S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1301–1310 (2018) УДК 517.929
DOI 10.17377/semi.2018.15.106 MSC 34K06,34K20

О ЛОКАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭПИДЕМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

В.В. МАЛЫГИНА, М.В. МУЛЮКОВ, Н.В. ПЕРЦЕВ

Abstract. We consider a model of the epidemic process, and use a system of differential equations with retarded argument for the description of the model. We obtain a number of stability tests for the nontrivial equilibrium point and construct stability regions in the parameter space of the original problem.

Keywords: epidemic process, mathematical model, delay differential equation, stability, stability region.

1. Введение

Дифференциальные уравнения с запаздыванием широко используются в так называемых стадия-зависимых моделях популяционной динамики. Наличие нескольких стадий учитывает возрастной состав популяций, отдельные этапы развития индивидуумов и переходы индивидуумов между группами, отражающими структуру популяций. Стадия-зависимые модели в форме дифференциальных уравнений с запаздыванием отражены в многочисленных публикациях, посвященных изучению эпидемических процессов. Современный подход к разработке и исследованию указанных моделей представлен, например, в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Другие примеры можно найти в библиографических ссылках указанных публикаций.

Malygina, V.V., Mulyukov, M.V., Pertsev, N.V., On local asymptotic stability of a model of epidemic process.

Работа первых двух авторов выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ, проект № 1.5336.2017/8.9, и поддержана грантом РФФИ, проект № 18-01-928; работа третьего выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1., проект № 0314-2016-0009.

Поступила 23 августа 2018 г., опубликована 30 октября 2018 г.

Важной особенностью моделей эпидемических процессов является наличие запаздывающих переменных, отражающих предысторию развития или распространения инфекционного заболевания. Присутствие в модели двух, трех и более запаздываний в сочетании с нелинейностью уравнений приводит к значительным сложностям к исследованию проблемы существования положений равновесия с неотрицательными компонентами и их асимптотической устойчивости (не устойчивости). Так, в частности, в работе [9] предложена модель эпидемического процесса в форме системы трёх нелинейных автономных дифференциальных уравнений с двумя сосредоточенными запаздываниями. Предполагается, что все индивидуумы моделируемой популяции разделены на три непересекающиеся группы: восприимчивые индивидуумы S, заболевшие индивидуумы I и переболевшие индивидуумы R. Обозначим через x, y, v численность каждой из этих групп. Имеют место следующие предположения [9]:

- общая численность группы S, I, R увеличивается за счёт притока индивидуумов в группу S с постоянной скоростью $f > 0$;
- численность группы S уменьшается с интенсивностью $\alpha > 0$ за счет миграции и естественной смертности;
- скорость появления больных индивидуумов пропорциональна числу контактов между индивидуумами групп S и I и задается как βxy, где $\beta > 0$;
- каждый индивидуум, попавший в группу I, болеет в течение временного интервала длиной $\tau > 0$;
- численность группы I уменьшается с интенсивностью $\gamma > 0$ за счет миграции, естественной смертности и, возможно, гибели индивидуумов от болезни;
- выздоровевшие и не покинувшие группу I индивидуумы пополняют группу R;
- каждый индивидуум, попавший в группу R, приобретает иммунитет либо прекращает контакты с индивидуумами группы I в течение временного интервала длиной $\omega > 0$;
- численность группы R уменьшается с интенсивностью $\sigma > 0$ за счет миграции и естественной смертности;
- не покинувшие группу R индивидуумы пополняют группу S.

При этих условиях уравнения модели принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f - \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) + p_2\beta x(t-\tau-\omega)y(t-\tau-\omega), \\ \dot{y}(t) = \beta x(t)y(t) - \gamma y(t) - p_1\beta x(t-\tau)y(t-\tau), \\ \dot{v}(t) = p_1\beta x(t-\tau)y(t-\tau) - \sigma v(t) - p_2\beta x(t-\tau-\omega)y(t-\tau-\omega), \end{cases} \tag{1}$$

где $t \geq 0$, $p_1 = e^{-\gamma\tau}$, $p_2 = e^{-\gamma\tau-\sigma\omega}$. Следуя [9], полагаем, что решение системы (1) доопределено на отрезке $[-\tau-\omega, 0]$ непрерывной неотрицательной вектор-функцией, являющейся решением вспомогательной задачи Коши для системы дифференциальных уравнений специального вида. При этих условиях решение системы (1) в пространстве локально абсолютно непрерывных функций существует [10, с. 9-10], [11, с. 23] и неотрицательно [9].

Нетрудно заметить, что система (1) имеет два положения равновесия: тривиальное (x_1^*, y_1^*, v_1^*), где $x_1^* = f/\alpha > 0$, $y_1^* = 0$, $v_1^* = 0$ и нетривиальное (x_2^*, y_2^*, v_2^*)

с компонентами

$$x_2^* = \frac{\gamma}{\beta(1-p_1)} > 0, \quad y_2^* = \frac{\alpha\,(x_1^* - x_2^*)}{\beta\,(1-p_2)x_2^*}, \quad v_2^* = \frac{(p_1 - p_2)\beta\, x_2^*\, y_2^*}{\sigma}.$$

Установлено [9]: 1) если $x_1^* < x_2^*$, то система (1) не имеет других неотрицательных положений равновесия, кроме тривиального, а тривиальное положение равновесия асимптотически устойчиво; 2) если $x_1^* > x_2^*$, то тривиальное положение равновесия не устойчиво и все компоненты (x_2^*, y_2^*, v_2^*) положительны. Исследование устойчивости тривиального положения равновесия было сведено к анализу устойчивости уравнения

$$\dot u(t) + \tau(\gamma - \beta x_1^*)u(t) + \tau p_1 \beta x_1^* u(t-1) = 0,$$

что является следствием структуры уравнений исходной нелинейной модели. Приведенное выше утверждение вытекает из известного критерия устойчивости уравнения

$$\dot u(t) + au(t) + bu(t-1) = 0,$$

содержащего параметры a, b произвольного знака [12].

Целью настоящей статьи является получение условий асимптотической устойчивости (неустойчивости) положения равновесия (x_2^*, y_2^*, v_2^*).

2. Уравнения линейного приближения в окрестности нетривиального положения равновесия

Пусть (x_2^*, y_2^*, v_2^*) — нетривиальное положение равновесия системы (1) с положительными компонентами (случай $x_1^* > x_2^*$). Линеаризуем систему (1) вблизи положения равновесия (x_2^*, y_2^*, v_2^*):

$$(2) \quad \begin{cases} \dot x(t) + \alpha x(t) + \beta x_2^* y(t) + \beta y_2^* x(t) - p_2\beta x_2^* y(t-\tau-\omega) - \\ \qquad\qquad - p_2 \beta y_2^* x(t-\tau-\omega) = 0, \\ \dot y(t) + \gamma y(t) - \beta x_2^* y(t) - \beta y_2^* x(t) + p_1 \beta x_2^* y(t-\tau) + p_1 \beta y_2^* x(t-\tau) = 0, \\ \dot v(t) + \sigma v(t) - p_1 \beta x_2^* y(t-\tau) - p_1\beta y_2^* x(t-\tau) + p_2 \beta x_2^* y(t-\tau-\omega) + \\ \qquad\qquad + p_2 \beta y_2^* x(t-\tau-\omega) = 0. \end{cases}$$

Обозначим $w(t) = x_2^* y(t) + y_2^* x(t)$ и перепишем систему (2) в виде

$$\begin{cases} \dot x(t) + \alpha x(t) + \beta w(t) - p_2 \beta w(t-\tau-\omega) = 0, \\ \dot y(t) + \gamma y(t) - \beta w(t) + p_1 \beta w(t-\tau) = 0, \\ \dot v(t) + \sigma v(t) - p_1 \beta w(t-\tau) + p_2 \beta w(t-\tau-\omega) = 0. \end{cases}$$

Последнюю систему можно переписать в эквивалентной форме

$$\begin{cases} x(t) = x(0)e^{-\alpha t} + \beta e^{-\alpha t} \displaystyle\int_0^t e^{\alpha s}\bigl(p_2 w(s-\tau-\omega) - w(s)\bigr)ds, \\ y(t) = y(0)e^{-\gamma t} + \beta e^{-\gamma t} \displaystyle\int_0^t e^{\gamma s}\bigl(w(s) - p_1 w(s-\tau)\bigr)ds, \\ v(t) = v(0)e^{-\sigma t} + \beta e^{-\sigma t} \displaystyle\int_0^t e^{\sigma s}\bigl(p_1 w(s-\tau) - p_2 w(s-\tau-\omega)\bigr)ds. \end{cases}$$

Легко видеть, что система (2) экспоненциально устойчива в том и только том случае, если $\overline{\lim}_{t\to+\infty} \ln\bigl|w(t)\bigr|/t < 0$.

Пусть выполнено следующее

Предположение 1. *Интенсивности уменьшения групп S и I равны между собой: $\alpha = \gamma$.*

Сложим первые два уравнения системы (2), предварительно домножив первое из них на y_2^*, второе — на x_2^*. С учетом равенства $\alpha = \gamma$ получим уравнение

$$\dot{w}(t) + (\alpha + \beta y_2^* - \beta x_2^*)w(t) + p_1\beta x_2^* w(t-\tau) - p_2\beta y_2^* w(t-\tau-\omega) = 0. \tag{3}$$

Таким образом, в рамках предположения 1 вопрос об асимптотической устойчивости системы (2) свёлся к исследованию уравнения (3), что значительно упрощает задачу. С другой стороны, уравнение (3) является частным случаем уравнения

$$\dot{w}(t) + aw(t) + bw(t-1) + cw(t-h) = 0 \tag{4}$$

при $h = 1 + \omega/\tau$, $a = \tau\big(\alpha + \beta(y_2^* - x_2^*)\big)$, $b = \tau p_1\beta x_2^*$, $c = -\tau p_2\beta y_2^*$. Для коэффициентов разных знаков и произвольного $h \in (1,\infty)$ область устойчивости уравнения (4) в пространстве параметров (a,b,c,h) неизвестна (и, по-видимому, очень сложна). Поэтому следует использовать несколько подходов к решению поставленной задачи.

3. Достаточные условия асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия

Во всех последующих выкладках принято, что $\alpha = \gamma$ и $x_1^* > x_2^*$. Последнее неравенство равносильно неравенству $f\beta(1-p_1)/\alpha^2 > 1$.

3.1. Используем подход, основанный на теории монотонных операторов, теоремах сравнения и принципе аргумента (см., например, [13], [14], [15, с. 64], [16]).

Теорема 1. *Уравнение* (4) *асимптотически устойчиво, если $a > |b| + |c|$.*

Выполняя промежуточные выкладки, приходим к неравенству

$$\frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{f\beta(1-e^{-\alpha\tau})}{\alpha^2} > \frac{1+e^{-\alpha\tau}}{1-e^{-\alpha\tau}}, \tag{5}$$

обеспечивающему асимптотическую устойчивость уравнения (3). Отметим, что (5) не содержит параметр σ и запаздывание ω. Неравенство (5) говорит, в частности, о том, что x_2^* должно быть достаточно малым по сравнению с x_1^*.

3.2. Применим результаты исследования устойчивости стационарных систем с произвольным запаздыванием [15, с. 119]. Обозначим через $\mathbf{1}\{\Omega\}$ индикатор события Ω. Уравнение (4) представим в виде

$$\dot{w}(t) = \int_0^\infty w(t-s)\,dK(s), \tag{6}$$

где $K(s) = -a\cdot\mathbf{1}\{s>0\} - b\cdot\mathbf{1}\{s>1\} - c\cdot\mathbf{1}\{s>h\}$.

Известно [15, с. 130], что для асимптотической устойчивости уравнения (6) достаточно выполнения неравенств

$$\int_0^\infty dK(s) < 0, \quad \int_0^\infty s\,|dK(s)| < 1.$$

Отсюда вытекает следующий признак устойчивости.

Теорема 2. *Уравнение* (4) *асимптотически устойчиво, если $a+b+c > 0$ и $|b| + |c|h < 1$.*

После преобразований получаем, что из неравенства

$$p_1 \beta x_2^* \tau + p_2 \beta y_2^* (\tau + \omega) < 1 \tag{7}$$

вытекает асимптотическая устойчивость уравнения (3) .

Неравенство (7) запишем в эквивалентной форме:

$$\frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{f\beta(1 - e^{-\alpha\tau})}{\alpha^2} < 1 + \Big(1 - \frac{\alpha\tau}{e^{\alpha\tau} - 1}\Big) \frac{e^{\alpha\tau + \sigma\omega} - 1}{\alpha(\tau + \omega)}. \tag{8}$$

Видно, что (8) будет выполнено при некоторых α, τ, σ, ω, таких, что x_2^* незначительно отличается от x_1^*. Кроме того, нетрудно заметить, что для любых фиксированных f, β, α, τ найдутся σ и ω, при которых неравенство (8) будет выполнено. Отметим, что выполнение неравенства $x_1^* > x_2^*$ не зависит от значений параметров σ, ω. Следовательно, если в модели (1) существует нетривиальное положение равновесия с положительными компонентами, то в силу неравенства (8) оно окажется асимптотически устойчивым при достаточно больших σ или ω.

Вместе с тем, значения параметров σ, ω, значительно превышающие соответственно α и τ, не вполне согласуются с медико-биологической интерпретацией модели. Пусть, в частности, средняя продолжительность жизни индивидуумов $1/\alpha$ составляет 60 лет, а средняя продолжительность заболевания τ — 30 суток (0.082192 года). Тогда при $\sigma \approx \alpha$ функция

$$g(\omega) = \frac{e^{\alpha\tau + \sigma\omega} - 1}{\alpha(\tau + \omega)}$$

растет очень медленно при возрастании ω от 0 до 40–60 лет. В этом случае, множитель $g(\omega)$, входящий в правую часть неравенства (8), не оказывает заметного влияния, так как значения $g(\omega)$ несущественно превышают единицу.

Таким образом, актуальной является задача исследования устойчивости уравнения (3) при сопоставимых значениях τ и ω.

4. Критерий устойчивости линейного приближения при двукратном запаздывании

Получить точную область устойчивости уравнения (4) удается в случаях, когда запаздывание h – заданное число. В частности, это оказалось возможным, если выполнено

Предположение 2. *Периоды пребывания индивидуума в группах I и R равны между собой: $\tau = \omega$.*

Это означает, что в уравнении (4) $h = 2$, т.е. оно принимает вид

$$\dot{w}(t) + aw(t) + bw(t-1) + cw(t-2) = 0, \tag{9}$$

а его асимптотическая устойчивость, как известно, эквивалентна тому, что все корни *характеристической функции*

$$\Phi(z) = z + a + be^{-z} + ce^{-2z}$$

лежат слева от мнимой оси [17, с. 209].

Домножение на e^z не меняет нули характеристической функции, поэтому вместо Φ удобно рассмотреть функцию

$$F(z) = e^z \Phi(z) = \chi \operatorname{ch} z + \zeta \operatorname{sh} z + b + ze^z, \tag{10}$$

где $\chi = a + c$ и $\zeta = a - c$.

Вопрос об устойчивости уравнения (9) в терминах коэффициентов функции F подробно изучался в работах [18] и [19]. Оказалось, что структура области устойчивости достаточно сложна: её граница состоит из счётного множества криволинейных поверхностей. Тем не менее, область устойчивости удалось построить, используя тот факт, что границы ее сечения плоскостями $\zeta = const$ в координатах (χ, b) оказываются многозвенными ломаными.

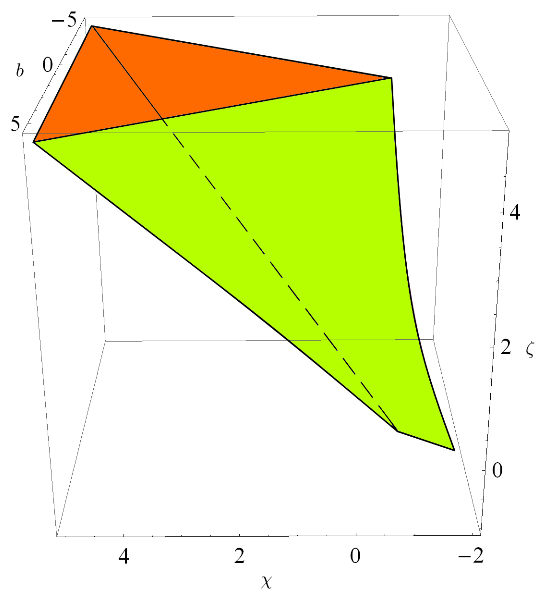

Рис. 1. Область устойчивости уравнения (9).

С точки зрения исследования устойчивости рассматриваемой модели, нас будет интересовать только часть этой области. Напомним, что коэффициент c имеет вид $c = -\tau\rho_2\beta y_2^*$, где y_2^* – положительная компонента точки равновесия, а параметры τ, ρ_2, β положительны по физическому смыслу задачи. Следовательно, $c < 0$, что, с учетом определения χ и ζ, эквивалентно неравенству $\chi < \zeta$. Это ограничение выделяет бесконечный, но сравнительно просто устроенный участок области устойчивости. А именно, из теоремы 1 работы [18] вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\chi < \zeta$. Для того чтобы все корни функции (10) лежали слева от мнимой оси, необходимо и достаточно выполнения неравенств:*

- $\zeta > -1$*;*
- $\chi + b > 0$*;*
- $b < \varphi \sin\varphi - \chi\cos\varphi$, *где φ — единственный корень уравнения $\zeta = -\varphi\operatorname{ctg}\varphi$ из интервала $(0, \pi)$.*

На рис. 1 приведена область устойчивости уравнения (9) в координатах (χ, b, ζ). Описать ее структуру проще всего по сечениям при $\zeta = const$. Каждому $\zeta > -1$ соответствует единственный корень уравнения $\zeta = -\varphi\operatorname{ctg}\varphi$ из интервала $(0,\pi)$. Обозначим этот корень φ_ζ. Согласно теореме 3, область устойчивости уравнения (9) является внутренностью треугольника ABC, стороны которого задаются прямыми $\chi=-b$, $\chi=\zeta$, $b=\varphi_\zeta\sin\varphi_\zeta-\chi\cos\varphi_\zeta$, а координаты вершин легко находятся: $A\left(\frac{\varphi_\zeta\sin\varphi_\zeta}{\cos\varphi_\zeta-1}, -\frac{\varphi_\zeta\sin\varphi_\zeta}{\cos\varphi_\zeta-1}\right)$; $B\left(\zeta,\varphi_\zeta\sin\varphi_\zeta-\zeta\cos\varphi_\zeta\right)$; $C(\zeta,-\zeta)$.

При $\zeta\in(-1,0)$ треугольник ABC тупоугольный, при $\zeta=0$ — прямоугольный, а при $\zeta>0$ — остроугольный. На рисунках 2–5 стороны этого треугольника отмечены синим цветом.

Дадим описание предельного поведения области устойчивости. Если $\zeta\to-1$, то $\varphi_\zeta\to0$, следовательно, вершина A стремится к точке $(-2,2)$, вершины B и C сближаются и стремятся к точке $(-1,1)$. Таким образом, треугольник вырождается в отрезок с концами в точках $(-1,1)$ и $(-2,2)$. Если же $\zeta\to\infty$, то $\varphi\to\pi$, треугольник устойчивости становится все ближе к равнобедренному треугольнику с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(\zeta,\zeta)$, $C(\zeta,-\zeta)$.

Сравним критерий устойчивости с достаточными признаками устойчивости. Неравенство теоремы 1 в терминах коэффициентов функции (10) при условии $\zeta>\chi$ принимает вид: $\zeta>0$ и $|b|<\chi$. Таким образом, этот признак описывает в сечении $\zeta=const>0$ внутренность треугольника, стороны которого на рисунках 4, 5 отмечены зелёным цветом, на рисунках 2, 3 этот треугольник отсутствует.

Неравенства теоремы 2 принимают вид $\chi+b>0$, $|b|-\chi<1-\zeta$, то есть этот признак описывает в сечении $\zeta=const$ внутренность треугольника, стороны которого на рисунках 2–5 отмечены красным цветом.

Сравнение показывает, что теоремы 1, 2 позволяют построить лишь часть области устойчивости, причём значительные её участки не «покрываются» ни одним из двух достаточных признаков.

На тех же рисунках легко проследить отличия достаточных признаков: при $\zeta\in(-1,0]$ теорема 2 работает, теорема 1 нет; при $\zeta\in(0,1)$ работают обе теоремы, но теорема 2 дает большую область устойчивости; при $\zeta=1$ области устойчивости совпадают; при $\zeta>1$ большую область устойчивости дает теорема 1, более того, с увеличением ζ эта область все меньше отличается от треугольника ABC.

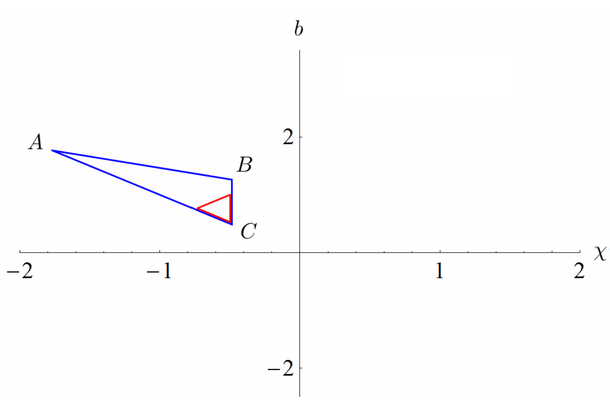

Рис. 2. Признаки устойчивости уравнения (9) в плоскости $\zeta=-0.5$.

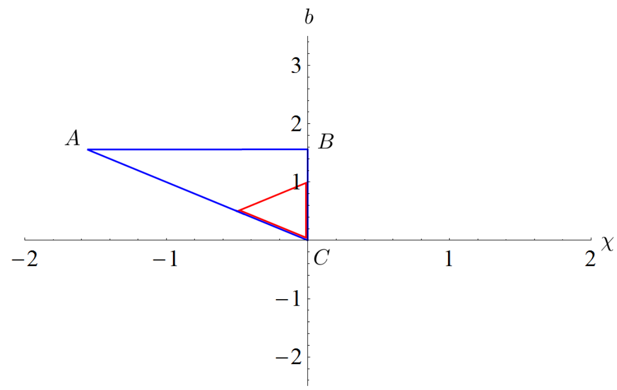

Рис. 3. Признаки устойчивости уравнения (9) в плоскости $\zeta = 0$.

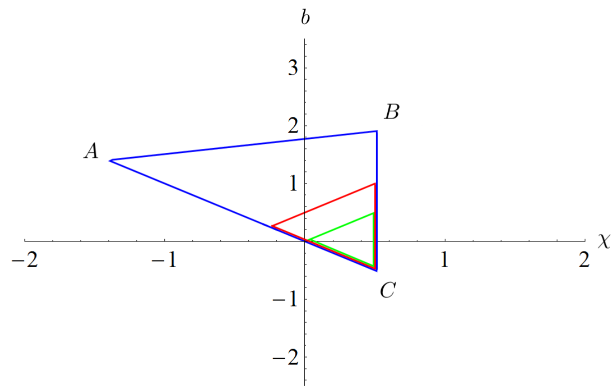

Рис. 4. Признаки устойчивости уравнения (9) в плоскости $\zeta = 0.5$.

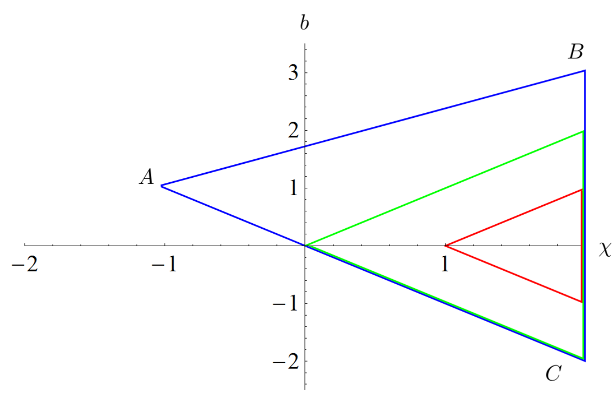

Рис. 5. Признаки устойчивости уравнения (9) в плоскости $\zeta = 2$.

Вернувшись к исходным обозначениям и учитывая, что неравенство $a+b+c = \gamma(1 + x_1^*/x_2^*) > 0$ выполняется тождественно, сформулируем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $x_1^* > x_2^*$, $\alpha = \gamma$, $\tau = \omega$. Для того чтобы система (2) была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно выполнения двух следующих неравенств:*

- $f > \frac{\gamma}{\beta(1+p_2)}\left(\frac{\gamma}{1-p_1} + \frac{2\gamma p_2}{1-p_2} - \frac{1}{\tau}\right)$;
- $\frac{\gamma p_1 \tau}{1-p_1} < \varphi \sin\varphi - \left(\frac{f\beta(1-p_2)}{\gamma} - \frac{\gamma}{1-p_1}\right)\tau\cos\varphi$, *где φ — единственный корень уравнения*
$$\frac{f\beta(1+p_2)}{\gamma} - \frac{\gamma}{1-p_1} - \frac{2\gamma p_2}{1-p_2} = \frac{\varphi \operatorname{ctg}\varphi}{\tau}$$
из интервала $(0, \pi)$.

5. Заключение

Приведенные в работе результаты демонстрируют возможности различных подходов к задаче об устойчивости нетривиального положения равновесия дифференциально-разностной системы, моделирующей эпидемический процесс. Показано, что некоторые дополнительные предположения о параметрах системы позволяют упростить ее и дать конструктивные условия асимптотической устойчивости решения.

Предположение 1 имеет место в случае, если инфекция не приводит к гибели индивидуумов (по крайней мере на стадии болезни), либо в случае, когда заболевание переведено в разряд нелетальных вследствие вакцинации или лечения. В этом случае линеаризованную исходную систему удается свести к одному уравнению (4), что существенно упрощает исследование. В разделе 3 приведены эффективные и легко проверяемые достаточные признаки устойчивости уравнения (4).

В разделе 4 на примере уравнения (4), в котором $h = 2$ (принято предположение 2 о равенстве периодов τ и ω), исследование доведено до построения точной области устойчивости. Используя методы, разработанные в [19], аналогичное построение можно осуществить для случаев $h \leqslant 5$.

Для больших h аналитическое описание точной области устойчивости вряд ли осуществимо из-за серьезных технических сложностей. Численно исследования можно проводить с привлечением специализированных пакетов программ, например, пакета DDE-BIFTOOL [20] для бифуркационного анализа или пакетов R, Matlab, содержащих программы решения задачи Коши для дифференциальных уравнений с запаздыванием.

References

[1] G. Huang, Y. Takeuchi, *Global analysis on delay epidemiological dynamic models with nonlinear incidence*, J. Math. Biol. **63**:1 (2011), 125–139. MR2806492

[2] Y. Muroya, T. Kuniya, J. Wang, *Stability analysis of a delayed multi-group SIS epidemic model with nonlinear incidence rates and patch structure*, J. Math. Anal. Appl. **425**:1 (2015), 415–439. MR3299671

[3] D. Okuonghae, *A note on some qualitative properties of a tuberculosis differential equation model with a time delay*, Differ. Equ. Dyn. Syst. **23**:2 (2015), 181–194. MR3323694

[4] M. A. Skvortsova, *Asymptotic properties of solutions to a system describing the spread of avian influenza*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 782–798. MR3553170

[5] L. M. Taylor, T. W. Carr, *An SIR epidemic model with partial temporary immunity modeled with delay*, J. Math. Biol. **59**:6 (2009), 841–880. MR2538471

[6] L. Wang, R. Xu, G. Feng, *Modelling and analysis of an eco-epidemiological model with time delay and stage structure*, J. Appl. Math. Comput. **50**:1–2 (2016), 175–197. MR3440313
[7] Y. Xiao, L. Chen, *An SIS epidemic model with stage structure and a delay*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, **18**:4 (2002), 607–618. MR2012324
[8] Y. Yuan, J. Belair, *Threshold dynamics in an SEIRS model with latency and temporary immunity*, J. Math. Biol. **69**:4 (2014), 875–904. MR3259507
[9] N. V. Pertsev, B. Yu. Pichugin, A. N. Pichugina, *Investigation of an asymptotic behavior of solutions of some epidemic processes models*, Mathematical Biology and Bioinformatics, **8**:1 (2013), 21–48.
[10] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations*, Moscow: Nauka, 1991. (Translated in English: N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations*, World Federation Publishers Company, Atlanta, 1995.) MR1144998
[11] N. V. Azbelev, P. M. Simonov, *Stability of Equations with Ordinary Derivations*, Perm: Perm State University, 2001. (Translated in English: N. V. Azbelev, P. M. Simonov, *Stability of Differential Equations with Aftereffect*, Taylor&Francis, London, 2002.)
[12] A. A. Andronov, A. G. Mayer, The simplest linear systems with delay // Automation and Remote Control, **7**:2–3 (1946), 95–106. MR0020199
[13] A. Yu. Obolenskiy, *On stability of solutions of Vazewski autonomous systems with delay*, Ukrainian Mathematical Journal, **35** (1983), 574–579. MR0723116
[14] R. Volz, *Stability Conditions for Systems of Linear Nonautonomous Delay Differential Equations*, J. Math. Anal. Appl., **120**:2 (1986), 584–595. MR0864776
[15] V. B. Kolmanovskiy, V. R. Nosov, *Stability and periodic modes of a controlled systems with aftereffect*, Moscow: Nauka, 1981. MR0641554
[16] T. L. Sabatulina, V. V. Malygina, *On stability of a differential equation with bounded aftereffect*, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, **4** (2014), 25–41. MR3275907
[17] R. Bellman, K. L. Cooke, *Differential-Difference Equations*, Moscow: Mir, 1967. MR0221045
[18] M. V. Mulyukov, *Stability of a linear differential equation with double delay*, Proceedings of VIII International Conference "Modern Problems of Applied Mathematics, Control Theory and Computer Science (AMCTCS-2018)", Voronezh, Russia, 2015, 258–260.
[19] M. V. Mulyukov, *The structure of D-decomposition regions for two-parameter characteristic equations of systems with delay*, Functional Differential Equations: Theory and Applications, Perm National Research Polytechnic University, Perm, 2018, 180–200.
[20] T. Luzyanina, J. Sieber, K. Engelborghs, G. Samaey, D. Roose, *Numerical bifurcation analysis of mathematical models with time delays with the package DDE-BIFTOOL*, Mathematical Biology and Bioinformatics, **12**:2 (2017), 496–520.

Malygina Vera Vladimirovna
Perm National Research Polytechnic University,
Komsomolskiy pr., 29,
614990, Perm, Russia
E-mail address: mavera@list.ru

Mulyukov Mikhail Vadimovich
Perm National Research Polytechnic University,
Komsomolskiy pr., 29,
614990, Perm, Russia
E-mail address: Mulykoff@gmail.com

Pertsev Nikolai Victorovich
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk Division,
Pevtsova street 13,
644033,Omsk, Russia
E-mail address: homlab@ya.com