible herschel-bulkley fluid flows between two eccentric cylinders, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 15:4 (2013), 635– 661. MR3127012
- [13] E. A. Borges da Silva, D. P. Souza, A. A. Ulson de Souza, S. M. A. Guelli, U. de Souza, Prediction of effective diffusivity tensors for bulk diffusion with chemical reactions in porous media, Brazilian Journal of Chemical Engineering, 24:1 (2007), 47–60.
- [14] C. Engström, Inverse Bounds of Two-Component Composites, SIAM Journal of Applied Mathematics, 68:3 (2007), 666–679. MR2375289
- [15] S. K. Schnyder, M. Spanner, F. Höfling, T. Franosch, J. Horbach, Rounding of the localization transition in model porous media, Soft Matter, 11 (2015), 701–711.
- [16] A. Tarantola, Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation, Paris: SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [17] A.N. Tikhonov, A.V. Goncharsky, V.V. Stepanov, A.G. Yagola, Numerical methods for solving noncorrect problems, Moscow: Nauka, 1990. MR1126915
- [18] A.A. Samarsky, P.N. Vabishchevich, Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics, Moscow: Publishing house LCI, 2009.
- [19] A.N. Tikhonov, A.A. Samarsky, Methods of mathematical modeling, automation of observation processing and their applications, Moscow: MSU, 1986. Zbl 0612.00003
- [20] Khalil K. Abbo, Farah H. Mohammed, Spectral Fletcher-Reeves algorithm for solving nonlinear unconstrained optimization problems, Iraqi Journal of Statistical Sciences, (2011), 21–38.

SERGEY IGOREVICH MARKOV
NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
PROSPEKT K. MARKSA, 20,
630073, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
TROFIMUK INSTITUTE OF PETROLEUM GEOLOGY AND GEOPHYSICS SB RAS,
KOPTUG AVE. 3,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: www.sim91@list.ru

Natalya Borisovna Itkina Novosibirsk State Technical University, Prospekt K. Marksa, 20, 630073, Novosibirsk, Russia *E-mail address*: itkina.nat@yandex.ru