S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1182–1197 (2018) УДК 517.54, 517.97
DOI 10.17377/semi.2018.15.096 MSC 30C65, 30G35, 53C17

РАВНОМЕРНОСТЬ cc-ШАРОВ НА ОДНОМ КЛАССЕ 2-СТУПЕНЧАТЫХ ГРУПП КАРНО

А.В. ГРЕШНОВ

Abstract. For some class of 2-step Carnot groups $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ that includes Heizenberg groups we proved that Carnot-Carathéodory balls (cc-balls) of these groups are uniform domains. We studied the geometry of the set of points of $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ joined with identity element of $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ more than one Carnot-Carathéodory cc- shortest path.

Keywords: Carnot-Carathéodory shortest path, cc-ball, extremal, uniform domain, Heisenberg groups

1. Введение

Пусть (X, d) — метрическое пространство с метрикой d такое, что для любых точек $x, y \in X$ существует параметризованная кривая $\gamma = \gamma(s) : [0, s_0] \to X$ конечной длины $l(\gamma)$ такая, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(s_0) = y$; длина кривой определяется, используя d, стандартным образом (см., например, [1]). Дополнительно предположим, что для любых точек $x, y \in X$ существует *кратчайшая*, т. е. кривая, принадлежащая X, соединяющая x, y, длина которой равна $d(x, y)$. Если на (X, d) задана нетривиальная борелевская мера μ такая, что выполняется следующее *условие удвоения* $\mu(B(x, r)) \leq D\mu(B(x, r/2))$, где константа D не зависит от выбора центра x и радиуса r (открытого) шара $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$, то будем называть такое метрическое пространство (X, d) *пространством однородного типа с внутренней метрикой.* Нетривиальными примерами пространств однородного типа с внутренней метрикой являются эквирегулярные пространства Карно — Каратеодори, в частности,

Greshnov, A.V., Uniformity of cc-balls on some class of 2-step Carnot groups.

Публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Проект № 1.3087.2017/4.6).

Поступила 20 августа 2018 г., опубликована 16 октября 2018 г.

группы Карно, с метриками Карно — Каратеодори (см. [2]) и мерой Лебега, не являющимися римановыми даже локально.

Определение 1. *Область $\mathcal{D} \subset X$ называется равномерной, если существуют константы (равномерности) a, b такие, что всякая пара точек $x, y \in \mathcal{D}$ может быть соединена кривой $\gamma \subset \mathcal{D}$ конечной длины, для которой выполняются следующие условия равномерности*

$$\begin{cases} l(\gamma) \leq ad(x,y), \\ \min\{l(\gamma(x,z)), l(\gamma(z,y))\} \leq bd(z, \partial\mathcal{D}), \quad z \in \gamma, \end{cases}$$

где $\gamma(x,z)$ — часть кривой γ от точки x до точки z, $\gamma(z,y)$ — часть кривой γ от точки z до точки y.

Равномерные области играют важную роль в теории пространств Соболева и BMO (см., например, [3, 4, 5]). В связи с интенсивным развитием геометрического анализа в субримановой геометрии (в частности, теории функциональных пространств Соболева и BMO и связанных с ними квазиконформных отображений) стала актуальна проблема существования ограниченных равномерных областей на группах Карно. В настоящее время положительный ответ на этот вопрос получен только для 2-ступенчатых групп Карно (см. [5, 6, 7]). Однако, даже для 2-ступенчатых групп Карно в общем случае не известно — является ли шар в метрике Карно — Каратеодори (*cc-шар*) равномерной областью или нет. Такой вопрос является совершенно естественным, поскольку в римановой метрике локально любой метрический шар очевидно является равномерной областью. На сегодняшний день известно только, что cc-шары групп Гейзенберга является равномерными областями [5, 8]. В настоящей работе на некотором классе 2-ступенчатых групп Карно, в некотором смысле обобщающем группы Гейзенберга, мы доказали, что их cc-шары являются равномерными областями. Для описания данного класса 2-ступенчатых групп Карно приведем необходимые определения.

Напомним, что алгебра Ли V называется *градуированной* [9], если $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} V_i$, и при этом

$$\begin{cases} [V_i, V_k] \subset V_{i+k}, & i+k \leq r, \\ [V_i, V_k] = 0, & i+k > r. \end{cases}$$

r-ступенчатая *стратифицированная* [10] алгебра Ли V — это нильпотентная степени r алгебра Ли, обладающая *стратификацией*, т. е. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} V_i, \quad V_{i+1} = [V_1, V_i]$, $[V_1, V_r] = \{0\}$. *r-ступенчатой алгеброй Карно* [11] называется градуированная r-ступенчатая стратифицированная алгебра Ли; группа Ли $\mathbb{G}$, соответствующая r-ступенчатой алгебре Карно, называется *r-ступенчатой группой Карно.* Расстояние Карно — Каратеодори [2] $\rho_{cc}(u,v)$ для любых двух точек $u, v \in \mathbb{G}$ определяется как точная нижняя грань всех *горизонтальных* путей, т. е. таких параметризованных кривых $\gamma(t) : [0, t_0] \to \mathbb{G}$, что $\dot{\gamma}(t) \in V_1(\gamma(t))$ для почти всех t, соединяющих u, v (возможность соединения произвольных двух точек группы Карно горизонтальным путем вытекает из известной теоремы Рашевского — Чоу [2]).

В дальнейшем мы будем использовать аналитическое описание групп Карно как канонических групп (или группалгебр [12]). Под канонической конечномерной группой Ли мы подразумеваем такую группу Ли, стандартное экспоненциальное отображение exp которой является тождественным. Таким образом, каноническую группу Карно $\mathbb{G}$ можно рассматривать как стандартное пространство $\mathbb{R}^N$ соответствующей размерности, на котором на базисных ортах $\{e_i\}_{i=1,\dots,N}$ задана таблица коммутаторов $[e_i,e_j]=\sum\limits_{k=1}^{N}C_{ij}^k e_k$, используя которую, умножение двух произвольных элементов $x=\sum\limits_{k=1}^{N}x_k e_k$, $y=\sum\limits_{k=1}^{N}y_k e_k\in\mathbb{G}$ определяется по формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа $L_x y = x\cdot y=\sum\limits_{k=1}^{N}f_k(x,y)e_k$ (левый сдвиг элемента y на элемент x); точка $O=(0,\dots,0)$ (начало координат $\mathbb{R}^N$) является единицей канонической группы Карно $\mathbb{G}$.

Пусть $\dim V_i=n_i$, $\{X_1,\dots,X_N\}$, $N=\dim V$, — базис канонических левоинвариантных векторных полей группы Карно $\mathbb{G}$, который определяется стандартным образом при помощи формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа (см. [12]), упорядоченных таким образом, что значения первых n_1 из них (*горизонтальные векторные поля*) в каждой точке $v\in\mathbb{G}$ образуют базис подпространства $V_1(v)$, значения следующих n_2 из них в каждой точке $v\in\mathbb{G}$ образуют базис подпространства $V_2(v)$, и т. д.; при этом мы имеем $X_i(0)=e_i$, $i=1,\dots,N$. Каждому векторному полю X_k сопоставим натуральное число $j=\deg X_k$, определяемое по включению $X_k\in V_j$.

Известно, что метрика Карно — Каратеодори группы Карно инвариантна относительно левых сдвигов $\rho_{cc}(u,w)=\rho_{cc}(L_x u, L_x w)$ $\forall u,w,x\in\mathbb{G}$ и действия неоднородной группы растяжений $\rho_{cc}(\delta_t u,\delta_t w)=|t|\rho_{cc}(u,w)$, где $\delta_t u=(t^{\deg X_i}u_i)_{i=1,\dots,N}$. Это позволяет нам утверждать, что если равномерным будет какой-нибудь cc-шар на группе Карно, то и все остальные cc-шары этой группы Карно также будут равномерными областями. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточим наши рассмотрения на cc-шарах с центром в начале координат.

В настоящей работе мы доказываем равномерность cc-шаров на 2-ступенчатых канонических группах Карно $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$, которые определяются в стандартном пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ с системой координат $(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n,z)$ (и соответствующими координатными осями (OX_1), $(OY_1),\dots$, (OX_n), (OY_n), (OZ)) при помощи таблицы коммутаторов $[e_k,e_m]=C_{km}^{2n+1}e_{2n+1}$, где $C_{km}^{2n+1}\neq 0$ лишь только тогда, когда $k=2i-1$, $m=2i$, $i=1,\dots,n$. Мы будем полагать $C_{2i-1\,2i}^{2n+1}>0$, что не уменьшает общности (действительно, в противном случае мы всегда можем перенумеровать базисные орты так, чтобы желаемое условие выполнялось). Обозначим $C_{2i-1\,2i}^{2n+1}=\alpha_i$. В случае, когда $0<\alpha_1=\dots=\alpha_n$ мы получаем n-мерную группу Гейзенберга (см. [8]). В дальнейшем мы полагаем, что

$$0<\alpha_1\le\alpha_2\le\dots\le\alpha_n,\quad \alpha_1<\alpha_n. \tag{1}$$

Группы $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ изучались в работе [13]. Канонические левоинвариантные векторные поля $X_1,Y_1,\dots,X_n,Y_n,Z$ группы $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ имеют вид

$$X_i=e_{2i-1}-\frac{\alpha_i}{2}y_i e_{2n+1},\ Y_i=e_{2i}+\frac{\alpha_i}{2}x_i e_{2n+1},\ i=1,\dots,n,\quad Z=e_{2n+1}. \tag{2}$$

Непосредственно проверяется, что интегральные линии векторных полей

$$X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n, Z$$

в выбранной системе координат — обычные прямые линии; в частности, их интегральные линии, проходящие через начало координат O совпадают с соответствующими координатными осями пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$. Векторные поля $X_1, Y_1, \dots,\ X_n, Y_n$ горизонтальные. В дальнейшем отрезки интегральных линий горизонтальных векторных полей мы будем называть *горизонтальными отрезками*. Используя (2), мы выводим, что кривая $(x_1, y, \dots, x_n, y_n, z)(s)$, $s \in [0, s_0]$, является горизонтальной на $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ тогда и только тогда, когда для почти всех $s \in [0, s_0]$ выполняется тождество

$$\dot{z}(s) = \frac{\alpha_1}{2}(\dot{y}_1 x_1 - \dot{x}_1 y_1)(s) + \dots + \frac{\alpha_n}{2}(\dot{y}_n x_n - \dot{x}_n y_n)(s). \tag{3}$$

Наше доказательство равномерности cc-шара группы $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ в целом следует методу работы [5].

Определение 2. *Рассмотрим однородное пространство с внутренней метрикой (X, d) и некоторую точку $x \in X$. Множество $N_X(x)$, состоящее из всех точек $y \in X$ таких, что y соединяется с x более, чем одной кратчайшей, мы назовем множеством неединственности для точки $x \in X$.*

Определение 3. *Говорим, что множество $A \subset (X, d)$ имеет топологическую коразмерность больше 1 (top-codim $A > 1$), если для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, найдется кривая $\gamma \subset X$, соединяющая x, y, такая, что $\gamma \subset B(x, Kd(x, y))$, $(\gamma \setminus \{x, y\}) \cap A = \emptyset$, где константа $K \geq 1$ не зависит от выбора x, y.*

Теорема 1 (см. [5]). *Если top-codim $N_X(x) > 1$, то любой шар $B(x, r)$ является равномерной областью.*

Доказательство. Здесь мы кратко изложим доказательство из [5]. Рассмотрим некоторые точки $y, z \in B(x, r)$. Для доказательства равномерности шара $B(x, r)$ нам достаточно рассматривать такие пары точек y, z, что $d(y, z) \leq \varepsilon_0 r$, где ε_0 — некоторое достаточно малое число, зависящее от константы K (эта зависимость будет понятна из дальнейших рассуждений).

Достаточно рассмотреть $y, z \notin N_X(x)$. Так как top-codim $N_x(X) > 1$, то найдется кривая $\gamma \subset B(y, Kd(y, z))$, соединяющая y, z, $\gamma \cap N_x(X) = \emptyset$. Каждая точка кривой $u \in \gamma$ соединяется с x единственной кратчайшей γ_u, поэтому, отступая по γ_u в направлении x на расстояние $10Kd(y, z)$, попадая при этом в точку $u' \in B(x, r)$, мы получим некоторый континуум γ', каждая точка которого отстоит от $\partial B(x, r)$ на расстояние, не меньшее $5Kd(y, z)$; при этом $\gamma' \subset B(y', 20Kd(y, z))$. Используя условие удвоения по мере, мы получаем, что существует не более M точек $\{y_i\}$, принадлежащих γ', таких, что $B(y_i, \frac{d(y,z)}{100}) \cap B(y_j, \frac{d(y,z)}{100}) = \emptyset$ при $i \neq j$, $\gamma' \subset \bigcup\limits_{i=1}^{M} B(y_i, \frac{d(y,z)}{20})$, причем константа M не зависит от $d(y, z)$ (см. необходимые детали, например, в [14]). Тогда, используя радиусы покрывающих множество γ' шаров $\{B(y_i, \frac{d(y,z)}{20})\}$, несложно постоить путь σ, соединяющий точки y', z', длина которого не превосходит величины $M\frac{d(y,z)}{10}$, и который отстоит от $\partial B(x, r)$ на расстояние, не меньшее $2Kd(y, z)$. Пусть σ_y — часть радиуса шара $B(x, r)$ от точки y до точки y', σ_z — часть радиуса шара $B(x, r)$ от точки z до точки z'. Тогда для кривой $\sigma_y \cup \sigma \cup \sigma_z$

выполняются условия равномерности с некоторыми константами a, b, не зависящими от выбора точек $y, z \in B(x,r)$, $d(y,z) \le \varepsilon_0 r$, и $r > 0$. $\square$

Мы доказываем, см. §§ 3.2, 3.3, что top-codim$N_{\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}}(O) > 1$, откуда, с учетом теоремы 1, следует равномерность *cc*-шаров в $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$. Для этого мы изучаем кратчайшие в метрике Карно — Каратеодори (*cc-кратчайшие*) групп $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$. По естественным причинам у этих *cc*-кратчайших много общего с *cc*-кратчайшими групп Гейзенберга, и наши исследования базируются на этом; в § 2 мы приводим необходимые сведения о *cc*-кратчайших групп Гейзенберга из работ [5, 8], а также получаем из этих сведений некоторые свойства, которые используются нами в дальнейшем. В § 3 содержатся основные результаты работы; сначала мы доказываем равномерность шаров на группах $\mathbb{H}_{\alpha_1,\alpha_2}$, см. свойство 4, теорема 4; общий случай $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ получается оттуда как техническое следствие, см. свойство 7, теорема 6.

Отметим, что в настоящей работе мы более подробно, чем это нам нужно для доказательства равномерности *cc*-шаров, изучили геометрические свойства множеств $N_{\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}}(O)$, см. теоремы 5, 7.

Прежде, чем переходить к основному содержанию работы, необходимо сделать следующие важные замечания, которые мы в дальнейшем используем. Во-первых, на сегодняшний день общеизвестным является тот факт, что *cc*-кратчайшие 2-ступенчатых групп Карно являются бесконечно гладкими кривыми; во всяком случае, для канонических групп $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ это несложно проверить непосредственно, например, таким же способом, как это делается на группах Гейзенберга в работе [8]. Во-вторых, используя принцип максимума Понтрягина [15] (или известные рассуждения для решения изопериметрических задач из стандартного курса вариационного исчисления, см., например, [16]), можно показать, что *cc*-кратчайшие $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, t)(s)$, $s \in [0, s_0]$, групп $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ являются экстремалями функционала

$$\int\limits_0^{s_0} \Big(\dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dots + \dot x_n^2 + \dot y_n^2 + \lambda\big(\frac{\alpha_1}{2}(\dot y_1 x_1 - \dot x_1 y_1)(s) + \dots + \frac{\alpha_n}{2}(\dot y_n x_n - \dot x_n y_n)\big)\Big)(s)\, ds,$$

где $\lambda = \mathrm{const}$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору А. А. Аграчеву за интерес к результатам автора и полезные консультации.

2. Результаты о кратчайших группы $\mathbb{H}^1_\alpha$

В данном разделе до § 2.3 мы перечислим некоторые результаты работы [8] и некоторые простые следствия из них, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Любая *cc*-кратчайшая $(x, y, t)(s)$, $s \in [0, s_0]$, группы $\mathbb{H}^1_\alpha$, соединяющая точки $(x, y, t)(0)$, $(x, y, z)(s_0) = (a, b, c)$, является экстремалью функционала

$$\int\limits_0^{s_0} \Big(\dot x^2 + \dot y^2 + \frac{\alpha\lambda}{2}(y\dot x - x\dot y)\Big)\, ds, \quad \lambda = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Полагаем, что точка $(x, y, z)(0)$ совпадает с началом координат O пространства $\mathbb{R}^3$. Экстремали $\gamma_\lambda(s) = (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)(s)$ функционала (4), исходящие из точки O, в случае $\lambda \neq 0$ имеют вид

$$(5)\qquad \begin{cases} x_\lambda(s) = C_1 \sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) + C_2\left(1-\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)\right), & \dot{x}_\lambda(0) = \frac{\alpha\lambda C_1}{2},\\ y_\lambda(s) = C_1\left(1-\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)\right) - C_2 \sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right), & \dot{y}_\lambda(0) = -\frac{\alpha\lambda C_2}{2},\\ C_1, C_2 = \mathrm{const}; \end{cases}$$

в случае $\lambda = 0$ экстремали $\gamma_\lambda(s) = (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)(s)$ — прямолинейные горизонтальные отрезки (см. свойство 3 ниже).

Используя (5) и (3), мы получаем

$$(6)\qquad r_\lambda^2(s) = x_\lambda^2(s) + y_\lambda^2(s) = 2(C_1^2 + C_2^2)\Big(1 - \cos\big(\frac{\alpha\lambda}{2}s\big)\Big),$$

$$z_\lambda(s) = \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^s (x_\lambda\dot{y}_\lambda - y_\lambda\dot{x}_\lambda)(s)\,ds = \frac{\alpha^2\lambda}{4}(C_1^2 + C_2^2)\int\limits_0^s \Big(1 - \cos\big(\frac{\alpha\lambda}{2}s\big)\Big)\,ds$$

$$= \frac{\alpha^2\lambda}{4}(C_1^2 + C_2^2)\Big(s - \frac{2\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)}{\alpha\lambda}\Big),$$

$$\dot{x}_\lambda^2(s) + \dot{y}_\lambda^2(s) = (C_1^2 + C_2^2)\frac{\alpha^2\lambda^2}{4}.$$

Фиксируем вторую концевую точку экстремали $(a, b, c) = (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)(s_0)$, тогда

(7)

$$C_1 = \frac{b\left(1-\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)\right) + a\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)\right)}, \quad C_2 = \frac{a\left(1-\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)\right) - b\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)\right)},$$

откуда следует, что

$$(8)\qquad C_1^2 + C_2^2 = \frac{a^2 + b^2}{2(1 - \cos\frac{\alpha\lambda}{2}s_0)}.$$

2.1. **Описание cc-кратчайших, использующее параметризацию экстремалей длиною дуги.** Если экстремаль γ_λ параметризована длиною дуги, то, принимая во внимание (6), мы имеем

$$(9)\qquad C_1^2 + C_2^2 = \frac{4}{\alpha^2\lambda^2},$$

и тогда

$$(10)\qquad r_\lambda^2(s) = \frac{8}{\alpha^2\lambda^2}\Big(1 - \cos\big(\frac{\alpha\lambda}{2}s\big)\Big), \quad z_\lambda(s) = \frac{\alpha\lambda s - 2\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)}{\alpha\lambda^2}.$$

Из (8) и (9) следует

$$(11)\qquad a^2 + b^2 = \frac{8(1 - \cos\frac{\alpha\lambda}{2}s_0)}{\alpha^2\lambda^2} = g(\lambda) \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} g(\lambda) = s_0^2 = a^2 + b^2.$$

Используя свойства функций из (10), в [8] была доказана (несколько в другой форме) следующая

Теорема 2. *Пусть экстремаль $\gamma_\lambda(s) = (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)(s)$, $s \in [0, 1]$, соединяющая точки O и (a, b, c), параметризована длиной дуги. Тогда*

1^0 *при* $\lambda \in \big[-\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{4\pi}{\alpha}\big]$ *экстремаль* $\gamma_\lambda(s)$ *является сс-кратчайшей*; *более того,*

$$\lambda \in \begin{cases} (0, \frac{4\pi}{\alpha}], & c > 0, \\ [-\frac{4\pi}{\alpha}, 0), & c < 0, \end{cases}$$

$\lambda = 0$ *в случае* $c = 0$,

2^0 *при* $\lambda \in \big(-\infty, -\frac{4\pi}{\alpha}\big) \cup \big(\frac{4\pi}{\alpha}, +\infty\big)$ *экстремаль* $\gamma_\lambda(s)$ *сс-кратчайшей не является,*

3^0 *любая точка* $(a, b, c) \in S_{cc}(O, 1)$, $a^2 + b^2 \neq 0$, *соединяется с началом координат единственной сс-кратчайшей,*

4^0 *точки* $(0, 0, \pm c) \in S_{cc}(O, 1)$ *соединяются с началом координат бесконечным числом сс-кратчайших,*

5^0 *любой тройке* $(\alpha, \beta, \lambda_0)$, *где* $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\lambda_0 \in \big(-\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{4\pi}{\alpha}\big)$, *соответствует единственная точка* (a, b, c), $a^2 + b^2 \neq 0$, *такая, что* $\gamma_{\lambda_0}(1) = (a, b, c)$, $\dot{x}(0) = \alpha$, $\dot{y}(0) = \beta$, *и наоборот, любой точке* (a, b, c), $a^2 + b^2 \neq 0$, *соответствует единственная тройка* $(\alpha, \beta, \lambda_0)$, *где* $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\lambda_0 \in \big(-\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{4\pi}{\alpha}\big)$, *такая, что* $\gamma_{\lambda_0}(1) = (a, b, c)$, $\dot{x}(0) = \alpha$, $\dot{y}(0) = \beta$.

В теореме 2 символом $S_{cc}(O, 1)$ обозначается граница единичного cc-шара с центром в точке O.

Рассуждая тем же способом, что и при доказательстве теоремы 2, мы можем получить следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть экстремаль* $\gamma_\lambda(s) = (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)(s)$, $s \in [0, s_0]$, *соединяющая точки* O *и* (a, b, c), *параметризована длиной дуги. Тогда*

1^0 *при* $\lambda \in \big[-\frac{4\pi}{\alpha s_0}, \frac{4\pi}{\alpha s_0}\big]$ *экстремаль* $\gamma_\lambda(s)$ *является сс-кратчайшей*; *более того,*

$$\lambda \in \begin{cases} (0, \frac{4\pi}{s_0\alpha}], & c > 0, \\ [-\frac{4\pi}{s_0\alpha}, 0), & c < 0, \end{cases}$$

$\lambda = 0$ *в случае* $c = 0$,

2^0 *при* $\lambda \in \big(-\infty, -\frac{4\pi}{\alpha s_0}\big) \cup \big(\frac{4\pi}{\alpha s_0}, +\infty\big)$ *экстремаль* $\gamma_\lambda(s)$ *сс-кратчайшей не является,*

3^0 *любая точка* $(a, b, c) \in S_{cc}(O, s_0)$, $a^2 + b^2 \neq 0$, *соединяется с началом координат единственной сс-кратчайшей,*

4^0 *точки* $(0, 0, \pm c) \in S_{cc}(O, s_0)$ *соединяются с началом координат бесконечным числом сс-кратчайших,*

5^0 *любой тройке* $(\alpha, \beta, \lambda_0)$, *где* $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\lambda_0 \in \big(-\frac{4\pi}{\alpha s_0}, \frac{4\pi}{\alpha s_0}\big)$, *соответствует единственная точка* (a, b, c), $a^2 + b^2 \neq 0$, *такая, что* $\gamma_{\lambda_0}(s_0) = (a, b, c)$, $\dot{x}(0) = \alpha$, $\dot{y}(0) = \beta$, *и наоборот, любой точке* (a, b, c), $a^2 + b^2 \neq 0$, *соответствует единственная тройка* $(\alpha, \beta, \lambda_0)$, *где* $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\lambda_0 \in \big(-\frac{4\pi}{\alpha s_0}, \frac{4\pi}{\alpha s_0}\big)$, *такая, что* $\gamma_{\lambda_0}(s_0) = (a, b, c)$, $\dot{x}(0) = \alpha$, $\dot{y}(0) = \beta$.

2.2. **Описание cc-кратчайших без использования параметризации экстремалей длиною дуги.** В настоящем параграфе мы изложим (несколько в другой форме) некоторые результаты работы [5].

Используя (8), мы получаем

$$z_\lambda(s_0) = \frac{\alpha(a^2 + b^2)}{8} \frac{s_0\alpha\lambda - 2\sin\big(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\big)}{(1 - \cos\frac{\alpha\lambda}{2}s_0)} = \frac{\alpha(a^2 + b^2)}{8} F(\lambda). \tag{12}$$

Изучим свойства функции $z_\lambda(s_0)$ из (12), где параметры s_0, a, b, фиксированы, и при этом $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$. Мы имеем $\lim\limits_{\lambda\to 0} F(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to\pm\frac{4\pi}{\alpha s_0}} F(\lambda) = \pm\infty$. Непосредственно проверяется, что $\dot{F}(\lambda) > 0$ на интервале $(-\frac{4\pi}{\alpha s_0}, \frac{4\pi}{\alpha s_0})$, откуда следует, что функция $F(\lambda)$ возрастает на $(-\frac{4\pi}{\alpha s_0}, \frac{4\pi}{\alpha s_0})$. Используя (6), (8), мы получаем

$$l(\gamma_\lambda(s_0)) = \sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\frac{s_0\alpha\lambda}{4}}{\sin\frac{s_0\alpha\lambda}{4}}, \tag{13}$$

откуда следует $\lim\limits_{\lambda\to 0} l(\gamma_\lambda(s_0)) = \sqrt{a^2+b^2}$.

Используя формулу (13), несложно получить, что если $\lambda \notin (-\frac{4\pi}{\alpha s_0}, \frac{4\pi}{\alpha s_0})$, то экстремаль $\gamma_\lambda(s)$, $s \in [0, s_0]$, не является cc-кратчайшей. Таким образом, экстремаль $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)(s)$, $s \in [0, s_0]$, является cc-кратчайшей, соединяющей начало координат и точку $(a, b, z_\lambda(s_0))$ для любого $\lambda \in (-\frac{4\pi}{\alpha s_0}, \frac{4\pi}{\alpha s_0})$.

2.3. **Продолжение cc-кратчайших по параметру.**

Свойство 1 ([8, 17])**.** *Любая cc-кратчайшая группы $\mathbb{H}^1_\alpha$, исходящая из начала координат O и не имеющая с осью (OZ) и плоскостью XOY никаких других точек, является частью некоторой cc-кратчайшей группы $\mathbb{H}^1_\alpha$, соединяющей O и некоторую точку, принадлежащую оси (OZ).*

Доказательство. Если cc-кратчайшая группы $\mathbb{H}^1_\alpha$, исходящая из начала координат, не имеет с осью (OZ) и с плоскостью XOY никаких других точек, кроме начала координат, то такая cc-кратчайшая соединяет начало координат или с точкой вида $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$, где $z_1 > 0$, $x_1^2 + y_1^2 > 0$, или с точкой вида $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$, где $z_2 < 0$, $x_2^2 + y_2^2 > 0$.

Соединим начало координат и некоторую точку $(0, 0, z_0)$, $z_0 > 0$, cc-кратчайшей $\gamma(s) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})(s)$, $s \in [0, s_0]$. Несложно проверить, что любая кривая вида $\gamma_\varphi(s) = (\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi, \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi, \tilde{z})(s)$, $s \in [0, s_0]$, также является cc-кратчайшей, соединяющей начало координат и точку $(0, 0, z_0)$ (фактически, при повороте cc-кратчайшей $\gamma(s)$ вокруг оси (OZ) на угол φ мы опять же получаем cc-кратчайшую $\gamma_\varphi(s)$, соединяющую те же точки).

Обозначим $\Gamma_\varphi = \bigcup\limits_{\varphi\in[0,2\pi),\, s\in[0,s_0]} \gamma_\varphi(s)$, $\Pi^+ = \{(tx, ty, t^2z) \mid t \geq 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_\varphi\}$. Мы имеем $\tilde{z}(s) = o(s^2)$ при $s \to 0$, поэтому $\Pi^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} \cup \{O\}$. Поэтому для любой точки A_1 найдутся числа $\varphi \in [0, 2\pi)$, $t > 0$, $s \in [0, s_0]$ такие, что $A_1 = \delta_t\gamma_\varphi(s)$.

Аналогичное рассуждение справедливо и в случае точек вида A_2.

□

Следствие 1. *Начало координат и любая другая точка оси (OZ) группы $\mathbb{H}^1_\alpha$ соединяются бесконечным числом cc-кратчайших.*

Доказательство. Необходимые аргументы можно найти в доказательстве свойства 1 при построении кривых $\gamma_\varphi(s)$. □

Свойство 2. *Любая cc-кратчайшая $\gamma_\lambda(s) = (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)(s)$ группы $\mathbb{H}^1_\alpha$, исходящая из начала координат O длины s_0, такая, что $\lambda \in (-\frac{4\pi}{s_0\alpha}, \frac{4\pi}{s_0\alpha})$, продолжается по s на $\frac{4\pi}{|\lambda|\alpha} - s_0$ до некоторой точки, принадлежащей оси (OZ).*

Доказательство. По теореме 3 условие $\lambda \in (-\frac{4\pi}{s_0\alpha}, \frac{4\pi}{s_0\alpha})$ говорит нам о том, что концевая точка cc-кратчайшей $\gamma_\lambda(s)$ не принадлежит оси (OZ); при этом только кратчайшие $\gamma_{\pm\frac{4\pi}{s_0\alpha}}(s)$ соединяют точки, принадлежащие оси (OZ). Пусть для определенности $\gamma_\lambda(s)$ соединяет начало координат с точкой (a, b, c), где $c > 0$. Тогда $\lambda \in (0, \frac{4\pi}{s_0\alpha})$. Из свойства 1 вытекает, что cc-кратчайшая $\gamma_\lambda(s)$ может продолжаться по параметру s, оставаясь при этом cc-кратчайшей, до тех пор, пока она не пересечет ось (OZ). Тогда по теореме 3 экстремаль $\gamma_\lambda(s)$ может продолжаться по параметру s до некоторого $s_1 > s_0$, оставаясь при этом cc-кратчайшей, где s_1 определяется из тождества $\lambda = \frac{4\pi}{\alpha s_1}$, т. е. $s_1 = \frac{4\pi}{\alpha\lambda}$, откуда и вытекает свойство 2.

□

3. cc-КРАТЧАЙШИЕ ГРУПП $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ И РАВНОМЕРНОСТЬ cc-ШАРОВ

Лемма 1. *Рассмотрим cc-кратчайшую $\gamma(s) = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)(s)$, $s \in [0, s_0]$, группы $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$, исходящую из начала координат. Тогда любая кривая $\gamma_i(s) = \big(x_i(s), y_i(s), z_i(s)\big)$, где $z_i(s) = \frac{\alpha_i}{2}\int\limits_0^s (x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i)(t)\,dt$, является cc-кратчайшей группы $\mathbb{H}^1_{\alpha_i}$.*

Доказательство. Понятно, см. (3), что кривая $\gamma_i(s)$ является горизонтальной в $\mathbb{H}^1_{\alpha_i}$. Предположим, что $\gamma_i(s)$ не является cc-кратчайшей в $\mathbb{H}^1_{\alpha_i}$. Тогда рассмотрим в $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ горизонтальную кривую

$$\bar{\gamma}_i(s) = (x_1, y_1, \dots, x_{i-1}, y_{i-1}, x'_i, y'_i, x_{i+1}, y_{i+1}, \dots, x_n, y_n,\\ z_1 + \dots + z_{i-1} + z'_i + z_{i+1} + \dots + z_n)(s),$$

где $\gamma'_i(s) = (x'_i, y'_i, z'_i)(s)$ — cc-кратчайшая группы $\mathbb{H}^1_{\alpha_i}$, соединяющая точки с координатами $(0, 0, 0)$ и $(x_i, y_i, z_i)(s_0)$. По построению $\bar{\gamma}(s_0) = \gamma(s_0)$. Так как $l(\gamma'_i) < l(\gamma_i)$, то и $l(\bar{\gamma}) < l(\gamma)$, что противоречит тому, что $\gamma(s)$ — cc-кратчайшая.

□

3.1. cc-кратчайшие групп $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}$ и равномерность cc-шаров.

Если горизонтальная кривая $(x_1, y_1, x_2, y_2, z)(s)$, $s \in [0, s_0]$, является cc-кратчайшей группалгебры $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}$, соединяющей две произвольно выбранные точки, то она минимизирует следующий функционал

$$\int\limits_0^{s_0} \Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{\alpha_1\lambda}{2}(y_1\dot{x}_1 - x_1\dot{y}_1) + \frac{\alpha_2\lambda}{2}(y_2\dot{x}_2 - x_2\dot{y}_2)\Big)\,ds, \quad \lambda = \text{const}. \tag{14}$$

Выпишем экстремали функционала (14), исходящие из начала координат пространства $\mathbb{R}^5$, в явном виде. Пусть экстремаль $\gamma_\lambda(s) = (x_1, y_1, x_2, y_2, z_\lambda)(s)$ соединяет начало координат с некоторой точкой (a_1, b_1, a_2, b_2, c). Тогда мы имеем

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(s) = -\frac{\alpha_1\lambda}{2}\dot{y}_1(s), \\ \ddot{y}_1(s) = \frac{\alpha_1\lambda}{2}\dot{x}_1(s), \\ \ddot{x}_2(s) = -\frac{\alpha_2\lambda}{2}\dot{y}_2(s), \\ \ddot{y}_2(s) = \frac{\alpha_2\lambda}{2}\dot{x}_2(s), \end{cases} \tag{15}$$

откуда получаем

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(s) = -\frac{\alpha_1\lambda}{2} y_1(s) + \dot{x}_1(0),\\
\dot{y}_1(s) = \frac{\alpha_1\lambda}{2} \dot{x}_1(s) + \dot{y}_1(0),\\
\dot{x}_2(s) = -\frac{\alpha_2\lambda}{2} y_2(s) + \dot{x}_2(0),\\
\dot{y}_2(s) = \frac{\alpha_2\lambda}{2} \dot{x}_2(s) + \dot{y}_2(0).
\end{cases} \tag{16}
$$

Свойство 3. *В случае $\lambda = 0$ экстремали функционала (14), соединяющие начала координат с некоторой точкой (a_1, b_1, a_2, b_2, c), — прямолинейные горизонтальные отрезки.*

Доказательство. Пусть $\lambda = 0$, тогда из (16) мы получаем

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(s) = \dot{x}_1(0),\\
\dot{y}_1(s) = \dot{y}_1(0),\\
\dot{x}_2(s) = \dot{x}_2(0),\\
\dot{y}_2(s) = \dot{y}_2(0)
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1(s) = \dot{x}_1(0)s,\\
y_1(s) = \dot{y}_1(0)s,\\
x_2(s) = \dot{x}_2(0)s,\\
y_2(s) = \dot{y}_2(0)s
\end{cases}
\Rightarrow t_0(s) \equiv 0.
$$

Т. е. значение $\lambda = 0$ соответствует экстремали $\gamma_0(s) = (a_1 s/s_0, b_1 s/s_0, a_2 s/s_0, b_2 s/s_0, 0)$, $s \in [0, s_0]$, являющейся горизонтальным отрезком. □

Запишем систему (15) в следующем эквивалентном виде

$$
\begin{pmatrix} \dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\\ \dot{z}_4\\ \dot{z}_5\\ \dot{z}_6\\ \dot{z}_7\\ \dot{z}_8 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_1\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{\alpha_1\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_2\lambda}{2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_2\lambda}{2} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\\ z_5\\ z_6\\ z_7\\ z_8 \end{pmatrix}. \tag{17}
$$

Стандартным образом находим фундаментальную матрицу решений системы (17):

$$
Y(s) = \begin{pmatrix}
\sin(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s) & -\cos(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\cos(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s) & -\sin(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{\alpha_1\lambda}{2}\cos(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s) & \frac{\alpha_1\lambda}{2}\sin(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{\alpha_1\lambda}{2}\sin(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s) & -\frac{\alpha_1\lambda}{2}\cos(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s) & -\cos(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s) & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s) & -\sin(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s) & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_2\lambda}{2}\cos(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s) & \frac{\alpha_2\lambda}{2}\sin(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_2\lambda}{2}\cos(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s) & -\frac{\alpha_2\lambda}{2}\sin(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s) & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Тогда общее решение системы (17) определяется по формуле

$$
Y(s)\cdot C, \quad C = (C_1, C_2, C_3, C_4, \widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3, \widetilde{C}_4)^{\mathrm{T}}, \quad C_i, \widetilde{C}_i = \mathrm{const},\ i = 1, 2, 3, 4.
$$

Так как экстремаль исходит из начала координат, то $C_1 = C_4$, $C_2 = C_3$, $\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_4$, $\widetilde{C}_2 = \widetilde{C}_3$. Таким образом,

$$
(18)\qquad
\begin{cases}
x_1(s) = C_1 \sin(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s) + C_2\big(1-\cos(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s)\big), & x_1(s_0) = a_1,\\
y_1(s) = C_1\big(1-\cos(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s)\big) - C_2\sin(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s), & y_1(s_0) = b_1,\\
x_2(s) = \widetilde{C}_1 \sin(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s) + \widetilde{C}_2\big(1-\cos(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s)\big), & x_2(s_0) = a_2,\\
y_2(s) = \widetilde{C}_1\big(1-\cos(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s)\big) - \widetilde{C}_2\sin(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s), & y_2(s_0) = b_2
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
\dot{x}_1(s) = \frac{\alpha_1\lambda C_1}{2}\cos(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s) + \frac{\alpha_1\lambda C_2}{2}\sin(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s), & \dot{x}_1(0) = \frac{\alpha_1\lambda C_1}{2},\\
\dot{y}_1(s) = \frac{\alpha_1\lambda C_1}{2}\sin(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s) - \frac{\alpha_1\lambda C_2}{2}\cos(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s), & \dot{y}_1(0) = -\frac{\alpha_1\lambda C_2}{2},\\
\dot{x}_2(s) = \frac{\alpha_2\lambda\widetilde{C}_1}{2}\cos(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s) + \frac{\alpha_2\lambda\widetilde{C}_2}{2}\sin(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s), & \dot{x}_2(0) = \frac{\alpha_2\lambda\widetilde{C}_1}{2},\\
\dot{y}_2(s) = \frac{\alpha_2\lambda\widetilde{C}_1}{2}\sin(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s) - \frac{\alpha_1\lambda\widetilde{C}_2}{2}\cos(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s), & \dot{y}_2(0) = -\frac{\alpha_2\lambda\widetilde{C}_2}{2},
\end{cases}
$$

откуда

$$
\begin{cases}
C_1 = \frac{b_1\left(1-\cos\left(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0\right)\right)+a_1\sin\left(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0\right)\right)},\\
C_2 = \frac{a_1\left(1-\cos\left(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0\right)\right)-b_1\sin\left(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0\right)\right)},\\
\widetilde{C}_1 = \frac{b_2\left(1-\cos\left(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0\right)\right)+a_2\sin\left(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0\right)\right)},\\
\widetilde{C}_2 = \frac{a_2\left(1-\cos\left(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0\right)\right)-b_2\sin\left(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0\right)\right)}.
\end{cases}
$$

Мы имеем

(19)

$$
r_\lambda^2(s) = (x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)(s) = 2(C_1^2+C_2^2)\Big(1-\cos\big(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s\big)\Big)+2(\widetilde{C}_1^2+\widetilde{C}_2^2)\Big(1-\cos\big(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s\big)\Big)
$$

$$
= \frac{8(\dot{x}_1^2(0)+\dot{y}_1^2(0))}{\alpha_1^2\lambda^2}\Big(1-\cos\big(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s\big)\Big) + \frac{8(\dot{x}_2^2(0)+\dot{y}_2^2(0))}{\alpha_2^2\lambda^2}\Big(1-\cos\big(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s\big)\Big)
$$

$$
= r_1^2(s) + r_2^2(s),
$$

$$
z_\lambda(s) = \frac{\alpha_1}{2}\int\limits_0^s (x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1)(s)\,ds + \frac{\alpha_2}{2}\int\limits_0^s (x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2)(s)\,ds
$$

$$
= \frac{\alpha_1^2\lambda}{4}(C_1^2+C_2^2)\int\limits_0^s \Big(1-\cos\big(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s\big)\Big)\,ds + \frac{\alpha_2^2\lambda}{4}(\widetilde{C}_1^2+\widetilde{C}_2^2)\int\limits_0^s \Big(1-\cos\big(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s\big)\Big)\,ds
$$

$$
= \frac{\alpha_1^2\lambda}{4}(C_1^2+C_2^2)\Big(s - \frac{2\sin\left(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s\right)}{\alpha_1\lambda}\Big) + \frac{\alpha_2^2\lambda}{4}(\widetilde{C}_1^2+\widetilde{C}_2^2)\Big(s - \frac{2\sin\left(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s\right)}{\alpha_2\lambda}\Big),
$$

$$
(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)(s) = (C_1^2+C_2^2)\frac{\alpha_1^2\lambda^2}{4} + (\widetilde{C}_1^2+\widetilde{C}_2^2)\frac{\alpha_2^2\lambda^2}{4}.
$$

Неясно, как можно получить аналог теоремы 2 в случае $\mathbb{H}_{\alpha_1,\alpha_2}$ методом доказательства из работы [8]; проблема состоит в том, что, переходя к параметризации экстремали длиною дуги, мы не можем вывести аналог формулы (9) из (19), что существенно затрудняет изучение функции r_λ.

Представим экстремаль $\gamma_\lambda(s) = (x_1, y_1, x_2, y_2, t_\lambda)(s)$, $s \in [0, s_0]$, в виде $\gamma_\lambda(s) = \gamma^1_\lambda(s) + \gamma^2_\lambda(s)$, где

$$\gamma^1_\lambda(s) = \Big(x_1(s), y_1(s), 0, 0, \frac{\alpha_1}{2}\int\limits_0^s (x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1)(s)\,ds\Big) = (x_1, y_1, 0, 0, z^1_\lambda)(s),$$

$$\gamma^2_\lambda(s) = \Big(0, 0, x_2(s), y_2(s), \frac{\alpha_2}{2}\int\limits_0^s (x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2)(s)\,ds\Big) = (0, 0, x_2, y_2, z^2_\lambda)(s).$$

Таким образом

$$z_\lambda(s) = z^1_\lambda(s)+z^2_\lambda(s) = \frac{\alpha_1^2\lambda}{4}(C_1^2+C_2^2)\Big(s-\frac{2\sin\big(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s\big)}{\alpha_1\lambda}\Big)+\frac{\alpha_2^2\lambda}{4}(\widetilde{C}_1^2+\widetilde{C}_2^2)\Big(s-\frac{2\sin\big(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s\big)}{\alpha_2\lambda}\Big).$$

Зафиксируем a_1, b_1, a_2, b_2. Аналогично (8) мы имеем

$$C_1^2 + C_2^2 = \frac{a_1^2 + b_1^2}{2(1 - \cos\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0)}, \quad \widetilde{C}_1^2 + \widetilde{C}_2^2 = \frac{a_2^2 + b_2^2}{2(1 - \cos\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0)},$$

поэтому

$$(20) \quad z_\lambda(s_0)$$
$$= \frac{\alpha_1^2\lambda}{4}\frac{a_1^2 + b_1^2}{2(1 - \cos\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0)}\Big(s_0-\frac{2\sin\big(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0\big)}{\alpha_1\lambda}\Big)+\frac{\alpha_2^2\lambda}{4}\frac{a_2^2 + b_2^2}{2(1 - \cos\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0)}\Big(s_0-\frac{2\sin\big(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0\big)}{\alpha_2\lambda}\Big)$$
$$= \frac{\alpha_1(a_1^2 + b_1^2)}{8}\frac{\big(\alpha_1\lambda s_0 - 2\sin\big(\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0\big)\big)}{(1 - \cos\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0)} + \frac{\alpha_1(a_2^2 + b_2^2)}{8}\frac{\big(\alpha_2\lambda s_0 - 2\sin\big(\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0\big)\big)}{(1 - \cos\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0)}$$
$$= \frac{\alpha_1(a_1^2 + b_1^2)}{8}F_1(\lambda) + \frac{\alpha_2(a_2^2 + b_2^2)}{8}F_2(\lambda) = z^1_\lambda(s_0) + z^2_\lambda(s_0).$$

Непосредственно проверяется, см. также § 2.2, что $\dot{F}_i(\lambda) > 0$, $\lambda \in (-\frac{4\pi}{\alpha_i s_0}, \frac{4\pi}{\alpha_i s_0})$, $i = 1, 2$. Поэтому отображение $z_\lambda(s_0) : (-\frac{4\pi}{\alpha_2 s_0}, \frac{4\pi}{\alpha_2 s_0}) \to \mathbb{R}$ является взаимнооднозначным.

Пусть $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \neq 0$. В этом случае, учитывая неравенство $\alpha_1 < \alpha_2$ и §2.2, мы получаем, что при каждом $\lambda \in (-\frac{4\pi}{\alpha_2 s_0}, \frac{4\pi}{\alpha_2 s_0})$ кривые $(x_i, y_i, z^i_\lambda)(s)$ являются cc-кратчайшими групп $\mathbb{H}_{\alpha_i}$, $i = 1, 2$. Используя формулу (13), несложно понять, что при каждом $\lambda \in (-\frac{4\pi}{\alpha_2 s_0}, \frac{4\pi}{\alpha_2 s_0})$ экстремаль $\gamma_\lambda(s)$, $s \in [0, s_0]$, является cc-кратчайшей, соединяющей начало координат и точку $\big(a_1, b_1, a_2, b_2, t_\lambda(s_0)\big)$, и если $\lambda \notin (-\frac{4\pi}{\alpha_2 s_0}, \frac{4\pi}{\alpha_2 s_0})$, то экстремаль $\gamma_\lambda(s)$, $s \in [0, s_0]$, cc-кратчайшей не является.

Таким образом, мы установили следующее

Свойство 4. *На группе $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}$ любая точка (a_1, b_1, a_2, b_2, c), $(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) \neq 0$, соединяется с началом координат единственной cc-кратчайшей.*

А так как топологическая размерность множеств

$$M_2 = \bigcup_{(x_2,y_2,z)\in\mathbb{R}^3} M_{x_2,y_2,z}, \quad M_{x_2,y_2,z} = (0, 0, x_2, y_2, z),$$

$$M_1 = \bigcup_{(x_1,y_1,z)\in\mathbb{R}^3} M_{x_1,y_1,z}, \quad M_{x_1,y_1,z} = (x_1, y_1, 0, 0, z)$$

равна 3, то из свойства 4 и теоремы 1 вытекает следующая

Теорема 4. *Любой cc-шар группы* $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}$ *является равномерной областью.*

3.2. **Множество неединственности группы $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}$.** Выясним, как связаны множества M_1, M_2 и множество неединственности $N_{\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}}(O)$.

Сначала рассмотрим множество M_2. Пусть $\gamma(s) = (x_1, y_1, x_2, y_2, z)(s)$, $s \in [0, s_0]$, — cc-кратчайшая, соединяющая начало координат и некоторую точку $(0, 0, a_2, b_2, c)$. Тогда

$$\gamma(s) = (x_1, y_1, 0, 0, z_1)(s) + (0, 0, x_2, y_2, z_2)(s); \tag{21}$$

при этом по лемме 1 горизонтальные кривые $\gamma_i(s) = (x_i, y_i, z_i)(s)$ являются cc-кратчайшими групп $\mathbb{H}^1_{\alpha_i}$, $i = 1, 2$, соединяющими начало координат пространства $\mathbb{R}^3$ и точки $(0, 0, z_1(s_0))$, $(a_2, b_2, z_2(s_0))$ соответственно, $c = z_1(s_0) + z_2(s_0)$.

Свойство 5. *cc-кратчайшая группы* $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}$*, соединяющая начало координат и точку вида* $(0, 0, a_2, b_2, c)$*, имеет вид*

$$(0, 0, x_2', y_2', z')(s), \quad s \in [0, s_0],$$

где $(x_2', y_2', z')(s)$ *— cc-кратчайшая группы* $\mathbb{H}^1_{\alpha_2}$*, соединяющая точки* $(0, 0, 0)$ *и* (a_2, b_2, c)*.*

Доказательство. В работе [8] было доказано, что если cc-кратчайшая группы $\mathbb{H}^1_\alpha$ единичной длины соединяет начало координат и точку A оси (OZ), то $A = (0, 0, \pm\frac{\alpha}{4\pi})$. Откуда, учитывая неравенство $\alpha_1 < \alpha_2$, мы получаем, что для любой точки B, принадлежащей оси $OZ \subset \mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}$, отличной от начала координат, длина горизонтальной кривой $(u_1, v_1, 0, 0, w_1)(s)$, соединяющей начало координат и точку B, больше длины горизонтальной кривой $(0, 0, u_2, v_2, w_2)(s)$, соединяющей начало координат и точку B, где $(u_i, v_i, w_i)(s)$ — cc-кратчайшая группы $\mathbb{H}^1_{\alpha_i}$, $s \in [0, s_0]$, — cc-кратчайшая группы $\mathbb{H}^1_{\alpha_i}$, $i = 1, 2$.

Пусть cc-кратчайшая, соединяющая начало координат и точку $(0, 0, a_2, b_2, c)$, имеет вид (21). Рассмотрим горизонтальную кривую

$$\hat{\gamma}(s) = (0, 0, x_3, y_3, z_3)(s) + (0, 0, x_2, y_2, z_2)(s), \quad s \in [0, s_0], \tag{22}$$

где $\gamma_3(s) = (x_3, y_3, z_3)(s)$ — cc-кратчайшая группы $\mathbb{H}^1_{\alpha_2}$, соединяющая точки $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, z_1(s_0))$. Так как $l(\gamma_3) < l(\gamma_1)$, то $l(\hat{\gamma}) < l(\gamma)$, что противоречит тому, что $\gamma(s)$ — cc-кратчайшая. Поэтому для того, чтобы $\gamma(s)$ была cc-кратчайшей, необходимо, чтобы $\gamma_1(s) \equiv 0$. $\square$

Следствие 2. *Любая точка множества* M_2*, не принадлежащая оси* (OZ)*, соединяется с началом координат единственной cc-кратчайшей.*

Теперь рассмотрим множество M_1.

Свойство 6. *Существуют точки* $(a, b, 0, 0, c) \in \mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}$*,* $a^2 + b^2 > 0$*,* $c \neq 0$*, которые соединяются с началом координат более чем одной кратчайшей.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую точку (a_1, b_1, a_2, b_2, c), $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) > 0$, $c \neq 0$. По свойству 4 такая точка соединяется с началом координат единственной cc-кратчайшей $\gamma_\lambda(s) = (x_1, y_1, x_2, y_2, z_\lambda)(s)$, $s \in [0, s_0]$, см. формулы (18), (19). Учитывая свойство 4, используя формулы из (18), (19) и неравенство $\alpha_1 < \alpha_2$, мы получаем, что cc-кратчайшая $\gamma_\lambda(s)$ может быть продолжена по параметру s до некоторого значения $s' > s_0$, которое определяется условием

$r_2(s')=0$ ($s'=\frac{4\pi}{\alpha_2\lambda}$), оставаясь при этом cc-кратчайшей. По аналогии с (21), мы можем записать

$$\gamma_\lambda(s)=(x_1,y_1,0,0,z_1)(s)+(0,0,x_2,y_2,z_2)(s),\quad s\in[0,s'], \tag{23}$$

где горизонтальные кривые являются cc-кратчайшими групп $\mathbb{H}^1_{\alpha_1}$, $\mathbb{H}^1_{\alpha_2}$ соответственно, $(x_2,y_2)(s')=(0,0)$, $z_\lambda(s')z_1(s')z_2(s')\neq 0$, $z_\lambda(s')=z_1(s')+z_2(s')$. При этом, так как $\alpha_1<\alpha_2$, то $r_1(s')\neq 0$. Учитывая следствие 1, используя (23), несложно показать, что точка $(x_1(s'),y_1(s'),0,0,z_\lambda(s'))\in M_1$ соединяется с началом координат бесконечным числом cc-кратчайших. □

Отметим, что свойство 6 вытекает из [13, Lemma 37].

Из следствия 2 вытекает, что $N_{\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}}(O)\subset M_1$. Используя (20), можно более точно описать множество $N_{\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}}(O)$. Рассмотрим cc-кратчайшую $\gamma_\lambda(s)=(x_1,y_1,x_2,y_2,t_\lambda)(s)$, $s\in[0,s_0]$, соединяющую точку O с точкой (a_1,b_1,a_2,b_2,c), $(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)>0$, $c\neq 0$. Для определенности положим $c>0$. Пусть параметры a_1, b_1 фиксированы, а параметры a_2, b_2 мы будем подбирать таким образом, чтобы

$$\lim_{\lambda\to\frac{4\pi}{\alpha_2 s_0}}\frac{a_2^2+b_2^2}{(1-\cos\frac{\alpha_2\lambda}{2}s_0)}=\bar c>0. \tag{24}$$

Понятно, что для любого фиксированного числа $\bar c>0$ всегда возможно выбрать $a_2=a_2(\lambda)$, $b_2=b_2(\lambda)$ так, чтобы выполнялось (24), что влечет $\lim\limits_{\lambda\to\frac{4\pi}{\alpha_2 s_0}} a_2^2+b_2^2=0$. Кроме того,

$$\lim_{\lambda\to\frac{4\pi}{\alpha_2 s_0}}\frac{a_1^2+b_1^2}{(1-\cos\frac{\alpha_1\lambda}{2}s_0)}=\frac{a_1^2+b_1^2}{(1-\cos\frac{2\pi\alpha_1}{\alpha_2})}. \tag{25}$$

Из (24), (25), а также свойства 4 и следствия 2 вытекает следующая

Теорема 5.

$$N_{\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}}(O)=\Big\{(x_1,y_1,0,0,z)\in\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}\ \Big|\ |z|\geq\frac{x_1^2+y_1^2}{(1-\cos\frac{2\pi\alpha_1}{\alpha_2})}\Big\}.$$

3.3. **Обобщения для общего случая $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$.** Нет никаких затруднений в понимании того, как записывается аналог системы дифференциальных уравнений (15) в общем случае; система дифференциальных уравнений (17) в общем случае определяется блочно-дагональной $(2n\times 2n)$-матрицей, на диагонали которой расположены блоки

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-\frac{\alpha_i\lambda}{2}\\0&0&\frac{\alpha_i\lambda}{2}&0\end{pmatrix},$$

а вне эти блоков расположены нулевые элементы. Учитывая этот факт, мы можем выписать уравнения экстремалей $(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n,z_\lambda)$, аналогичные (18), откуда, используя условие (3), записать последнюю координату экстремали z_λ (от случая $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}$ она отличается количеством соответствующих слагаемых). Анализируя z_λ также, как и в случае $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}$, мы приходим к следующим результатам.

Свойство 7. *На группе* $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ *любая точка*

$$(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, c), \quad (a_1^2 + b_1^2) \cdot \dots \cdot (a_n^2 + b_n^2) \neq 0,$$

соединяется с началом координат единственной сс-кратчайшей.

Так как

$$\text{top-codim}\Big(\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \setminus \{(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, c) \mid (a_1^2 + b_1^2) \cdot \dots \cdot (a_n^2 + b_n^2) \neq 0\}\Big) > 1,$$

то, учитывая теорему 1, имеет место следующая

Теорема 6. *Любой сс-шар группы* $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ *является равномерной областью.*

Используя те же рассуждения, что и при доказательстве свойства 6, мы получаем следующее

Свойство 8. *Существуют точки* $(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, 0, 0, c) \in \mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$, $a_1^2 + b_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 > 0$, $c \neq 0$, *которые соединяются с началом координат более чем одной кратчайшей.*

Отметим, что свойство 8 вытекает из [13, Lemma 37].

Обозначим

$$M = \bigcup_{(x_1,y_1,\dots,x_{n-1},y_{n-1},z)\in\mathbb{R}^{2n-1}} M_{(x_1,y_1,\dots,x_{n-1},y_{n-1},z)},$$

$$M_{(x_1,y_1,\dots,x_{n-1},y_{n-1},z)} = (x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, 0, 0, z) \in \mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}.$$

Очевидно, что top-codim $M > 1$. Рассуждая по аналогии со случаем $\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}$, можно показать, что $N_{\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}}(O) \subset M$; более того, рассуждая как и при доказательстве теоремы 5, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 7.

$$N_{\mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2}}(O)$$
$$= \Big\{(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k, 0, \dots, 0, z) \in \mathbb{H}^1_{\alpha_1,\alpha_2} \;\Big|\; |z| \geq \frac{x_1^2 + y_1^2}{(1 - \cos\frac{2\pi\alpha_1}{\alpha_n})} + \dots + \frac{x_k^2 + y_k^2}{(1 - \cos\frac{2\pi\alpha_k}{\alpha_n})}\Big\},$$

где k *— наибольшее натуральное число такое, что* $\alpha_k < \alpha_n$.

References

[1] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., *Elements of the theory of functions and functional analysis*, Izdat. "Nauka", Moscow, 1968. MR0234241

[2] Gromov M., *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, Sub-Riemannian geometry, Prog. Math., **144**, 79–323, Birkhäuuser, Basel, 1996. MR1421823

[3] Jones P., *Extension theorems for BMO*, Indiana Univ. Math., **29**:1 (1980), 41–66. MR0554817

[4] Jones P., *Quasiconformal mappinga and extendability of functions in Sobolev spaces*, Acta Math., **147** (1981), 71–88. MR0631089

[5] Vodop'yanov S.K., Greshnov A.V., *On the continuation of functions of bounded mean oscillation on spaces of homogeneous type with intrinsic metric*, Siberian Math. J., **36**:5 (1995), 873-–901. MR1373594

[6] Greshnov A.V., *On uniform and NTA-domains on Carnot groups*, Siberian Math. J., **42**:5 (2001), 851–864. MR1861631

[7] Capogna L., Garofalo N., *Boundary behavior of non-negative solutions of subelliptic equations in NTA-domains for Carnot-Carathéodory metrics*, J. Fourier Anal. Appl., **4**:4-5 (1998), 403–432. MR1658616

[8] Greshnov A.V., *The geometry of cc-balls and constants in the ball-box theorem on Heisenberg group algebras*, Siberian Math. J., **55**:5 (2014), 849–865. MR3289110

[9] Rothchild L.P., Stein E.S., *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math., **137**:3-4 (1976), 247–320. MR0436223

[10] Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F., *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2007. MR2363343

[11] Pansu P., *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math., (2) **129**:1 (1989), 1–60. MR0979599

[12] Postnikov M. M., *Lie groups and algebras, Lectures in geometry, Semester V*, "Nauka”, Moscow, 1982. MR0685757

[13] Agrachev A., Barilari D., Boscain U.,*On the Hausdorff volume in sub-Riemannian geometry*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **43**:3-4 (2012), 355-388. MR2875644

[14] M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in* R^n, Lecture Notes in Mathematics, **481**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. MR0457661

[15] Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F., *The mathematical theory of optimal procsses*, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New-York–London, 1962. MR0166037

[16] Elsgolts L., *Differential equations and the calculus of variations*, Mir Publishers, Moscow, 1970. MR0279361

[17] Berestovskii V N., *Geodesics of nonholonomic left-invariant inner metrics on the Heisenberg group and isoperimetrics of the Minkowski plane*, Siberian Math. J., **35**:1 (1994), 1–8. MR1290095

Alexandr Valer'yevich Greshnov
Novosibirsk State University,
ul. Pirogova, 1,
630090, Novosibirsk, Russia,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: greshnov@math.nsc.ru