S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1292–1300 (2018) УДК 519.214
DOI 10.17377/semi.2018.15.105 MSC 60F17

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ В ФОРМЕ ШТРАССЕНА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ЧАСТНЫХ СУММ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Н.С. АРКАШОВ

Abstract. We consider the process of partial sums of moving averages of finite order with a regular varying memory function, constructed from a stationary sequence having the structure of a two-sided moving average. We study the Gaussian approximation of this process of partial sums with the aid of a certain class of Gaussian processes, and obtain estimates of the rate of convergence in the invariance principle in the Strassen form.

Keywords: invariance principle, fractal Brownian motion, moving average, Gaussian process, memory function, regular varying function

1. Введение и формулировка основных результатов

В настоящей работе получен принцип инвариантности в форме Штрассена для случайного блуждания, приведенного в [1], в этой же работе исследовалась гауссовская аппроксимация для указанного блуждания в случае степенной функции памяти. Целью настоящей работы является изучение более широкого класса функций памяти, представленного классом правильно меняющихся функций, который также может иметь физический смысл. Отметим, что содержательные оценки близости случайного блуждания и предельного гауссовского процесса позволяют, в частности, получить закон изменения дисперсии для исходного случайного блуждания. В прикладных исследованиях (см., например, обзор [2]) закон изменения дисперсии характеризует соответствующий случайному блужданию режим переноса (диффузионный, суб- или супердиффузионный). Заметим, что в настоящей работе дисперсия исследуемого блуждания

Arkashov, N.S., The principle of invariance in the Strassen form to the partial sum processes of moving averages of finite order.

© 2018 Аркашов Н.С.

Поступила 8 ноября 2017 г., опубликована 26 октября 2018 г.

определяется видом функции памяти и корреляционной структурой стационарной последовательности, формирующей это блуждание.

Пусть $\{X_j;\ j \in \mathbb{Z}\}$ — стационарная последовательность случайных величин, имеющая представление в виде двустороннего скользящего среднего (см., например, [3]):

$$X_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}\xi_k, \tag{1}$$

где $\{\xi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, $\{a_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ — неслучайная, квадратично суммируемая последовательность действительных чисел.

Через $\mathcal{M}$ обозначим множество всех неубывающих и неотрицательных функций, определенных на промежутке $[0, +\infty)$, отличных от констант.

Построим последовательность скользящего среднего порядка $k-1$ (см., например, [3])

$$v_0 = 0,\ v_k = \sum_{i=0}^{k-1} X_{k-i}\Delta M(i),\ k \geq 1, \tag{2}$$

где $M \in \mathcal{M}$ и $\Delta M(i) = M(i+1) - M(i)$. Функцию M будем называть *функцией памяти* (см. [4], [5]). Определим процесс частных сумм по последовательности из (2):

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} v_k,\ n = 0, 1, \dots. \tag{3}$$

Последовательность $\{R_n\}$, построенную по функции M, будем обозначать через $\{R_n(M)\}$.

Через $B_H(t)$ обозначим фрактальное броуновское движение (см. [6]), т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$R(t, s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \tag{4}$$

где $H \in (0, 1)$ — так называемый параметр Хёрста. Далее, определим гауссовский процесс:

$$Z_t(M, H) = \sigma \int_0^t B_H(t-s)\, dM(s).$$

Введем обозначения, связанные с исходными коэффициентами $\{a_i\}$:

$$A_m = a_0 + \dots + a_m \ \text{ при } m \geq 0 \ \text{ и } A_{-1} = 0,$$
$$A_m = -(a_{m+1} + \dots + a_{-1}) \ \text{ при } m < -1.$$

Наряду с последовательностью $\{A_m\}$ нам понадобятся следующие обозначения, связанные с параметром H:

$$\Delta_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} (A_{n+m} - A_m - \sigma L_H^{-1/2}(n+m+1)^{H-1/2}$$
$$+ \sigma L_H^{-1/2}(m+1)^{H-1/2})^2;$$
$$\Delta_n^{(2)} = \sum_{m=1}^{n} (A_{n-m} - A_{-m} - \sigma L_H^{-1/2}(n-m+1)^{H-1/2})^2;$$
$$\Delta_n^{(3)} = \sum_{m>n} (A_{n-m} - A_{-m})^2;$$
$$\Delta_n = \Delta_n^{(1)} + \Delta_n^{(2)} + \Delta_n^{(3)};$$
$$\Delta_{\alpha,n} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \max\{|m|^{1/\alpha}, n^{1/\alpha}\}|a_{n+m} - a_m|,$$

где σ — положительная константа, $H \in (0,1)$ и

$$L_H = \frac{1}{2H} + \int_0^{\infty} ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2\, ds.$$

Теорема 1. *Пусть $M \in \mathcal{M}$. Если $\mathbf{E}|\xi_1|^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha > 2$, то процессы $R_{[t]}(M)$ и $Z_t(M,H)$ можно задать на одном вероятностном пространстве, так что при $t \to \infty$ выполняется соотношение*:

$$R_{[t]}(M) - Z_t(M,H) = o(M(t)\Delta_{\alpha,[t]}) + O(M(t)\sqrt{(1+\Delta_{[t]})\log t}) \quad \text{п. н.},$$

где $[t]$ — целая часть числа t.

Приведем следующее условие (H) на последовательность $\{a_k\}$ (см. [7]):

(H): Пусть последовательность $\{a_k;\, k\in\mathbb{Z}\}$ монотонна на каждой из полуосей $k \le -N$ и $k \ge N$, а также удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &|a_{-k}| + |a_k - \sigma(H-1/2)L_H^{-1/2}k^{H-3/2}| = O(k^{H-\delta-3/2}),\ k\to+\infty; \\ &|A_{-k}| + |A_k - \sigma L_H^{-1/2}k^{H-1/2}| = O(k^{H-\delta-1/2}),\ k\to+\infty, \end{aligned} \tag{5}$$

где $N \ge 1$, $0 < H < 1$, $0 < \delta < H$ и σ — положительная константа.

Следствие 1. *Пусть выполняется условие теоремы* 1 *и условие* (H). *Тогда $R_{[t]}(M)$ и $Z_t(M,H)$ можно задать на одном вероятностном пространстве, так что при $t\to\infty$ имеет место соотношение*:

$$R_{[t]}(M) - Z_t(M,H) = o(M(t)t^{H'-1/2+1/\alpha}) + O(t^{H-\delta}M(t)\sqrt{\log t}) \quad \text{п. н.},$$

где $H' = \max\{H, 1/2\}$.

Через $\mathcal{R}_\nu \subseteq \mathcal{M}$ обозначим класс правильно меняющихся функций с показателем $\nu \ge 0$, имеющих следующее представление: $l(t)t^\nu$, где $l(t)$ — медленно меняющаяся на $+\infty$ (см., например, [8]), неотрицательная и неубывающая функция на $[0,+\infty)$ (считаем, что $0^0 = 1$).

Отметим, что блуждание $\{R_n(M)\}$ со степенной функцией памяти исследовалось в работе [1].

Предложение 1. *Пусть $M \in \mathcal{R}_\nu$, $\nu > 0$. Тогда при $t\to\infty$ выполняется соотношение*:

$$\mathbf{E}Z_t^2(M,H) \sim \sigma^2 s_{\nu,H}^2 M^2(t) t^{2H}, \tag{6}$$

где $s^2_{\nu,H} = \frac{\nu^2}{2}\int_0^1\int_0^1((1-u)^{2H}+(1-v)^{2H}-|u-v|^{2H})u^{\nu-1}v^{\nu-1}\,dudv$.
Если $M \in \mathcal{R}_0$, *то при* $t\to\infty$ *имеет место соотношение*:

$$\mathbf{E}Z_t^2(M,H) \sim \sigma^2\left(1-\frac{M(0)}{M(+\infty)}\right)^2 M^2(t)t^{2H}. \tag{7}$$

Из предложения 1 и следствия 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть выполняется условие* (H) *и* $M\in\mathcal{R}_\nu$. *Тогда имеет место соотношение*:

$$\mathbf{D}R_n(M) \sim \mathbf{D}Z_n(M,H),\ n\to\infty.$$

Замечание 1. Будем говорить о *содержательных* оценках близости процессов $R_n(M)$ и $Z_n(M,H)$ в случае, когда при $n\to\infty$ выполняется соотношение

$$R_n(M)-Z_n(M,H) = o(\sqrt{\mathbf{D}Z_n(M,H)}) \text{ п. н.} \tag{8}$$

В частности, если в следствии 1 функция $M\in\mathcal{R}_\nu$ при некотором $\nu\ge 0$, то, в соответствии с предложением 1, можно говорить о содержательных оценках близости процессов (рассматриваемых в следствии 1) при таком моментном ограничении: $\alpha > \max(2, 1/H)$.

2. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1 разобьем на леммы 1—4.

Введем обозначение: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ при $n\ge 1$, $S_0 = 0$. В качестве леммы 1 приведем утверждение из [9, теорема 3].

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{E}|\xi_1|^\alpha<\infty$ *для некоторого* $\alpha>2$, *тогда случайное блуждание* S_n *и процесс* $B_H(n)$, *можно задать на одном вероятностном пространстве, так что при* $n\to\infty$ *выполняется соотношение*:

$$\sup_{1\le k\le n}|S_k-\sigma B_H(k)| = o(\Delta_{\alpha,n}) + O(\sqrt{(1+\Delta_n)\log n}) \text{ п. н.}$$

Лемма 2. *Пусть выполняется условие теоремы* 1, *тогда при* $n\to\infty$ *выполняется соотношение*:

$$\begin{aligned} R_n(M) - \sigma\int_0^n B_H(n-[s])\,dM(s) \\ = o(M(n)\Delta_{\alpha,n}) + O(M(n)\sqrt{(1+\Delta_n)\log n}) \text{ п. н.}\end{aligned}$$

Доказательство. Меняя порядок суммирования в (3), представим $R_n(M)$ в виде $\sum_{i=0}^n S_{n-i}\Delta M(i)$, откуда получаем представление $R_n(M)$ в виде интеграла: $\int_0^n S_{n-[s]}\,dM(s)$. Воспользовавшись этим представлением, выводим неравенство:

$$|R_n(M)-\sigma\int_0^n B_H(n-[s])\,dM(s)| \le \max_{1\le k\le n}|S_k-\sigma B_H(k)|M(n).$$

Откуда, используя лемму 1, получаем утверждение леммы. □

Приведем следующее утверждение из [1, лемма 4].

Лемма 3. *При* $n\to\infty$ *выполняется соотношение*:

$$\sup_{|t-s|\le 1, t,s\in[0,n]}|B_H(t)-B_H(s)| = O(\sqrt{\log n}) \text{ п. н.}$$

Лемма 4. *При $t \to \infty$ выполняется равенство*:

$$\left| \int_0^t B_H(t-s)\,dM(s) - \int_0^{[t]} B_H([t]-[s])\,dM(s) \right| = O(M(t)\sqrt{\log t}) \ \text{п. н.}$$

Доказательство. Прежде всего имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t B_H(t-s)\,dM(s) - \int_0^{[t]} B_H([t]-[s])\,dM(s) \right| \\ &\le \left| \int_0^{[t]} (B_H(t-s) - B_H([t]-[s]))\,dM(s) \right| + \left| \int_{[t]}^t B_H(t-s)\,dM(s) \right| \\ &\le \sup_{|u-v|\le 1, u,v\in[0,t]} |B_H(u)-B_H(v)| M(t) + \sup_{|u|\le 1, u\in[0,t]} |B_H(u)| M(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Далее, из (9) получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t B_H(t-s)\,dM(s) - \int_0^{[t]} B_H([t]-[s])\,dM(s) \right| \\ &\qquad\qquad \le 2 \sup_{|u-v|\le 1, u,v\in[0,t]} |B_H(u)-B_H(v)| M(t). \end{aligned}$$

Применяя лемму 3, получаем утверждение леммы 4. □

Доказательство теоремы 1. Выполняется следующее очевидное неравенство

$$\begin{aligned} &|R_{[t]}(M) - Z_t(M,H)| \\ &\le \left| R_{[t]}(M) - \sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-[s])\,dM(s) \right| \\ &+ \left| \sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-[s])\,dM(s) - \sigma \int_0^t B_H(t-s)\,dM(s) \right|. \end{aligned} \tag{10}$$

Применяя леммы 2 и 4 соответственно к первому и второму слагаемому правой части (10), получаем утверждение теоремы. □

Доказательство следствия 1. В соответствии с [7, лемма 16] получаем, что

$$\Delta_n = O(n^{2H-2\delta}),\ n \to +\infty. \tag{11}$$

Покажем, что

$$\Delta_{\alpha,n} = O(n^{H'-1/2+1/\alpha}),\ n \to +\infty, \tag{12}$$

где $H' = \max\{H, 1/2\}$. Дальнейшие вычисления повторяют схему доказательства леммы 5 из [9].

Выполняется равенство

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha,n} &= n^{1/\alpha} \sum_{k=-n}^{n-1} |a_k - a_{k+n}| + \sum_{k=n}^{\infty} k^{1/\alpha} |a_k - a_{k+n}| \\ &+ \sum_{k=-2n+1}^{-n-1} |k|^{1/\alpha} |a_k - a_{k+n}| + \sum_{k=-\infty}^{-2n} |k|^{1/\alpha} |a_k - a_{k+n}|. \end{aligned} \tag{13}$$

Оценим первое слагаемое правой части (13). Используя условие (H) (см. соотношения (5)), выводим

$$n^{1/\alpha}\sum_{k=-n}^{n-1}|a_k-a_{k+n}|\le 2n^{1/\alpha}\sum_{k=0}^{2n-1}|a_k|=O(n^{H'-1/2+1/\alpha}).$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части (13). Заметим, что из условия (H) следует, что при всех $k\ge 1$: $|a_k|+|a_{-k}|\le Ck^{H-3/2}$, где C — некоторая константа. Далее, имеем (в силу того что коэффициенты a_i монотонны при $i\ge N$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}k^{1/\alpha}|a_k-a_{k+n}|&\le\sum_{k=n}^{2n-1}k^{1/\alpha}|a_k|+\sum_{k=2n}^{\infty}|a_k|(k^{1/\alpha}-(k-n)^{1/\alpha})\\&\le C(2n-1)^{1/\alpha}n^{H-1/2}+C\sum_{k=n}^{\infty}k^{H-3/2}n(1/\alpha)k^{1/\alpha-1}.\end{aligned}$$

Стало быть,

$$\sum_{k=n}^{\infty}k^{1/\alpha}|a_k-a_{k+n}|=O(n^{H-1/2+1/\alpha}),\ n\to\infty.$$

Третье слагаемое правой части (13) оценивается аналогично первому слагаемому того же выражения, в итоге получаем

$$\sum_{k=-2n+1}^{-n-1}|k|^{1/\alpha}|a_k-a_{k+n}|=O(n^{H'-1/2+1/\alpha}),\ n\to\infty.$$

Соответственно четвертое слагаемое правой части (13) оценивается аналогично второму слагаемому

$$\sum_{k=-\infty}^{-2n}|k|^{1/\alpha}|a_k-a_{k+n}|=O(n^{H-1/2+1/\alpha}),\ n\to\infty.$$

Объединяя оценки первого — четвертого слагаемого правой части (13), получаем (12). Применяя соотношения (11) и (12) к теореме 1, получаем заключение следствия.

□

Доказательство предложения 1. Выполняется следующее равенство:

$$\mathbf{E}Z_t^2(M,H)=\sigma^2\int_0^t\int_0^t\mathbf{E}B_H(t-r)B_H(t-s)\,dM(r)dM(s). \tag{14}$$

Из (4) и (14) следует, что

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}Z_t^2(M,H)\\&=\sigma^2\int_0^t\int_0^t\frac{(t-r)^{2H}+(t-s)^{2H}-|r-s|^{2H}}{2}\,dM(r)dM(s).\end{aligned} \tag{15}$$

Введем обозначение: $K(u,v)=\frac{(1-u)^{2H}+(1-v)^{2H}-|u-v|^{2H}}{2}$. Отметим, что

$$0\le K(u,v)\le 1 \tag{16}$$

при всех $u,v\in[0,1]$.

Пусть сначала $\nu > 0$. Представим $M(t)$ в виде $t^\nu l(t)$. Сделав в (15) замену $r = tu$ и $s = tv$ и разделив на $\sigma^2 t^{2H+2\nu} l^2(t)$, получим

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbf{E}Z_t^2(M,H)}{\sigma^2 t^{2H+2\nu} l^2(t)} &= \int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{l(ut)}{l(t)}\frac{l(vt)}{l(t)}\,du^\nu dv^\nu \\
&+ \int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{u^\nu}{l(t)}\frac{l(vt)}{l(t)}\,dl(ut)dv^\nu \\
&+ \int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{v^\nu}{l(t)}\frac{l(ut)}{l(t)}\,dl(vt)du^\nu \\
&+ \int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{u^\nu}{l(t)}\frac{v^\nu}{l(t)}\,dl(ut)dl(vt).
\end{aligned} \tag{17}
$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части (17). Из возрастания и неотрицательности l на $[0,+\infty)$ следуют неравенства $0 \le K(u,v)\frac{l(ut)}{l(t)}\frac{l(vt)}{l(t)} \le K(u,v)$. Отметим, что $0 \le \int_0^1\int_0^1 K(u,v)\,du^\nu dv^\nu < +\infty$, кроме того, для любых $u,v \in (0,1)$ имеют место соотношения: $\frac{l(ut)}{l(t)} \to 1$ и $\frac{l(vt)}{l(t)} \to 1$ при $t \to +\infty$. Поэтому из леммы Фату следует

$$
\int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{l(ut)}{l(t)}\frac{l(vt)}{l(t)}\,du^\nu dv^\nu \to \int_0^1\int_0^1 K(u,v)\,du^\nu dv^\nu \tag{18}
$$

при $t \to +\infty$. Отметим, что $s^2_{\nu,H} = \int_0^1\int_0^1 K(u,v)\,du^\nu dv^\nu$ (см. заключение предложения).

Рассмотрим второе слагаемое правой части (17). Выберем произвольное $0 < \varepsilon < 1$. В силу неравенства (16) получаем

$$
\int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{u^\nu}{l(t)}\frac{l(vt)}{l(t)}\,dl(ut)dv^\nu \le \int_0^1 \frac{u^\nu}{l(t)}\,dl(ut)\int_0^1\frac{l(vt)}{l(t)}\,dv^\nu. \tag{19}
$$

Используя возрастание l, получаем, что второй множитель в (19) оценивается сверху 1, стало быть, выполняется неравенство

$$
\int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{u^\nu}{l(t)}\frac{l(vt)}{l(t)}\,dl(ut)dv^\nu \le \int_0^1 \frac{u^\nu}{l(t)}\,dl(ut). \tag{20}
$$

Представим правую часть неравенства (20) в виде

$$
\int_0^1 \frac{u^\nu}{l(t)}\,dl(ut) = \int_0^\varepsilon \frac{u^\nu}{l(t)}\,dl(ut) + \int_\varepsilon^1 \frac{u^\nu}{l(t)}\,dl(ut). \tag{21}
$$

Для первого слагаемого правой части (21), очевидно, получаем неравенство: $\int_0^\varepsilon \frac{u^\nu}{l(t)}\,dl(ut) \le \varepsilon^\nu(\frac{l(\varepsilon t)}{l(t)} - \frac{l(0)}{l(t)})$. Второе слагаемое оценивается таким образом: $\int_\varepsilon^1 \frac{u^\nu}{l(t)}\,dl(ut) \le 1 - \frac{l(\varepsilon t)}{l(t)}$. В итоге имеем неравенства:

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{t\to+\infty}\int_0^1 \frac{u^\nu}{l(t)}\,dl(ut) \le \varepsilon^\nu \limsup_{t\to+\infty}\left(\frac{l(\varepsilon t)}{l(t)} - \frac{l(0)}{l(t)}\right) + \limsup_{t\to+\infty}\left(1 - \frac{l(\varepsilon t)}{l(t)}\right) \\
&= \varepsilon^\nu\left(1 - \frac{l(0)}{l(+\infty)}\right).
\end{aligned} \tag{22}
$$

В силу произвольности ε, учитывая (20) и (22), выводим

$$
\lim_{t\to+\infty}\int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{u^\nu}{l(t)}\frac{l(vt)}{l(t)}\,dl(ut)dv^\nu = 0. \tag{23}
$$

Для третьего слагаемого правой части (17) аналогичным образом получаем

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{v^\nu}{l(t)}\frac{l(ut)}{l(t)}\,dl(vt)du^\nu=0. \tag{24}$$

Рассмотрим четвертое слагаемое правой части (17). Учитывая (16), получаем

$$\int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{u^\nu}{l(t)}\frac{v^\nu}{l(t)}\,dl(ut)dl(vt)\le\left(\int_0^1\frac{u^\nu}{l(t)}\,dl(ut)\right)^2. \tag{25}$$

Далее, имея ввиду (22), выводим

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{u^\nu}{l(t)}\frac{v^\nu}{l(t)}\,dl(ut)dl(vt)\le\varepsilon^{2\nu}\left(1-\frac{l(0)}{l(+\infty)}\right)^2. \tag{26}$$

Откуда в силу произвольности ε получаем

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1\int_0^1 K(u,v)\frac{u^\nu}{l(t)}\frac{v^\nu}{l(t)}\,dl(ut)dl(vt)=0. \tag{27}$$

Применяя соотношения (18), (23), (24) и (27) к (17), получаем справедливость соотношения (6).

Перейдем к случаю $\nu=0$. В этом случае $M=l$ — медленно меняющаяся функция из класса $\mathcal{R}_0$. Очевидно, что правая часть соотношения (17) переписывается в этом случае в виде:

$$\int_0^1\int_0^1\frac{K(u,v)}{l^2(t)}\,dl(ut)dl(vt). \tag{28}$$

Выберем произвольное $0<\varepsilon<1$. Существует $\delta>0$, такое что при всех $u,v\in[0,\delta)$ выполняется неравенство

$$K(u,v)\ge 1-\varepsilon. \tag{29}$$

Рассмотрим (28). Используя неравенства (16) и (29), получаем

$$(1-\varepsilon)\left(\int_0^\delta\frac{dl(ut)}{l(t)}\right)^2\le\int_0^1\int_0^1\frac{K(u,v)}{l^2(t)}\,dl(ut)dl(vt)\le\left(\int_0^1\frac{dl(ut)}{l(t)}\right)^2.$$

Откуда выводим

$$(1-\varepsilon)\left(\frac{l(\delta t)}{l(t)}-\frac{l(0)}{l(t)}\right)^2\le\int_0^1\int_0^1\frac{K(u,v)}{l^2(t)}\,dl(ut)dl(vt)\le\left(1-\frac{l(0)}{l(t)}\right)^2. \tag{30}$$

Из (30) вытекают неравенства

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_0^1\int_0^1\frac{K(u,v)}{l^2(t)}\,dl(ut)dl(vt)\le\left(1-\frac{l(0)}{l(+\infty)}\right)^2 \tag{31}$$

и

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_0^1\int_0^1\frac{K(u,v)}{l^2(t)}\,dl(ut)dl(vt)\ge(1-\varepsilon)\left(1-\frac{l(0)}{l(+\infty)}\right)^2. \tag{32}$$

Из (31) и (32) следует

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1\int_0^1\frac{K(u,v)}{l^2(t)}\,dl(ut)dl(vt)=\left(1-\frac{l(0)}{l(+\infty)}\right)^2. \tag{33}$$

В итоге из соотношения (33) получаем

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathbf{E}Z_t^2(M,H)}{\sigma^2 t^{2H} l^2(t)} = \left(1-\frac{l(0)}{l(+\infty)}\right)^2. \tag{34}$$

Из (34) выводим справедливость соотношения (7). Предложение доказано. □

Доказательство следствия 2. Прежде всего отметим, что утверждение следствия 1 справедливо для гауссовского аналога процесса $R_n(M)$, когда случайные величины ξ_k в (1) – стандартные нормальные, при этом величина $\mathbf{D}R_n(M)$ не изменится. Следовательно, выполняется соотношение (8) (см. замечание 1). Откуда следует, что при $n \to \infty$ распределения случайных величин $R_n(M)/\sqrt{\mathbf{D}Z_n(M,H)}$ слабо сходятся к стандартному нормальному закону. Кроме того, случайная величина $R_n(M)/\sqrt{\mathbf{D}R_n(M)}$ при всех n имеет стандартное нормальное распределение, поэтому получаем, что $\mathbf{D}R_n(M) \sim \mathbf{D}Z_n(M,H)$, $n \to \infty$. Следствие доказано.

□

Автор признателен профессору В. А. Селезневу за внимание к работе.

Автор благодарен рецензенту за целый ряд ценных советов и полезных замечаний, позволивших значительно улучшить содержание работы.

References

[1] N. S. Arkashov and V. A. Seleznev, *Formation of a relation of nonlocalities in the anomalous diffusion model*, Theoret. and Math. Phys., **193**:1 (2017), 1508–1523. MR3716529

[2] R. Metzler and J. Klafter, *The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach*, Phys. Rep., **339**:1 (2000), 1–77. MR1809268

[3] A. N. Shiryaev, *Probability*, New York: Springer-Verlag, 1995. Zbl 0835.60002

[4] A. I. Olemskoi and A. Ya. Flat, *Application of fractals in condensed-matter physics*, Phys. Usp., **36**, (1993), 1087—1128.

[5] R. R. Nigmatullin, *Fractional integral and its physical interpretation*, Theor. Math. Phys., **90**:3 (1992), 242–251. MR1182302

[6] B. Mandelbrot and J. Van Ness, *Fractional Brownian motions, fractional noise and applications*, SIAM Rev., **10** (1968), 422–437. MR0242239

[7] N. S. Arkashov, I. S. Borisov, and A. A. Mogulskii, *Large Deviation Principle for Partial Sum Processes of Moving Averages*, Theory Probab. Appl., **52**:2 (2008), 181–208. MR2742500

[8] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, v. II, New York: John Wiley & Sons, 1971. MR0270403

[9] T. Konstantopoulos, A. Sakhanenko, *Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **1** (2004), 47–63. MR2132447

Nikolay Sergeevich Arkashov
Novosibirsk State Technical University,
K. Marx pr., 20,
630073, Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
Pirogova st., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: nicky1978@mail.ru