S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1284–1291 (2018) УДК 517.925
DOI 10.17377/semi.2018.15.104 MSC 34A09

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ — РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Я. ЯНЧЕНКО, В.А. ПОДКОПАЕВА

Abstract. In this paper, for a sufficient general class of algebraic differential equations, solutions that are entire functions of finite order are described.

Keywords: algebraic differential equations, entire functions of finite order.

1. Исторический обзор. Формулировка результатов

Исследование целых решений алгебраических дифференциальных уравнений как направление качественной теории дифференциальных уравнений оформилось в 80-е годы прошлого века. Следует, правда, отметить, что отдельные результаты в этом направлении были получены и ранее (в основном, в теории трансцендентных чисел — см., например, [1]).

К настоящему времени получен ряд результатов, описывающих решения (тех или иных классов алгебраических дифференциальных уравнений), которые являются специфическими целыми функциями (многочленами, или имеющими конечное число нулей). Более подробно с этими результатами можно ознакомиться по монографии В.И. Горбузова [2].

В последние годы авторами статьи с помощью разработанной техники оценки роста отношения целых функций получено описание целых решений конечного порядка для алгебраических дифференциальных уравнений с выделенной линейной частью [3]. В данной работе исследование целых решений алгебраических дифференциальных уравнений продолжены. Описаны целые решения

Yanchenko, A.Ya., Podkopaeva, V.A., On entire functions — solutions of a class of algebraic differential equations.

Поступила 30 июня 2018 г., опубликована 25 октября 2018 г.

конечного порядка для уравнений с выделенной однородной частью произвольной степени.

В дальнейшем будем обозначать через $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ соответственно поля действительных и комплексных чисел; через $M[\omega_1, \dots, \omega_N]$ — кольцо многочленов над кольцом M. Если $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целая функция, то положим: $M_f(R) = \max\limits_{|z| \le R} |f(z)|$; через $N_f(R)$ обозначаем число нулей функции $f(z)$ (с учетом их кратности) на круге $|z| \le R$ (при всяких $R > 0$).

Справедлива

Теорема 1. *Пусть $P_0(z, \omega_0, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}[z, \omega_0, \dots, \omega_n]$ и P_0 — однородный многочлен по переменным $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$ степени d ($d \ge 1$). Пусть $P_1(z, \omega_0, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}[z, \omega_0, \dots, \omega_n]$ и функция $y = f(z)$ является решением дифференциального уравнения*

$$P_0(z, y, y', \dots, y^{(n)}) + y^{d+1} P_1(z, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

При этом

$$\varlimsup_{R \to +\infty} \frac{\ln \ln M_f(R)}{\ln R} < +\infty,$$

$P_0(z, f(z), f'(z), \dots, f^{(n)}(z)) \not\equiv 0$ *в* $\mathbb{C}$. *Тогда существует многочлен $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, такой, что $f(z) = Q(z)$.*

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Каковы бы ни были число $H > 0$ и комплексные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — можно найти в комплексной плоскости такую совокупность из не более чем n кружков с общей суммой радиусов не более $2H$, что для всякой точки z, лежащей вне этих кружков, можно так перенумеровать точки $\{\alpha_i,\ i = 1, \dots, n\} \equiv \{\alpha_{i_k},\ k = 1, \dots, n\}$, что при всех $k = 1, \dots, n$ справедливы неравенства*

$$|z - \alpha_{i_k}| > k \frac{H}{n}.$$

(Утверждение леммы 1 является частью доказательства теоремы Картана [4], гл. 1, § 7, теорема 10.)

Следствие 1. *В условиях леммы 1 для всякого $z \in \mathbb{C}$, лежащего вне выброшенных кружков, справедливо неравенство:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z - \alpha_i|} \le \frac{n(\ln n + 1)}{H}.$$

Доказательство. Применив лемму 1, найдем:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z - \alpha_i|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z - \alpha_{i_k}|} < \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{H} \cdot \frac{1}{k} \le \frac{n(1 + \ln n)}{H}.$$

□

Лемма 2. *Пусть $\delta \in (0; 1)$; $R > 10^{1/\delta}$; B_R — конечное множество кружков с общей суммой радиусов менее $2R^{1-\delta}$, лежащих в кольце $C_R = \{2R \le |z| \le 3R\}$. Тогда найдется число $R_1 \in (2R; 3R)$, такое, что окружность $\beta_{R_1} = \{z : |z| = R_1\}$ не пересекается с множеством B_R.*

Доказательство. Пусть $\{(z_i, r_i);\ i = 1, \ldots, N\}$ — множество соответственно центров и радиусов всех кружков из B_R.

Рассмотрим множество $D_R = \left(\bigcup_{i=1}^{N} \{|z_i| - 2r_i \le |z| \le |z_i| + 2r_i\}\right) \cap C_R$. Тогда $B_R \subset D_R$ и для площади $C_R \backslash D_R$ имеем оценку:

$$S(C_R \backslash D_R) \ge 5\pi R^2 - \sum_{i=1}^{N} \pi\left[(|z_i| + 2r_i)^2 - (|z_i| - 2r_i)^2\right] \ge$$
$$\ge 5\pi R^2 - 8\pi \sum_{i=1}^{N} |z_i| r_i \ge 5\pi R^2 - 24\pi R \sum_{i=1}^{N} r_i \ge 5\pi R^2 - 48\pi R^{2-\delta} \ge$$
$$\ge \pi R^2 (5 - 48R^{-\delta}) > 0.$$

Таким образом, конечное объединение концентрических колец (с центром в нуле) $C_R \backslash D_R$ имеет ненулевую площадь, поэтому найдутся числа A, B такие, что $2R < A < B < 3R$, и кольцо $\{z : A \le |z| \le B\} \subset C_R \backslash D_R$, следовательно при $R_1 = (A + B)/2$ окружность $\beta_{R_1} = \{z : |z| = R_1\} \subset C_R \backslash D_R \subset C_R \backslash B_R$, что и требовалось доказать. □

Предложение 1. *Пусть $h(z)$ — целая функция и* $\overline{\lim\limits_{R\to+\infty}} \dfrac{\ln\ln M_h(R)}{\ln R} = \rho$, *где* $\rho \in [0; +\infty)$. *Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $R_0 \equiv R_0(\varepsilon) > 0$, такое, что при всяком $R > R_0$ при любом $H > 0$ из кольца $C_R = \{2R \le |z| \le 3R\}$ можно выбросить конечное число кружков с общей суммой радиусов не более $2H$ так, что при всяком $z \in C_R$, но вне выброшенных кружков, справедлива оценка*

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \le \sigma \left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1} \ln R + \frac{R^{\rho+\varepsilon} \ln R}{H}\right)$$

(где $\sigma > 0$ — постоянная, зависящая только от функции $h(z)$ и ε).

Доказательство. Без ограничения общности считаем $h(0) = 1$.

Действительно, если для таких функций утверждение леммы установлено, то при $h_1(z) = Az^m h(z)$ ($A \in \mathbb{C}$, $m \ge 1$, $h(0) \ne 0$) для указанных в условиях леммы z имеем:

$$\left|\frac{h_1'(z)}{h_1(z)}\right| \le \left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| + \frac{m}{|z|} \le \left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| + \frac{m}{2R},$$

и искомое неравенство будет выполняться и для функции $h_1(z)$.

Пусть $\{a_n\}$ — все нули функции $h(z)$ (с учетом их кратности). Будем обозначать через $N(x)$ число нулей $h(z)$ на круге $\{|z| \le x\}$ (при всяком $x \ge 0$). Тогда, используя интеграл Стилтьеса, при всяком $R > 0$ имеем:

$$N(R) = \int_0^R dN(x) = \int_\lambda^R dN(x) \tag{1}$$

(при некотором $\lambda > 0$) (см. [4], гл. 1).

По теореме Адамара $h(z) = e^{Q(z)}\Phi(z)$, где либо при некотором натуральном p

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p},$$

либо

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

В этом случае считаем $p = 0$. (Если число нулей $f(z)$ конечно, то $\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.) При этом ряд $\sum\limits_{a_n} \dfrac{1}{|a_n|^{p+1}}$ сходится и $p \le \rho$. Кроме этого, $\deg Q \le \rho$ (см. [4], гл. 1).

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В дальнейшем будем обозначать через γ_i, $i = 0, 1, \ldots$ положительные постоянные, зависящие только от функции $h(z)$ и ε (и не зависящие от R).

Найдется $R_0 \equiv R_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $R > R_0$

$$\ln M_h(R) < R^{\rho+\varepsilon}. \tag{2}$$

При всяком $R > R_0$ рассмотрим кольцо $C_R = \{2R < |z| < 3R\}$. Фиксируем $R > R_0$ и произвольное $H > 0$. По лемме 1 из круга $\{|z| \le 4R\}$ можно выбросить B_R — конечное число кружков с общей суммой радиусов менее $2H$ так, что при всяком z, с условиями $\begin{cases} |z| \le 4R \\ z \notin B_R \end{cases}$ справедлива оценка:

$$\sum_{|a_n| \le 4R} \frac{1}{|z - a_n|} \le \frac{N(4R)(\ln N(4R) + 1)}{H}.$$

Так как вследствие оценки (2) $N(R) \le \gamma_0 R^{\rho+\varepsilon}$ ([4], гл. 1), то найдем:

$$\sum_{|a_n| \le 4R} \frac{1}{|z - a_n|} \le \gamma_1 \frac{R^{\rho+\varepsilon} \ln R}{H} \tag{3}$$

(при всех z, с условиями $\begin{cases} |z| \le 4R \\ z \notin B_R \end{cases}$).

Пусть $z \in C_R \backslash B_R$. Возможны два случая.

1) $p = 0$. В этом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < +\infty. \tag{4}$$

Тогда $\dfrac{h'(z)}{h(z)} = Q'(z) - \sum\limits_{a_n} \dfrac{1}{a_n - z}$. Находим (используя (3), (4)):

$$\left| \sum_{a_n} \frac{1}{a_n - z} \right| \le \sum_{|a_n| \le R} \frac{1}{|a_n - z|} + \sum_{R \le |a_n| \le 4R} \frac{1}{|a_n - z|} + \sum_{|a_n| > 4R} \frac{1}{|a_n - z|} \le$$

$$\le \sum_{|a_n| \le R} \frac{1}{R} + \gamma_1 \frac{R^{\rho+\varepsilon} \ln R}{H} + \sum_{|a_n| > 4R} \frac{1}{|a_n| - \frac{3}{4}|a_n|} \le \frac{N(R)}{R} + \gamma_1 \frac{R^{\rho+\varepsilon} \ln R}{H} +$$

$$+ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \le \gamma_2 \left(R^{\rho+\varepsilon-1} + \frac{R^{\rho+\varepsilon} \ln R}{H} + 1 \right).$$

Далее, так как $\deg Q \le \rho$, то $|Q'(z)| \le \gamma_3 R^{\rho-1}$. Тогда, окончательно в первом случае, получим:

$$\left| \frac{h'(z)}{h(z)} \right| \le \gamma_4 \left(R^{\rho+\varepsilon-1} + \frac{R^{\rho+\varepsilon} \ln R}{H} + 1 \right),$$

т.е. в этом случае утверждение леммы верно.

2) $p \geq 1$. Имеем:

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = Q'(z) + \sum_{a_n}^{\infty} \left[\left(\frac{-1}{1 - \frac{z}{a_n}} + 1 + \frac{z}{a_n} + \ldots + \left(\frac{z}{a_n}\right)^{p-1} \right) \frac{1}{a_n} \right] =$$

$$= Q'(z) + \sum_{a_n}^{\infty} \left(\frac{-1}{a_n - z} + \frac{1 - \left(\frac{z}{a_n}\right)^p}{a_n - z} \right) = Q'(z) - \sum_{a_n}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}{a_n - z}. \tag{5}$$

Положим

$$\Sigma_1 = \sum_{|a_n| \leq R} \frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^p}{|a_n - z|}; \qquad \Sigma_2 = \sum_{R < |a_n| \leq 4R} \frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^p}{|a_n - z|}; \qquad \Sigma_3 = \sum_{|a_n| > 4R} \frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^p}{|a_n - z|}.$$

Оценим Σ_1, Σ_2, Σ_3.

а) $\Sigma_1 \leq \sum\limits_{|a_n| \leq R} \frac{(3R)^p}{|a_n|^p R} \leq 3^p R^{p-1} \int\limits_0^R \frac{dN(t)}{t^p} \leq$

$$\leq 3^p R^{p-1} \left(\int\limits_0^{R_0(\varepsilon)} \frac{dN(t)}{t^p} + \int\limits_{R_0(\varepsilon)}^R \frac{dN(t)}{t^p} \right) \leq$$

$$\leq 3^p R^{p-1} \left(\int\limits_0^{R_0(\varepsilon)} \frac{dN(t)}{t^p} + \frac{N(t)}{t^p}\bigg|_{R_0(\varepsilon)}^R + p \int\limits_{R_0(\varepsilon)}^R \frac{N(t)}{t^{p+1}} dt \right) \leq$$

$$\leq 3^p R^{p-1} \left(\int\limits_0^{R_0(\varepsilon)} \frac{dN(t)}{t^p} + \gamma_0 R^{\rho+\varepsilon-p} + p \int\limits_{R_0(\varepsilon)}^R \gamma_0 t^{\rho+\varepsilon-p-1} dt \right) \leq$$

$$\leq 3^p R^{p-1} \left(\int\limits_0^{R_0(\varepsilon)} \frac{dN(t)}{t^p} + \gamma_0 R^{\rho+\varepsilon-p} + \gamma_0 p R^{\rho+\varepsilon-p} \int\limits_{R_0(\varepsilon)}^R \frac{dt}{t} \right) \leq$$

$$\leq \gamma_6 R^{\rho+\varepsilon-1} \ln R.$$

б) Используя (3), имеем: $\Sigma_2 = \sum\limits_{R < |a_n| \leq 4R} \frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^p}{|a_n - z|} \leq 3^p \sum\limits_{|a_n| \leq 4R} \frac{1}{|a_n - z|} \leq$

$$\leq \gamma_7 \frac{R^{\rho+\varepsilon} \ln R}{H}.$$

в) $\Sigma_3 \leq \sum\limits_{|a_n| > 4R} \frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^p}{|a_n| - |z|} \leq \sum\limits_{|a_n| > 4R} \frac{(3R)^p}{\left(|a_n| - \frac{3}{4}|a_n|\right) |a_n|^p} \leq$

$$\leq \gamma_8 R^p \sum_{|a_n| > 4R} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}. \tag{6}$$

Пусть ρ_1 — показатель сходимости последовательности корней $\{a_n\}$, т.е. ρ_1 — наименьшее, такое, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho_1+\varepsilon_1}}$ сходится при любом $\varepsilon_1 > 0$. Тогда $\rho_1 \le \rho$, $p \le \rho_1 \le p+1$ ([4], гл. 1). Возможны два случая.

а) $\rho_1 < p+1$. Тогда (без ограничения общности считая $\varepsilon < p+1-\rho_1$) найдем:

$$\Sigma_3 \le \gamma_8 R^p \sum_{|a_n|>4R} \frac{1}{|a_n|^{\rho_1+\varepsilon}} \cdot \frac{1}{|a_n|^{p+1-\rho_1-\varepsilon}} \le \gamma_9 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho_1+\varepsilon}} \right) R^{\rho_1+\varepsilon-1} \le$$

$$\le \gamma_{10} R^{\rho+\varepsilon-1}.$$

б) $\rho_1 = p+1$. Тогда (так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ сходится) из (6) найдем:

$$\Sigma_3 \le \gamma_8 R^p \sum_{|a_n|>4R} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} \le \gamma_8 R^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} \le \gamma_{11} R^{\rho-1}.$$

Таким образом, в любом случае имеем оценку:

$$\Sigma_3 \le \gamma_{12} R^{\rho+\varepsilon-1}.$$

Но тогда из равенства (5) находим (учитывая, что $\deg(Q') \le \rho - 1$)

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \le \gamma_{13} \left(R^{\rho+\varepsilon-1} \ln R + \frac{R^{\rho+\varepsilon} \ln R}{H} \right),$$

т.е. и во втором случае утверждение верно.

Таким образом, предложение 1 полностью доказано. □

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\varepsilon = 1/2$.

Фиксируем какое-либо достаточно большое R. Положим $C_R = \{2R \le |z| \le 3R\}$. Применим к каждой из функций $\varphi_k(z) = f^{(k)}(z)$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ предложение 1. Тогда найдутся множества $\{B_{R,k}\}$, каждое из которых представляет собой конечную совокупность кружков с общей суммой радиусов не более $2H \equiv 2R^{1-\varepsilon}$ — такие, что при любом $z \in C_R \backslash B_{R,k}$

$$\left| \frac{\varphi_k'(z)}{\varphi_k(z)} \right| \le \gamma_0 R^{\rho-1+\varepsilon} \ln R$$

(в дальнейшем γ_i, $i = 0, 1, \dots$ — постоянные, не зависящие от R).

Но тогда при всяком $k = 1, \dots, n$ и любом $z \in C_R \backslash (\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} B_{R,k})$

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \cdot \ldots \cdot \left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(k-1)}(z)} \right| \le \gamma_1 R^{n(\rho-1+\varepsilon)} \ln^n R. \tag{7}$$

Применим лемму 2 (в качестве B_R возьмем $\bigcup\limits_k B_{R,k}$). Тогда найдется $\beta_1 \in (2R, 3R)$, такое, что при любом $k = 1, \dots, n$

$$\max_{z \in \beta_1} \left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \le \gamma_2 R^{n(\rho-1+\varepsilon)} \ln^n R.$$

Пусть

$$P_0(z, f, f', \ldots, f^{(n)}) = \sum_{t_0+\ldots+t_n=d} C_{\bar{t}}(z)(f(z))^{t_0} \ldots (f^{(n)}(z))^{t_n}$$

(где $C_{\bar{t}}(z) \in \mathbb{C}[z]$). Тогда, преобразуя исходное уравнение для $f(z)$, найдем:

$$h(z) = -f(z)P_1(z, f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)), \tag{8}$$

где $h(z) = \sum_{t_0+\ldots+t_n=d} C_{\bar{t}}(z) \left(\frac{f(z)}{f(z)}\right)^{t_0} \ldots \left(\frac{f^{(n)}}{f(z)}\right)^{t_n}$ — целая функция.

Пусть N — максимум из степеней многочленов $C_{\bar{t}}(z)$; A — максимум модулей коэффициентов всех многочленов $\{C_{\bar{t}}(z)\}$. Тогда (в силу (7))

$$M_h(R) \le \gamma_2 A R^N R^{nd(\rho-1+\varepsilon)} (\ln R)^{nd} \le \gamma_3 R^{nd\rho} (\ln R)^{nd}$$

при всяком достаточно большом R. Но тогда $h(z)$ является многочленом. Поэтому $P_0(z, f, f', \ldots, f^{(n)}) = f^d(z)h(z)$ и $f^d(z)h(z)+f^{d+1}(z)P_1(z, f, f', \ldots, f^{(n)}) = 0$. Из (8)) тогда следует, что $f(z)$ имеет конечное число нулей, поэтому $f(z) = a(z)e^{b(z)}$ ([4], гл. 1), где $a(z), b(z) \in \mathbb{C}[z]$.

Если $b(z)$ — постоянная, то теорема 1 доказана. Предположим, что $b(z) = a_r z^r + \ldots + a_0$, $a_r \ne 0$ и $r \ge 1$.

Для многочлена (из условия теоремы 1)

$$R \equiv P_0(z, \omega_0, \ldots, \omega_n) + \omega_0^{d+1} P_1(z, \omega_0, \ldots, \omega_n)$$

рассмотрим его представление в сумму однородных (по степеням $\omega_0, \ldots, \omega_n$) $R = Q_d + \ldots + Q_L$ (где $Q_d \equiv P_0$ и $L \ge d+1$); Q_j — однородные степени j при всех $j = d, d+1, \ldots, L$.

Без ограничения общности, согласно условиям теоремы 1, предполагая, что $Q_L(z, f, f', \ldots, f^{(n)}) \not\equiv 0$, подставив $f(z) = a(z)e^{b(z)}$, найдем:

$$Q_L(z, a(z)e^{b(z)}, \ldots, (a(z)e^{b(z)})^{(n)}) = \sum_{j=d}^{L-1} Q_j(z, a(z)e^{b(z)}, \ldots, (a(z)e^{b(z)})^{(n)})$$

или

$$e^{Lb(z)} H_L(z) = -\sum_{j=d}^{L-1} e^{jb(z)} H_j(z), \tag{9}$$

где $H_d(z), \ldots, H_L(z) \in \mathbb{C}[z]$, причем $H_L(z) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

В равенстве (9) слева стоит целая функция порядка r и типа $L|a_r|$, справа же — целая функция порядка не более r и типа — не более $(L-1)|a_r|$. Поэтому это равенство невозможно ([4], гл. 1, § 9, теорема 12), что завершает доказательство теоремы 1.

References

[1] A.O. Gelfond, *Transcendental and algebraic numbers*, Moskow: Gostekhizdat, 1953.

[2] V.N. Gorbuzov, *Integral solutions of algebraic differential equations*, Grodno: GrSU, 2006.

[3] A.Ya. Yanchenko, V.A. Podkopaeva, *On entire solutions of a class of algebraic differential equations*, Modern methods of the theory of boundary value problems (Proceedings of the International Conference on the 90th anniversary of V.A. Il'in) (2018), 245 (in Russian).

[4] B.Ya. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Moskow: GITTL, 1956.

Victoria Alexandrovna Podkopaeva
National Research University «MPEI»,
st. Krasnokazarmennaya, 14,
111250, Moskow, Russia
E-mail address: vapodk@yandex.ru

Alexander Yakovlevich Yanchenko
National Research University «MPEI»,
st. Krasnokazarmennaya, 14,
111250, Moskow, Russia
E-mail address: yanchenkoAY@mpei.ru