

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 1237–1244 (2018)
DOI 10.17377/semi.2018.15.100

УДК 515.162.8
MSC 57M25

КЛАССИФИКАЦИЯ НОТОИДОВ МАЛОЙ СЛОЖНОСТИ

Ф.Г. КОРАБЛЁВ, Я.К. МАЙ, В.В. ТАРКАЕВ

ABSTRACT. As the main result of the paper we present the complete classification of all prime knotoids with positive height and at most 5 crossings. We prove that there exist exactly 31 knotoids of this type. The proof is based on the complete table of knots in the thickened torus and the correspondence between knotoids in the two dimensional sphere and knots in the thickened torus.

Keywords: knotoid, classification, crossing number, height of knotoid, table.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория нотоидов была предложена В. Тураевым в статье [1]. *Диаграммой нотоида* называется образ такого погружения отрезка в двумерную сферу, что множество сингулярных точек этого погружения конечно и состоит только из внутренних точек двукратных трансверсальных самопересечений. Как и в случае диаграмм классических узлов, каждая двойная точка диаграммы нотоида снабжена стандартной информацией о том, какая из пересекающихся в этой точке дуг является верхней, а какая нижней.

Определение 1. Нотоид — это класс эквивалентности диаграмм нотоидов, рассматриваемых с точностью до трёх движений Рейдемейстера. Области, в которых совершаются движения, не должны содержать концевых точек диаграммы. Диаграммой сложности нотоида называется минимальное число двойных точек диаграмм, задающих этот нотоид.

KORABLEV, Ph.G., MAY, Y.K., TARKAEV, V.V., CLASSIFICATION OF LOW COMPLEXITY KNOTOIDS.

© 2018 КОРАБЛЁВ Ф.Г., МАЙ Я.К., ТАРКАЕВ В.В.

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (код проекта 16–11–10291).

Поступила 15 августа 2018 г., опубликована 23 октября 2018 г.

В 2015 году А. Бартоломео опубликовал в интернете таблицу нотоидов, допускающих диаграммы с не более, чем пятью двойными точками (см. [2]). Как показано в статье [3], эта таблица не полна, так как по крайней мере один нотоид в ней пропущен. Основная цель нашей работы состоит в восполнении этого недостатка, то есть в полной классификации всех нотоидов, диаграммная сложность которых не превосходит пяти.

2. МНОЖЕСТВО КЛАССИФИЦИРУЕМЫХ НОТОИДОВ

Определение 2. *Диаграмма нотоида на двумерной сфере называется примарной, если выполняются следующие условия:*

- (1) *любая простая окружность на сфере, пересекающая диаграмму в одной точке, ограничивает диск, являющийся регулярной окрестностью одной из концевых точек диаграммы;*
- (2) *любая простая окружность на сфере, пересекающая диаграмму в двух точках, ограничивает диск, пересечение которого с диаграммой является либо тривиальной дугой, либо парой простых непересекающихся дуг, инцидентных концевым точкам диаграммы.*

Нотоид называется примарным, если он может быть задан примарной диаграммой.

При составлении таблиц узлов обычно рассматривают только примарные узлы. Для нотоидов справедлив аналог теоремы о существовании и единственности примарных разложений (см. [1]), поэтому при классификации мы будем ограничиваться только примарными нотоидами.

При табулировании классических узлов каждый узел считается эквивалентным своему зеркальному образу. В нашем случае тоже удобно расширить понятие эквивалентности диаграмм нотоидов и считать, что две диаграммы эквивалентны, если одна получается из другой с помощью конечной последовательности следующих преобразований:

- (1) три движения Рейдемейстера;
- (2) одновременная смена типов всех двойных точек диаграммы;
- (3) гомеоморфизм (возможно, меняющий ориентацию) двумерной сферы, содержащей диаграмму.

В статье [1] доказано, что теория нотоидов обобщает теорию классических узлов. Это означает, что множество классических узлов в трёхмерной сфере вкладывается в множество нотоидов. Мы будем рассматривать нотоиды, не содержащиеся в образе этого вложения. Множество таких нотоидов удобно описать с помощью понятия высоты.

Определение 3. *Пусть D — диаграмма нотоида, и пусть v_1, v_2 — её концевые точки. Высотой диаграммы D называется $\min \#(\gamma \cap D)$, где минимум берётся по всем дугам γ на двумерной сфере, соединяющим точки v_1 и v_2 , а $\#(\gamma \cap D)$ обозначает число точек пересечения внутренней дуги γ с диаграммой D . Высотой нотоида называется минимальная высота его диаграмм.*

Понятие высоты было введено в статье [1], где для его обозначения использовался термин “сложность”. Мы будем использовать термин “высота”, предложенный в статье [4], чтобы не путать высоту нотоида с его диаграммной сложностью.

Любой нотоид нулевой высоты может быть задан диаграммой, получающейся из диаграммы классического узла удалением малой дуги, не содержащей двойных точек. Так как классические узлы классифицированы до довольно большого числа двойных точек, то при классификации нотоидов мы будем ограничиваться только примарными нотоидами ненулевой высоты.

Следующая теорема является основным результатом нашей работы.

Теорема. *Существует ровно 31 примарный нотоид ненулевой высоты диаграммной сложности не больше пяти. Все они попарно неэквивалентны и изображены на рисунке 1.*

Доказательство этой теоремы приведено в конце статьи после формулировки всех необходимых результатов, связанных с узлами в утолщённом торе.

3. НОТОИДЫ КАК РЕЗУЛЬТАТ РАЗРЕЗАНИЯ УЗЛОВ В УТОЛЩЁННОМ ТОРЕ

Пусть T — двумерный тор, $I = [0; 1]$. Прямое произведение $T \times I$ будем называть *утолщённым тором*. Собственное кольцо $A \subset T \times I$ будем называть *вертикальным*, если оно изотопно кольцу вида $c \times I \subset T \times I$, где $c \subset T$ — простая замкнутая кривая.

Существует тесная связь между нотоидами и узлами в утолщённом торе. В статье [3] изучается операция поднятия, которая каждому нотоиду однозначно сопоставляет узел в утолщённом торе. Опишем действующую в обратном направлении операцию *разрезания* узла $K \subset T \times I$. Пусть $A \subset T \times I$ — вертикальное кольцо, пересекающее узел K ровно в одной точке и изотопное кольцу $c \times I$, где $c \subset T$ — простая замкнутая нетривиальная кривая на торе T . Тогда узел K допускает диаграмму на торе T , пересекающую кривую c ровно в одной точке. Разрежем тор T по этой кривой и стянем каждую компоненту края получившегося кольца в точку. Из диаграммы узла получим диаграмму нотоида на двумерной сфере. Задаваемый ею нотоид и является результатом разрезания узла K . Кольцо A будем называть *разрезающим* для узла K .

Мы будем считать два разрезающих кольца $A, B \subset T \times I$ для узла $K \subset T \times I$ эквивалентными, если существует такая изотопия $h_t: T \times I \rightarrow T \times I$, $0 \leq t \leq 1$, что $h_0(A) = A$, $h_1(A) = B$ и $h_t(K) = K$ для всех $t \in [0; 1]$. В общем случае результат разрезания зависит от выбора разрезающего кольца, но если кольца эквивалентны, то получающиеся в результате разрезов нотоиды также эквивалентны.

Для нахождения разрезающих колец удобно использовать обобщение скобочного полинома Кауффмана для узлов в утолщённом торе, описанное, например, в статье [5]. В отличие от классического скобочного полинома он зависит не от одной, а от счётного числа переменных. Дополнительные переменные находятся во взаимно-однозначном соответствии с гомотопическими классами нетривиальных кривых на двумерном торе.

Определение 4. Пусть $K \subset T \times I$ — узел в утолщённом торе, $D \subset T$ — его диаграмма. Обобщённым скобочным полиномом Кауффмана узла K называется полином

$$\langle K \rangle = (-a)^{-3\omega(D)} \sum_{s \in \mathcal{S}(D)} a^{\alpha(s) - \beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)} [s],$$

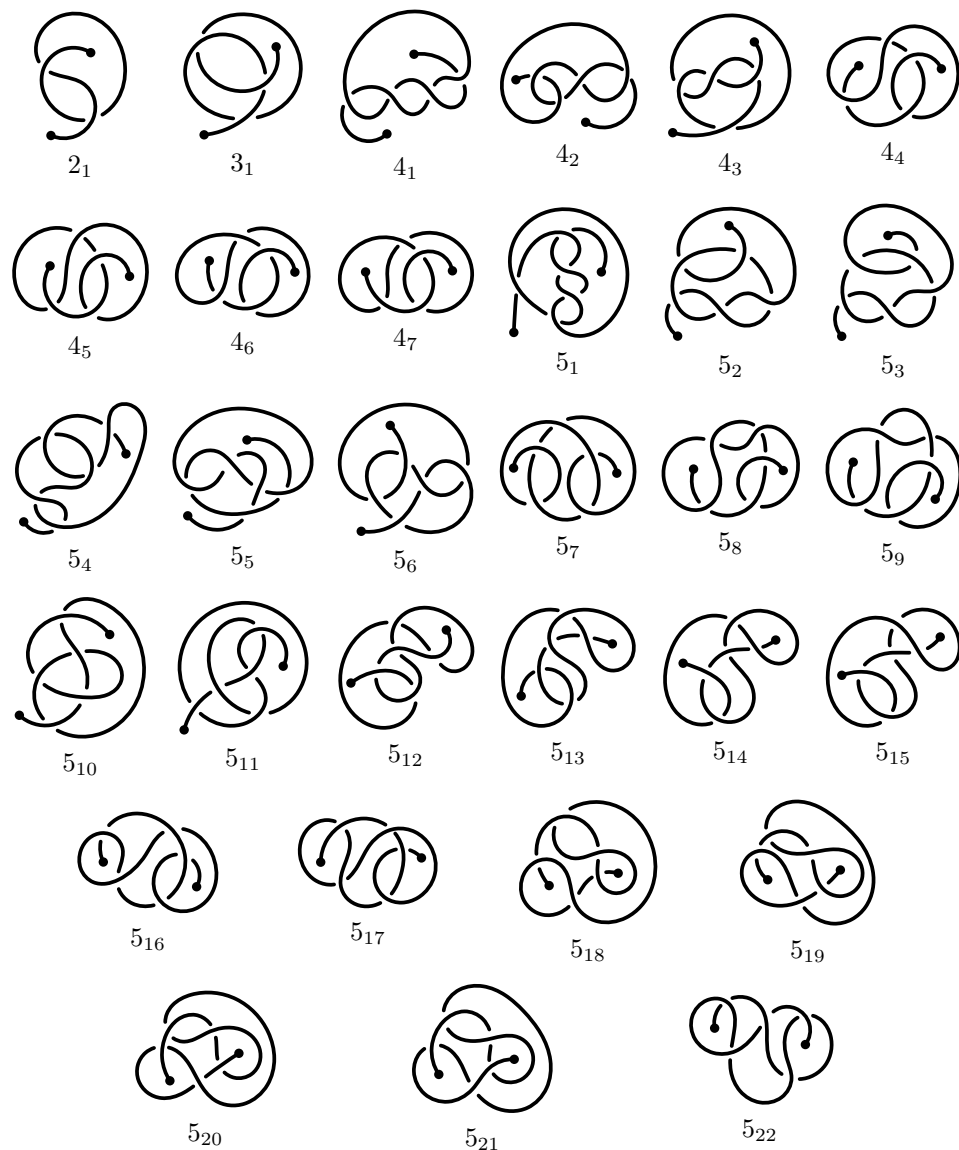


Рис. 1. Примарные нотоиды ненулевой высоты диаграммной сложности не больше пяти.

где суммирование ведётся по всем состояниям $\mathcal{S}(D)$ диаграммы D , то есть по всевозможным расстановкам маркеров A и B в её двойных точках. В этом выражении

- (1) $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ — число маркеров A и B в состоянии s , соответственно;
- (2) $\gamma(s)$ — число тривиальных кривых на торе T , получающихся в результате разрешения всех двойных точек диаграммы в соответствии с состоянием s ;

- (3) $[s]$ — формальное произведение нетривиальных кривых на торе T , получающихся в результате разрешений всех двойных точек диаграммы в соответствии с состоянием s ;
- (4) $\omega(D)$ — разность числа положительных и отрицательных двойных точек диаграммы D .

Значение $\langle K \rangle$ является элементом свободного модуля над $\mathbb{Z}[a, a^{-1}]$, свободно порождённого гомотопическими классами нетривиальных простых замкнутых кривых на торе T . Так как для каждого состояния все нетривиальные кривые, получающиеся в результате разрешений двойных точек диаграммы, параллельны, то каждый класс $[s]$ удобно записывать в виде монома x^δ , где $x \subset T$ — простая замкнутая кривая, δ — кратность вхождения этой кривой в класс $[s]$. Если в результате разрешения всех двойных точек диаграммы в соответствии с состоянием s получаются только тривиальные окружности на торе T , то можно считать, что $[s] = 1$. В этом случае будем говорить, что класс $[s]$ тривиален.

Обозначим через \mathcal{L}_K множество нетривиальных классов $[s]$, входящих в полином $\langle K \rangle$ с ненулевым коэффициентом. Через $\Omega_{[s]}$ обозначим множество гомотопических классов нетривиальных неориентированных простых замкнутых кривых на торе T , для которых сумма абсолютных значений индексов пересечений со всеми кривыми, входящими в класс $[s]$, не превосходит 1. Для вычисления индекса пересечений можно выбирать любые ориентации кривых, так как абсолютное значение от этого не зависит. Наконец, положим

$$\mathcal{A}_K = \bigcap_{[s] \in \mathcal{L}_K} \Omega_{[s]}.$$

Пример. Пусть $K \subset T \times I$ — узел в утолщённом торе, заданный диаграммой на рисунке 2. На этом рисунке двумерный тор представлен в виде квадрата, противоположные стороны которого отождествляются по параллельным переносам. Узел K имеет номер 3_2 в таблице из статьи [6]. Для этого узла

$$\langle K \rangle = -a^{-14} + a^{-10} + 2a^{-6} + (a^{-14} - a^{-10})m^2 - a^{-6}l^2,$$

где m — меридиан двумерного тора, соответствующий горизонтальной стороне квадрата, а l — его параллель, соответствующая вертикальной стороне (см. рисунок 2). Тогда $\mathcal{L}_K = \{m^2, l^2\}$. Заметим, что множество Ω_{m^2} состоит только из нетривиальных кривых на двумерном торе, которые не пересекаются с меридианом m . Следовательно $\Omega_{m^2} = \{m\}$. Аналогично $\Omega_{l^2} = \{l\}$. В результате $\mathcal{A}_K = \emptyset$.

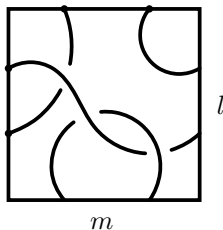


Рис. 2. Диаграмма узла 3_2 в утолщённом торе.

Определение 5. Узел в утолщённом торе $T \times I$ называется примарным, если он удовлетворяет следующим условиям:

- (1) любая сфера, пересекающая узел в двух точках, ограничивает трёхмерный шар, пересекающийся с узлом по незаузленной дуге;
- (2) для любого несжимаемого вертикального кольца $A \subset T \times I$ и любых двух непересекающихся разрезающих колец $A_1, A_2 \subset T \times I$, каждое из которых изотопно A , объединение $A_1 \cup A_2$ разбивает утолщённый тор $T \times I$ на два утолщённых кольца, одно из которых пересекается с узлом по тривиальной дуге (то есть по дуге, изотопной $\{*\} \times [0; 1] \subset A \times [0; 1]$), а второе по нетривиальной дуге.

В статье [6] в определении примарного узла дополнительно требуется, чтобы он не допускал дестабилизаций, то есть чтобы не существовало несжимаемых вертикальных колец, не пересекающихся с узлом.

Предложение. Примарный узел $K \subset T \times I$ допускает не более, чем $|\mathcal{A}_K|$ разрезающих колец.

Доказательство. Пусть кольцо $A \subset T \times I$ является разрезающим для узла $K \subset T \times I$, и пусть оно изотопно кольцу $c \times I \subset T \times I$. Тогда узел K допускает диаграмму $D \subset T$, которая пересекается с кривой c ровно в одной точке. В результате разрешения двойных точек диаграммы D в соответствии с любым состоянием $s \in \mathcal{S}(D)$ получается набор кривых, среди которых ровно одна нетривиальна и пересекает кривую c в одной точке, а все остальные кривые тривиальны. Следовательно, для всех $s \in \mathcal{S}(D)$ класс $[s]$ нетривиален и $c \in \Omega_{[s]}$. Это означает, что $c \in \mathcal{A}_K$.

Из примарности узла K и [3, Теорема 1] следует, что кривые $c_1, c_2 \in \mathcal{A}_K$, отвечающие разрезающим кольцам A_1, A_2 , соответственно, гомотопны на торе T тогда и только тогда, когда кольца A_1 и A_2 эквивалентны. \square

Отметим, что требование примарности узла в предложении существенно. В самом деле, предположим, что узел $K \subset T \times I$ не примарен и существуют два таких параллельных кольца $A_1, A_2 \subset T \times I$, что

- (1) кольцо A_i является разрезающим для узла K , $i = 1, 2$;
- (2) объединение $A_1 \cup A_2$ разбивает утолщённый тор на два утолщённых кольца, каждое из которых пересекается с узлом K по нетривиальной дуге.

Эти кольца не эквивалентны, но в множестве \mathcal{A}_K им отвечает одна кривая. В этом случае число разрезающих колец может быть больше, чем $|\mathcal{A}_K|$.

Доказательство теоремы. В статье [6] табулированы все примарные узлы в утолщённом торе, которые не допускают дестабилизаций и могут быть заданы диаграммами с не более, чем пятью двойными точками. Узлы в этой таблице классифицированы с точностью до гомеоморфизмов утолщённого тора. Для классификации примарных нотоидов ненулевой высоты, диаграммная сложность которых не превосходит пяти, достаточно найти результат разрезания всех табулированных узлов в утолщённом торе вдоль всех возможных разрезающих колец (если они существуют) и отбросить дубликаты. Это вытекает из следующих двух фактов (см. [3]):

- (1) нотоид примарен тогда и только тогда, когда результат его поднятия является примарным узлом в утолщённом торе;

- (2) результат поднятия нотоида допускает дестабилизацию тогда и только тогда, когда высота нотоида равна 0.

Для обозначения узлов в утолщённом торе будем использовать нумерацию из статьи [6]. Непосредственные вычисления показывают, что если $K \subset T \times I$ — узел в утолщённом торе, и

$$K \in \{4_6, 4_7, 4_8, 4_9, 5_{14}, 5_{23}, 5_{24}, 5_{34}, 5_{35}, 5_{36}, 5_{37}, 5_{38}, 5_{39}, 5_{43}, 5_{44}, 5_{45}, 5_{46}, 5_{69}\},$$

то $|\mathcal{A}_K| = 1$. В каждом из этих случаев кольцо $c \times I$, где c — единственная кривая из множества \mathcal{A}_K , является разрезающим для узла K .

Если $K \in \{2_1, 3_1, 4_1, 4_2, 4_3, 5_5, 5_6, 5_7, 5_{10}, 5_{12}, 5_{13}, 5_{30}, 5_{31}\}$, то $|\mathcal{A}_K| = 2$. В этих случаях обе кривые множества \mathcal{A}_K задают разрезающие кольца для узла K , но получающиеся в результате нотоиды эквивалентны. В большинстве этих случаев диаграммы нотоидов сводятся друг к другу с помощью гомеоморфизмов сферы и одновременных смен типов всех двойных точек диаграмм. Для узлов $5_{12}, 5_{13}$ и 5_{31} эквивалентность диаграмм нотоидов доказывается с использованием движений Рейдемейстера.

Для всех остальных табулированных узлов $K \subset T \times I$ множество \mathcal{A}_K пусто. Заметим, что в результате разрезания различных узлов в утолщённом торе получаются попарно неэквивалентные нотоиды. Следовательно, существует ровно 31 примарный нотоид ненулевой высоты диаграммной сложности не больше пяти. \square

REFERENCES

- [1] V. Turaev, *Knotoids*, Osaka Journal of Mathematics, **49**:1 (2012), 195–223. MR2903260
- [2] A. Bartholomew *Knotoids*, URL: <http://www.layer8.co.uk/maths/knotoids/index.htm> (дата обращения: 02.07.2018).
- [3] Ph.G. Korablev, Y.K. May, *Knotoids and knots in the thickened torus*, Siberian Mathematical Journal, **58**:5 (2017), 837–844. MR3766344
- [4] N. Gugumcu, L.H. Kauffman, *New Invariants of Knotoids*, European Journal of Combinatorics, **65** (2017), 186–229. MR3679845
- [5] H.A. Dye, L.H. Kauffman, *Minimal Surface Representation of Virtual Knots and Links*, Algebraic & Geometric Topology, **5** (2005), 509–535. MR2153118
- [6] A.A. Akimova, S.V. Matveev, *Classification of Genus 1 Virtual Knots Having at Most 5 Classical Crossings*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **23**:6 (2014), 1450031. MR3253963

PHILIPP GLEBOVICH KORABLEV
 CHELYABINSK STATE UNIVERSITY,
 BR. KASHIRINYKH STR., 192,
 454000, CHELYABINSK, RUSSIA,
 N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
 STR. S. KOVALEVSKOY, 4,
 620990, EKATERINBURG, RUSSIA
E-mail address: korablev@csu.ru

YANA KONSTANTINOVNA MAY
 CHELYABINSK STATE UNIVERSITY,
 BR. KASHIRINYKH STR., 192,
 454000, CHELYABINSK, RUSSIA
E-mail address: vinney1989@inbox.ru

VLADIMIR VICTOROVICH TARKAEV
CHELYABINSK STATE UNIVERSITY,
BR. KASHIRINYKH STR., 192,
454000, CHELYABINSK, RUSSIA,
N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
STR. S. KOVALEVSKOY, 4,
620990, EKATERINBURG, RUSSIA
E-mail address: `trk@csu.ru`