S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1320–1331 (2018) УДК 519.21
DOI 10.17377/semi.2018.15.108 MSC 60G50

О СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДАНИИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В.И. ЛОТОВ

Abstract. We find the Laplace-Stieltjes transform of the stationary distribution of a random walk in which the distribution of jumps changes when the strip boundaries are alternately reached. We use known results for regenerative processes and factorization technique for the study in boundary crossing problems for random walks.

Keywords: oscillating random walk, regenerative process, stationary distribution, factorization method.

1. Введение. Предварительные сведения

Пусть имеются две независимые последовательности $\{X_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$, $j=1,2$, случайных величин, являющихся независимыми и одинаково распределенными при фиксированном j, и пусть $S_0^{(1)}=S_0^{(2)}=0$,

$$S_n^{(j)}=X_1^{(j)}+\ldots+X_n^{(j)}, \quad \mathbf{E}X_i^{(1)}>0, \quad \mathbf{E}X_i^{(2)}<0.$$

Для произвольного числа $b>0$ введем

$$N_1=\min\{n\ge 1:\, S_n^{(1)}\ge b\}, \qquad N_2=\min\{n\ge 1:\, S_n^{(2)}\le -b\}.$$

На промежутке времени $0\le n\le T_1:=N_1+N_2$ случайное блуждание $\{Y_n\}$ определяется следующим образом:

$$Y_n=\begin{cases}\min\{S_n^{(1)},b\} & 0\le n\le N_1,\\ \max\{b+S_{n-N_1}^{(2)},0\} & N_1<n\le N_1+N_2.\end{cases}$$

При $n>T_1$ трактория эволюционирует по той же схеме. Сначала в качестве ее скачков берутся независимые копии элементов последовательности $\{X_i^{(1)}\}$ до тех пор, пока не будет достигнут уровень b в некоторый момент времени

Lotov, V.I., On a random walk with switchings.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00049).

Поступила 21 сентября 2018 г., опубликована 31 октября 2018 г.

$T_1 + N_3$. Полагаем $Y_{T_1+N_3} = b$, и далее в качестве скачков траектории выбираются независимые копии элементов последовательности $\{X_i^{(2)}\}$ до первого прохождения нуля в некоторый момент времени $T_1 + N_3 + N_4 = T_1 + T_2$. Полагаем опять $Y_{T_1+T_2} = 0$, и по той же схеме задаем эволюцию траектории на последующих промежутках времени длиной $T_3, T_4, \dots$.

Целью данной работы является нахождение стационарного распределения случайного процесса $\{Y_n\}$:

$$Q(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Y_n \in A).$$

Из определения ясно, что $\{Y_n,\, n \geq 0\}$ является регенерирующим процессом с дискретным временем. Точки $T_1,\ T_1 + T_2,\ \dots$ (последовательные моменты достижения нулевого уровня последовательностью Y_n) являются моментами регенерации, случайные величины T_i, $i \geq 1$, независимы и одинаково распределены, $\mathbf{E}T_1 = \mathbf{E}N_1 + \mathbf{E}N_2 < \infty$. Вероятностные характеристики траектории случайного блуждания $\{Y_n\}$ между моментами регенерации являются одинаковыми.

Процессы подобного вида находят применение в стохастических моделях управления запасами, в моделях систем обслуживания, актуарной математики. Как и всякие задачи, связанные с достижением границ траекториями случайных процессов, их исследование сопряжено с применением весьма сложных аналитических методов. В то же время в ряде случаев стационарное распределение процесса может быть найдено сравнительно легко, если использовать известные результаты для регенерирующих процессов и технику факторизационных исследований. Этому подходу и посвящена настоящая работа.

Случайные блуждания, у которых распределение скачка в момент времени n определяется знаком Y_n, изучались ранее в [1]–[3] и получили название осциллирующих. Ясно, что такие блуждания образуют цепь Маркова; в указанных работах изучались, главным образом, свойства возвратности и эргодичности этих цепей. В [4] изучались аналоги таких схем осциллирующих блужданий для непрерывного времени, когда переключение происходит с одного процесса с независимыми приращениями на другой.

Случайное блуждание с переключениями при поочередном достижении границ полосы является более сложной конструкцией. Здесь возникают разные постановки задач в зависимости от механизма переключения на регулировочных уровнях. По-видимому, впервые подобная модель рассмотрена в [5]. Измененный вариант этой схемы, когда при достижении $[b, \infty)$ ордината блуждающей частицы уменьшается на величину b, изучался в [6]–[8] для некоторых специальных типов блуждания с дискретным и непрерывным временем. В [9] изучались достационарное и стационарное распределения для осциллирующего случайного блуждания с двумя уровнями переключений, однако механизм переключений там отличен от рассматриваемого в настоящей работе. Кроме того, сходимость к стационарному распределению в [9] выводилась из соответствующего результата для цепей Маркова, который требовал наличия абсолютно непрерывной компоненты у распределений скачков блуждания. В то же время в дискуссиях специалистов оставался открытым вопрос о сходимости к стационарному распределению для рассматриваемого в [9] осциллирующего случайного блуждания без требования о наличии абсолютно непрерывной компоненты. В настоящей работе меняется по сравнению с [9] механизм переключения. Это дает возможность использовать результат теории регенерирующих процессов, где сходимость к стационарному распределению уже не требует наличия абсолютно непрерывной компоненты.

Известно (см., например, [10, гл. 21, теорема 5.1]), что если промежутки времени T_i между моментами регенерации имеют конечное среднее, то стационарное распределение для регенерирующего процесса Y_n существует и для любого борелевского множества A равно

$$Q(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Y_n \in A) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \mu_A(n),$$

где $a = \mathbf{E}T_1,\ \ \mu_A(n) = \mathbf{P}(Y_n \in A,\ 0 \le n < T_1)$. Наша задача состоит в нахождении преобразования Лапласа — Стилтьеса правой части этого соотношения. Возможности дальнейшего обращения найденного преобразования в данной работе не рассматриваются, за исключением одного частного случая, связанного с экспоненциальным убыванием хвостов распределения скачков.

Пусть $\varphi_j(\lambda) = \mathbf{E}\, e^{\lambda X_1^{(j)}}$ — преобразование Лапласа — Стилтьеса распределения случайной величины $X_1^{(j)}$, $j = 1, 2$, здесь $\mathrm{Re}\lambda = 0$. В дальнейшем нам потребуется факторизация функций $1 - z\varphi_j(\lambda)$. Хорошо известно следующее представление (называемое часто факторизацией Винера-Хопфа):

$$1 - z\varphi_j(\lambda) = R_+^{(j)}(z,\lambda)R_-^{(j)}(z,\lambda), \qquad |z| < 1, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda = 0, \tag{1}$$

(см., например, [10, гл.12]), в котором

$$R_-^{(j)}(z,\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_n^{(j)}\}; S_n^{(j)} \le 0 \right)\right\},$$

$$R_+^{(j)}(z,\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_n^{(j)}\}; S_n^{(j)} > 0 \right)\right\}.$$

Известны и другие представления для введенных компонент факторизации. Пусть

$$\eta_-^{(j)} = \inf\{n \ge 1 :\ S_n^{(j)} \le 0\}, \quad \eta_+^{(j)} = \inf\{n \ge 1 :\ S_n^{(j)} > 0\}, \quad \chi_\pm^{(j)} = S^{(j)}_{\eta_\pm^{(j)}},$$

тогда

$$R_\pm^{(j)}(z,\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(z^{\eta_\pm^{(j)}} \exp\{\lambda\chi_\pm^{(j)}\}; \eta_\pm^{(j)} < \infty\right), \qquad |z| < 1. \tag{2}$$

Заметим, что в последнем соотношении можно полагать $|z| \le 1$, то есть, к примеру,

$$R_+^{(j)}(1,\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_+^{(j)}\}; \eta_+^{(j)} < \infty\right)$$
$$= \lim_{z\to 1} \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_n^{(j)}\}; S_n^{(j)} > 0 \right)\right\}.$$

Другие выражения для компонент факторизации можно найти в [10]–[12]. Переменная λ везде рассматривается как основная, z можно воспринимать как параметр. Аналитическая структура компонент факторизации в условиях Крамéра подробно исследована в [13].

Функция $R_-^{(j)}(z,\lambda)$ условно называется отрицательной компонентой факторизации, $R_+^{(j)}(z,\lambda)$ — положительной. Отметим важные для дальнейшего свойства компонент факторизации.

При $|z|<1$ положительная компонента $R_+^{(j)}(z,\lambda)$ является аналитической функцией переменной λ в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<0$, непрерывной на границе, она ограничена и не обращается в нуль при $\operatorname{Re}\lambda\le 0$. Если $z=1$, то, очевидно, $R_+^{(j)}(1,\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda=0$ в тех случаях, когда $\mathbf{P}(\eta_+^{(j)}<\infty)=1$. Аналогичными свойствами в правой полуплоскости обладает отрицательная компонента $R_-^{(j)}(z,\lambda)$. Далее, пусть $S(A)$ обозначает множество функций g, имеющих вид

$$g(\lambda)=\int\limits_A e^{\lambda y}dG(y), \qquad \text{где} \quad \int\limits_A |dG(y)|<\infty$$

и $A\subset\mathbb{R}$ — произвольное борелевское множество. Нетрудно видеть, что функции $R_+^{(j)}(z,\lambda)$ и $(R_+^{(j)})^{-1}(z,\lambda)$, как функции переменной λ, принадлежат $S([0,\infty))$, функции $R_-^{(j)}(z,\lambda)$, $(R_-^{(j)})^{-1}(z,\lambda)$ принадлежат $S((-\infty,0])$.

2. Преобразование Лапласа — Стилтьеса стационарного распределения

Для всякой функции $g\in S(\mathbb{R})$ и произвольного борелевского множества $A\subset\mathbb{R}$ положим по определению

$$[g(\lambda)]^A=\int\limits_A e^{\lambda y}dG(y).$$

Введем меру $\mu(A)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mu_A(n)$, и найдем преобразование Лапласа — Стилтьеса для этой меры.

Лемма 1. *Для $|z|<1$ и $\operatorname{Re}\lambda=0$ справедливо представление*

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda y}\mu_{dy}(n)=\frac{[(R_+^{(1)})^{-1}(z,\lambda)]^{[0,b)}}{R_-^{(1)}(z,\lambda)}+e^{\lambda b}\mathbf{E}z^{N_1}\frac{[(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{(-b,0]}}{R_+^{(2)}(z,\lambda)}. \tag{3}$$

Доказательство. Для $|z|<1$ и $\operatorname{Re}\lambda=0$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda y}\mu_{dy}(n)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda y}\mathbf{P}(Y_n\in dy,0\le n<T_1)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\mathbf{E}(e^{\lambda Y_n};\,0\le n<N_1)+\sum_{n=1}^{\infty}z^n\mathbf{E}(e^{\lambda Y_n};\,N_1\le n<N_1+N_2).$$

Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty}z^n\mathbf{E}(e^{\lambda Y_n};\,N_1\le n<N_1+N_2)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}(e^{\lambda Y_n};\,k\le n<k+N_2,\ N_1=k)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}(e^{\lambda(S_{n-k}^{(2)}+b)};\,0\le n-k<N_2)\,\mathbf{P}(N_1=k)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E}(e^{\lambda(S_n^{(2)}+b)}; 0 \le n < N_2) \sum_{k=1}^{\infty} z^k \mathbf{P}(N_1 = k).$$

Таким образом, для $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} \mu_{dy}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E}(e^{\lambda S_n^{(1)}}; 0 \le n < N_1) \tag{4}$$

$$+\mathbf{E} z^{N_1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E}(e^{\lambda(S_n^{(2)}+b)}; 0 \le n < N_2).$$

Хорошо известны тождества [15, гл. 18]

$$(1 - z\varphi_1(\lambda)) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E}(e^{\lambda S_n^{(1)}}; 0 \le n < N_1) = 1 - \mathbf{E}\big(z^{N_1} \exp\{\lambda S_{N_1}^{(1)}\}\big),$$

$$(1 - z\varphi_2(\lambda)) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E}(e^{\lambda S_n^{(2)}}; 0 \le n < N_2) = 1 - \mathbf{E}\big(z^{N_2} \exp\{\lambda S_{N_2}^{(1)}\}\big).$$

В то же время для $|z| < 1$ и $\operatorname{Re}\lambda = 0$ имеют место представления (см., например, [14])

$$\mathbf{E}\big(z^{N_1} \exp\{\lambda S_{N_1}^{(1)}\}\big) = R_+^{(1)}(z,\lambda)[(R_+^{(j)})^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)}, \tag{5}$$

$$\mathbf{E}\big(z^{N_2} \exp\{\lambda S_{N_2}^{(2)}\}\big) = R_-^{(2)}(z,\lambda)[(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{(-\infty,-b]}. \tag{6}$$

Применяя (5) и (6), получаем из (4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} \mu_{dy}(n) = \frac{1 - R_+^{(1)}(z,\lambda)[(R_+^{(1)})^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)}}{1 - z\varphi_1(\lambda)} \tag{7}$$

$$+e^{\lambda b} \mathbf{E} z^{N_1} \frac{1 - R_-^{(2)}(z,\lambda)[(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{(-\infty,-b]}}{1 - z\varphi_2(\lambda)}.$$

Воспользовавшись в (7) соотношениями (1) и

$$[(R_+^{(1)})^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)} = (R_+^{(1)})^{-1}(z,\lambda) - [(R_+^{(1)})^{-1}(z,\lambda)]^{[0,b)},$$

$$[(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{(-\infty,-b]} = (R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda) - [(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{(-b,0]},$$

приходим к (3). Лемма доказана.

Учитывая, что $\lim_{z\to1} \mathbf{E} z^{N_1} = 1$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} Q(dy) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} \mu(dy) = \frac{1}{a} \lim_{z\to1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} \mu_{dy}(n)$$

$$= \frac{1}{a} \lim_{z\to1} \left\{ \frac{[(R_+^{(1)})^{-1}(z,\lambda)]^{[0,b)}}{R_-^{(1)}(z,\lambda)} + e^{\lambda b} \frac{[(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{(-b,0]}}{R_+^{(2)}(z,\lambda)} \right\}.$$

Обозначим

$$S_1 := \inf_{k\ge0} S_k^{(1)}, \quad p_1 := \mathbf{P}\,(S_1 < 0) < 1,$$

$$S_2 := \sup_{k\ge0} S_k^{(2)}, \quad p_2 := \mathbf{P}\,(S_2 > 0) < 1.$$

Известно [10, гл. 12, §1], что

$$(R_+^{(2)})^{-1}(1,\lambda) = \frac{\mathbf{E}\, e^{\lambda S_2}}{1-p_2}, \qquad (R_-^{(1)})^{-1}(1,\lambda) = \frac{\mathbf{E}\, e^{\lambda S_1}}{1-p_1}.$$

Тем самым приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для преобразования Лапласа — Стилтьеса стационарного распределения процесса Y_n справедливо следующее представление:*

(8)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} Q(dy) = \frac{\mathbf{E}\, e^{\lambda S_1} \lim\limits_{z\to 1}[(R_+^{(1)})^{-1}(z,\lambda)]^{[0,b)}}{a(1-p_1)} + e^{\lambda b}\frac{\mathbf{E}\, e^{\lambda S_2} \lim\limits_{z\to 1}[(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{(-b,0]}}{a(1-p_2)},$$

в котором $|z|<1$ *и* $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

Итак, стационарное распределение процесса Y_n складывается из свертки распределения S_1 с функцией G_1, преобразование Лапласа — Стилтьеса которой равно

$$\int\limits_0^b e^{\lambda y} dG_1(y) = \frac{\lim\limits_{z\to 1}[(R_+^{(1)})^{-1}(z,\lambda)]^{[0,b)}}{a(1-p_1)},$$

и свертки распределения S_2 с функцией G_2, преобразование Лапласа — Стилтьеса которой равно

$$\int\limits_0^b e^{\lambda y} dG_2(y) = \frac{e^{\lambda b}\lim\limits_{z\to 1}[(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{(-b,0]}}{a(1-p_2)}.$$

Асимптотическое поведение функций $\mathbf{P}(S_1 \le -x)$ и $\mathbf{P}(S_2 \ge x)$ при $x\to\infty$ достаточно хорошо исследовано, однако для случайных блужданий общего вида явные выражения функций распределения супремума и инфимума траектории неизвестны. В [10] указан класс случайных блужданий, для которых $\mathbf{P}(S_2 \ge x)$ находится в явном виде. Здесь требуется, чтобы функция $\mathbf{E}\big(\exp\{\lambda X_1^{(2)}\};\, X_1^{(2)} > 0\big)$ была рациональной. В этом случае $(R_+^{(2)})^{\pm 1}(z,\lambda)$ также будут рациональными функциями, и отсюда выводится, что $\mathbf{P}(S_2 \ge x)$ имеет вид так называемого экспоненциального полинома.

Функция G_2 также может быть найдена в явном виде, если $(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)$ является рациональной функцией. Для этого, в свою очередь, достаточно потребовать, чтобы рациональной была функция $\mathbf{E}\big(\exp\{\lambda X_1^{(2)}\};\, X_1^{(2)} < 0\big)$, или, другими словами, чтобы распределение скачков блуждания имело на отрицательной полуоси плотность в виде экспоненциального полинома вида

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{l_k} a_{kj} x^{j-1} e^{\beta_k x}, \qquad \operatorname{Re}\beta_k > 0, \qquad x<0.$$

Приведем кратко метод построения факторизационных компонент при этом условии, более подробно см. [12]. Итак, пусть

$$\mathbf{E}\big(e^{\lambda X_1^{(2)}};\, X_1^{(2)} < 0\big) = \frac{R(\lambda)}{P(\lambda)},$$

где $R(\lambda)$ и $P(\lambda)$ — полиномы. Предположим, что степень $P(\lambda)$ равна k. Все нули полинома $P(\lambda)$ с необходимостью лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Применяя принцип аргумента аналитической функции, можно показать, что в левой полуплоскости находится также ровно k нулей функции $1 - z\varphi_2(\lambda)$ с учетом их возможной кратности. Обозначим их $\lambda_1(z),\ \ldots,\ \lambda_k(z)$. Тогда для компонент введенной выше факторизации (1) имеют место представления

$$R_-^{(2)}(z,\lambda) = \frac{\Lambda(z,\lambda)}{P(\lambda)}, \qquad R_+^{(2)}(z,\lambda) = \frac{(1 - z\varphi_2(\lambda))P(\lambda)}{\Lambda(z,\lambda)}, \quad \Lambda(z,\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j(z)).$$

Далее функцию $(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)$ нужно предварительно разложить на простые дроби

$$(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\Lambda(z,\lambda)} = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i(z)}{\lambda - \lambda_i(z)}$$

при некотором наборе коэффициентов $c_i(z)$ (здесь мы предположили, что корни $\lambda_i(z)$ простые), после чего величина $[(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{[0,b)}$, а вместе с ней и функция G_2 вычисляются без труда.

Итак, для нахождения распределения случайной величины S_2 и функции G_2 достаточно потребовать, чтобы функция $\varphi_2(\lambda)$ была рациональной. Точно так же нахождение в явном виде распределения случайной величины S_1 и функции G_1 возможно при условии, что функция $\varphi_1(\lambda)$ рациональна.

В заключение отметим, что класс распределений случайных величин X, у которых $\mathbf{E}(e^{\lambda X};\ X < 0)$ или $\mathbf{E}(e^{\lambda X};\ X > 0)$ является рациональной функцией, достаточно широк, он является всюду плотным в смысле слабой сходимости на множестве всех распределений ([16, гл.4]).

Рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда функции G_1 и G_2 легко вычисляются в явном виде. Для этой цели предположим, что

$$\mathbf{P}(X_1^{(1)} \geq t) = q\exp\{-\alpha t\}, \quad t \geq 0, \quad \alpha > 0,$$

$$\mathbf{P}(X_1^{(2)} < t) = r\exp\{\beta t\}, \quad t \leq 0, \quad \beta > 0, \quad r + q = 1.$$

Пусть для определенности $0 < z < 1$. Обозначим $\lambda_1(z)$ единственное положительное решение уравнения $1 - z\varphi_1(\lambda) = 0$, а $\lambda_2(z)$ — единственное отрицательное решение уравнения $1 - z\varphi_2(\lambda) = 0$. Здесь, очевидно, $\lambda_1(1) = \lambda_2(1) = 0$. Тогда

$$R_+^{(1)}(z,\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_1(z)}{\lambda - \alpha}, \qquad R_-^{(2)}(z,\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_2(z)}{\lambda + \beta}.$$

Имеем

$$\left[\left(R_+^{(1)}\right)^{-1}(z,\lambda)\right]^{[0,b)} = \left[\frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \lambda_1(z)}\right]^{[0,b)} = \left[\frac{\lambda - \lambda_1(z)}{\lambda - \lambda_1(z)}\right]^{[0,b)} + \left[\frac{\lambda_1(z) - \alpha}{\lambda - \lambda_1(z)}\right]^{[0,b)}$$

$$= 1 - (\lambda_1(z) - \alpha)\int_0^b e^{(\lambda - \lambda_1(z))y}dy = 1 - \frac{\lambda_1(z) - \alpha}{\lambda - \lambda_1(z)}\left(e^{(\lambda - \lambda_1(z))b} - 1\right)$$

$$= \frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \lambda_1(z)} - \frac{\lambda_1(z) - \alpha}{\lambda - \lambda_1(z)} e^{(\lambda - \lambda_1(z))b},$$

$$\lim_{z \to 1}\left[\left(R_+^{(1)}\right)^{-1}(z,\lambda)\right]^{[0,b)} = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda}e^{\lambda b} = 1 + \alpha\int_0^b e^{\lambda y}dy.$$

Тем самым получено преобразование Лапласа — Стилтьеса меры с носителем $[0, b)$. Она имеет единичный атом в нуле и плотность на $(0, b)$, равную константе α.

Аналогично

$$\left[\left(R_+^{(2)}\right)^{-1}(z,\lambda)\right]^{(-b,0]} = \left[\frac{\lambda+\beta}{\lambda-\lambda_2(z)}\right]^{(-b,0]} = \left[\frac{\lambda-\lambda_2(z)}{\lambda-\lambda_2(z)}\right]^{(-b,0]} + \left[\frac{\lambda_2(z)+\beta}{\lambda-\lambda_2(z)}\right]^{(-b,0]}$$

$$= 1 + (\lambda_2(z)+\beta)\int\limits_{(-b,0]} e^{(\lambda-\lambda_2(z))y}dy = 1 + \frac{\lambda_2(z)+\beta}{\lambda-\lambda_2(z)}\left(1-e^{(\lambda_2(z)-\lambda)b}\right)$$

$$= \frac{\lambda+\beta}{\lambda-\lambda_2(z)} - \frac{\lambda_2(z)+\beta}{\lambda-\lambda_2(z)}e^{(\lambda_2(z)-\lambda)b},$$

$$e^{\lambda b}\lim_{z\to 1}\left[\left(R_+^{(2)}\right)^{-1}(z,\lambda)\right]^{(-b,0]} = e^{\lambda b}\frac{\lambda+\beta}{\lambda} - \frac{\beta}{\lambda} = e^{\lambda b} + \beta\int\limits_0^b e^{\lambda y}dy.$$

Здесь также мы получили преобразование Лапласа — Стилтьеса меры, имеющей равную числу β плотность на $(0, b)$ и единичный атом в точке b.

Обозначим $a_j = \mathbf{E}X_1^{(j)}$, $j = 1, 2$. Для нахождения величины $a = \mathbf{E}N_1 + \mathbf{E}N_2$ в данном примере воспользуемся тождеством Вальда, в соответствии с которым $\mathbf{E}S_{N_j}^{(j)} = a_j\mathbf{E}N_j$. Величина перескока $S_{N_1}^{(1)} - b$ имеет показательное распределение с параметром α, поэтому $\mathbf{E}S_{N_1}^{(1)} = b + 1/\alpha$. Аналогично $\mathbf{E}S_{N_2}^{(2)} = -b - 1/\beta$. Таким образом,

$$a = \frac{b+1/\alpha}{a_1} + \frac{b+1/\beta}{|a_2|}.$$

Далее, известно [10, гл. 12, теорема 8.1] что

$$1 - p_1 = \frac{1}{\mathbf{E}\eta_1}, \quad 1 - p_2 = \frac{1}{\mathbf{E}\eta_2},$$

где $\eta_1 = \inf\{n \geq 1 : S_n^{(1)} \geq 0\}$, $\eta_2 = \inf\{n \geq 1 : S_n^{(2)} \leq 0\}$. В свою очередь, в силу тождества Вальда

$$\frac{1}{\mathbf{E}\eta_1} = \frac{a_1}{\mathbf{E}S_{\eta_1}^{(1)}} = \alpha a_1, \quad \frac{1}{\mathbf{E}\eta_2} = \frac{a_2}{\mathbf{E}S_{\eta_1}^{(2)}} = \beta|a_2|,$$

то есть

$$a(1-p_1) = \alpha a_1\left(\frac{b+1/\alpha}{a_1} + \frac{b+1/\beta}{|a_2|}\right) = \alpha b + 1 + \alpha a_1\frac{b+1/\beta}{|a_2|},$$

$$a(1-p_2) = \beta|a_2|\frac{b+1/\alpha}{a_1} + \beta b + 1.$$

В случае блужданий общего вида асимптотические представления для $\mathbf{E}N_j$ при $b \to \infty$ содержатся в теории восстановления. Если же известны явные выражения для компонент факторизации, то можно предложить следующий алгоритм нахождения $\mathbf{E}N_j$ в точном виде. Сначала нужно перейти к пределу при $z \to 1$ в формулах (5) и (6), что приведет к точным выражениям для $\mathbf{E}\exp\{\lambda S_{N_j}^{(j)}\}$, откуда находятся $\mathbf{E}S_{N_j}^{(j)}$, и затем применяется тождество Вальда для нахождения $\mathbf{E}N_j$.

3. Асимптотическое представление для стационарного распределения

Коль скоро точные решения в тех или иных граничных задачах в общем случае найти не удается, приходится довольствоваться различными приближениями. Чаще всего аппроксимационные формулы являются результатом асимптотического анализа в тех ситуациях, где он возможен. Здесь прослеживаются две тенденции. Во-первых, при одних и тех же границах можно рассмотреть схему серий случайных блужданий, в которой размеры скачков уменьшаются. Другая возможность — при фиксированном случайном блуждании изучать асимптотику распределений граничных функционалов в условиях удаляющейся границы, то есть здесь присутствует на самом деле последовательность граничных задач, соответствующих разным положениям границы. При решении граничных задач весьма затрудняющим фактором является наличие эффекта перескока через границу. Задачи, где перескока нет, решаются достаточно просто. В обоих перечисленных вариантах асимптотического анализа влияние перескока в известном смысле уменьшается.

Второй вариант асимптотических исследований, связанный с удаляющимися границами, более популярен, и мы тоже будем ему следовать. Приведем асимптотическое представление правой части формулы (7) при $b \to \infty$. Оно сразу же следует из результатов работы [17], которые мы сформулируем в виде двух лемм.

Итак, будем предполагать сначала, что выполнены следующие условия.

(C) Распределение $X_1^{(1)}$ содержит абсолютно непрерывную (относительно меры Лебега) компоненту.

(C_+) $\mathbf{E}X_1^{(1)} > 0$, $\mathbf{E}e^{\lambda X_1^{(1)}} < \infty$ при $0 \le \lambda \le \gamma$, $\gamma > 0$.

Для z, близких к единице, $z \le 1$, условие (C_+) обеспечивает наличие неотрицательного решения $\lambda_1(z)$ уравнения $1 - z\varphi_1(\lambda) = 0$, $\lambda_1(1) = 0$. Здесь с необходимостью $R_+^{(1)}(z, \lambda_1(z)) = 0$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (C) и (C_+). Тогда при некоторых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $z \in (1-\delta, 1)$, $\mathrm{Re}\lambda < 0$ имеет место представление*

$$[(R_+^{(1)})^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)} = v_z(\lambda)e^{(\lambda-\lambda_1(z))b} + \int\limits_b^\infty e^{\lambda y} dH_z^{(1)}(y), \tag{9}$$

где при любом $x \ge 0$ равномерно по z

$$\int\limits_{b+x}^\infty |dH_z^{(1)}(y)| = O\big(e^{-\varepsilon(b+x)}\big), \qquad b \to \infty,$$

$$v_z(\lambda) = \frac{1}{(\lambda - \lambda_1(z))(R_+^{(1)})'(z,\lambda_1(z))}, \qquad (R_+^{(1)})'(z,\lambda_1(z)) = \frac{\partial R_+^{(1)}(z,\lambda)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_1(z)}.$$

Заметим, что при выполнении условия

$$\mathbf{P}(X_1^{(1)} \ge t) = q\exp\{-\alpha t\}, \quad t \ge 0, \quad \alpha > 0,$$

последнее слагаемое в правой части формулы (9) отсутствует, и имеет место $v_z(\lambda) = \dfrac{\lambda_1(z) - \alpha}{\lambda - \alpha}$.

Аналогично выглядит асимптотическое представление для функции $[(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{(-\infty,-b]}$. Здесь дополнительно к условию (C) потребуется условие (C_-).

(C_-) $\mathbf{E}X_1^{(2)} < 0, \mathbf{E}\, e^{\lambda X_1^{(2)}} < \infty$ при $-\beta \le \lambda \le 0$, $\beta > 0$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (C) и (C_-). Тогда при некоторых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $z \in (1-\delta, 1)$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$ имеет место представление*

$$[(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{(-\infty,-b]} = u_z(\lambda) e^{(\lambda_2(z)-\lambda)b} + \int\limits_{-\infty}^{-b} e^{\lambda y} dH_z^{(2)}(y),$$

в котором при любом $x \ge 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{-b-x} |dH_z^{(2)}|(y) = O\bigl(e^{-\varepsilon(b+x)}\bigr), \qquad b \to \infty,$$

равномерно по z. Здесь $\lambda_2(z) \le 0$ — решение уравнения $z\varphi_2(\lambda) = 1$, $\lambda_2(1) = 0$,

$$u_z(\lambda) = \frac{1}{(\lambda - \lambda_2(z))(R_-^{(2)})'(z,\lambda_2(z))}, \qquad (R_-^{(2)})'(z,\lambda_2(z)) = \frac{\partial R_-^{(2)}(z,\lambda)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_2(z)}.$$

Таким образом, при выполнении условий леммы 2 имеем

$$\frac{1 - R_+^{(1)}(z,\lambda)[(R_+^{(1)})^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)}}{1 - z\varphi_1(\lambda)} = \frac{1 - R_+^{(1)}(z,\lambda)\bigl(v_z(\lambda)e^{(\lambda-\lambda_1(z))b} + \int_b^\infty e^{\lambda y} dH_z^{(1)}(y)\bigr)}{1 - z\varphi_1(\lambda)}.$$

Отметим сразу, что в силу условия $\mathbf{E}X_1^{(1)} > 0$ отношение

$$\frac{R_+^{(1)}(z,\lambda)}{1 - z\varphi_1(\lambda)} = \frac{1}{R_-^{(1)}(z,\lambda)}$$

не обращается в нуль при $|z| \le 1$ и $\mathrm{Re}\lambda = 0$, оно является преобразованием Лапласа — Стилтьеса функции с ограниченной равномерно по z полной вариацией, поэтому в представлении

$$\frac{R_+^{(1)}(z,\lambda)\int_b^\infty e^{\lambda y} dH_z^{(1)}(y)}{1 - z\varphi_1(\lambda)} = \frac{\int_b^\infty e^{\lambda y} dH_z^{(1)}(y)}{R_-^{(1)}(z,\lambda)} = \int\limits_b^\infty e^{\lambda y} dV_z(y)$$

также имеет место

$$\int\limits_b^\infty |dV_z|(y) = O\bigl(e^{-\varepsilon b}\bigr), \qquad b \to \infty, \tag{10}$$

равномерно по z. Следовательно, в условиях леммы 2 имеем

$$\frac{1 - R_+^{(1)}(z,\lambda)[(R_+^{(1)})^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)}}{1 - z\varphi_1(\lambda)} = \frac{1 - R_+^{(1)}(z,\lambda)v_z(\lambda)e^{(\lambda-\lambda_1(z))b}}{1 - z\varphi_1(\lambda)} + \int\limits_b^\infty e^{\lambda y} dV_z(y).$$

с оценкой (10). Аналогично устанавливается, что в условиях леммы 3

$$\frac{1-R_-^{(2)}(z,\lambda)[(R_-^{(2)})^{-1}(z,\lambda)]^{(-\infty,-b]}}{1-z\varphi_2(\lambda)}=\frac{1-R_-^{(2)}(z,\lambda)u_z(\lambda)e^{(\lambda_2(z)-\lambda)b}}{1-z\varphi_2(\lambda)}+\int\limits_{-\infty}^{-b}e^{\lambda y}dU_z(y),$$

где

$$\int\limits_{-\infty}^{-b}|dU_z|(y)=O\big(e^{-\varepsilon b}\big),\qquad b\to\infty, \tag{11}$$

равномерно по z. Подставляя полученные асимптотические представления в формулу (7), приходим к следующему утверждению.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (C), (C_+) *и* (C_-). *Тогда при некоторых* $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $z\in(1-\delta,1)$, $\mathrm{Re}\lambda=0$ *имеет место представление*

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda y}\mu_{dy}(n)=\frac{1-R_+^{(1)}(z,\lambda)v_z(\lambda)e^{(\lambda-\lambda_1(z))b}}{1-z\varphi_1(\lambda)} \tag{12}$$

$$+\mathbf{E}z^{N_1}\frac{1-R_-^{(2)}(z,\lambda)u_z(\lambda)e^{\lambda_2(z)b}}{1-z\varphi_2(\lambda)}+\int\limits_{b}^{\infty}e^{\lambda y}dV_z(y)+e^{\lambda b}\int\limits_{-\infty}^{-b}e^{\lambda y}dU_z(y).$$

В силу условия (C_+) при $1-\delta<z<1$ функция $R_+^{(1)}(z,\lambda)$ аналитична в точке $\lambda=\lambda_1(z)$, $R_+^{(1)}(z,\lambda_1(z))=0$, поэтому можно записать разложение

$$R_+^{(1)}(z,\lambda)=(\lambda-\lambda_1(z))(R_+^{(1)})'(z,\lambda_1(z))+\frac{(\lambda-\lambda_1(z))^2}{2}(R_+^{(1)})''(z,\lambda_1(z))+\ldots,$$

откуда следует

$$R_+^{(1)}(z,\lambda)v_z(\lambda)=1+(\lambda-\lambda_1(z))\frac{(R_+^{(1)})''(z,\lambda_1(z))}{2(R_+^{(1)})'(z,\lambda_1(z))}+\ldots,$$

$$\lim_{z\to1}\frac{1-R_+^{(1)}(z,\lambda)v_z(\lambda)e^{(\lambda-\lambda_1(z))b}}{1-z\varphi_1(\lambda)}=\frac{\lambda}{1-\varphi_1(\lambda)}\left(\frac{1-e^{\lambda b}}{\lambda}-e^{\lambda b}\frac{(R_+^{(1)})''(1,0)}{2(R_+^{(1)})'(1,0)}+\ldots\right).$$

Аналогично получаем

$$R_-^{(2)}(z,\lambda)u_z(\lambda)=1+(\lambda-\lambda_2(z))\frac{(R_-^{(2)})''(z,\lambda_2(z))}{2(R_-^{(2)})'(z,\lambda_2(z))}+\ldots,$$

$$\lim_{z\to1}\frac{1-R_-^{(2)}(z,\lambda)u_z(\lambda)e^{\lambda_2(z)b}}{1-z\varphi_2(\lambda)}=\frac{\lambda}{\varphi_2(\lambda)-1}\left(\frac{(R_-^{(2)})''(1,0)}{2(R_-^{(2)})'(1,0)}+\ldots\right).$$

В итоге нами получено следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (C), (C_+) *и* (C_-). *Тогда при некотором* $\varepsilon>0$ *и* $\mathrm{Re}\lambda=0$ *имеет место представление*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda y}Q(dy)=\frac{\lambda}{a(1-\varphi_1(\lambda))}\left(\frac{1-e^{\lambda b}}{\lambda}-e^{\lambda b}\left(\frac{(R_+^{(1)})''(1,0)}{2(R_+^{(1)})'(1,0)}+\lambda\frac{(R_+^{(1)})'''(1,0)}{6(R_+^{(1)})'(1,0)}+\ldots\right)\right)$$

$$+\frac{\lambda}{a(\varphi_2(\lambda)-1)}\left(\frac{(R_-^{(2)})''(1,0)}{2(R_-^{(2)})'(1,0)}+\lambda\frac{(R_-^{(2)})'''(1,0)}{6(R_-^{(2)})'(1,0)}+\dots\right)+O(e^{-\varepsilon b}),\qquad b\to\infty. \tag{13}$$

Отметим, что из соотношений (2) следует

$$R_+^{(1)}(1,\lambda)=1-\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_+^{(1)}\}\right),\qquad R_-^{(2)}(1,\lambda)=1-\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_-^{(2)}\}\right),$$

что позволяет также выразить коэффициенты полученного асимптотического представления (13) через моменты случайных величин $\chi_+^{(1)}$ и $\chi_-^{(2)}$.

Автор благодарен А.И. Саханенко за полезное замечание.

References

[1] J.H.B. Kemperman, *The oscillating random walk*, Stoch. Proc. Appl., **2** (1974), 1–30. MR0362500

[2] B.A. Rogozin and S.G. Foss, *Recurrency of an oscillating random walk*, Theory Probab. Appl., **23**:1 (1978), 155–162. MR0494508

[3] J. Keilson, L.D. Servi, *Oscillating random walk models for GI/G/I vacation systems with Bernoulli schedules*, J. Appl. Probab., **23**:3 (1986), 790–802. MR0855384

[4] N.S. Bratiichuk, D.V. Gusak, *Ergodic distribution of an oscillating process with independent increments*, Ukrainian Math. J., **38**:5 (1986), 465–471. MR0870356

[5] Yu.V. Prokhorov, *Controlling the Wiener process with a bounded number of switches*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **71** (1964), 82–87. MR0170742

[6] D.V. Gusak, *On oscillating schemes of a random walk. I*, Teor. Veroyatnost. Mat. Statist., **39** (1988), 33–39. MR0947928

[7] D.V. Gusak, *On oscillating schemes of a random walk. II*, Teor. Veroyatnost. Mat. Statist., **40** (1989), 11–17. MR1001934

[8] D.V. Gusak, *Oscillating processes with independent increments and nondegenerate Wiener component*, Ukrainian Math. J., **42** (1990), 1257–1261. MR1090534

[9] V.I. Lotov, *On oscillating random walks*, Siberian Math. J., **37**:4 (1996), 764–774. MR1643307

[10] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, London: Springer-Verlag, 2013. MR3086572

[11] V.I. Lotov, *On some boundary crossing problems for Gaussian random walks*, Annals of Probab., **24**:4 (1996), 2154–2171. MR1415246

[12] V.I. Lotov, E.M. Okhapkina, *Stationary distribution of a stochastic process*, J. Math. Sci., **231** (2018), 218–226.

[13] A.A. Borovkov, *New limit theorems in boundary problems for sums of independent terms*, In: Select. Transl. Math. Statist. Probab., **5** (1965), 315–372.

[14] V.I. Lotov, *On an approach to two-sided boundary problems*, in: Statistics and Control of Stochastic Processes [in Russian], 117–121, Moscow: Nauka, 1989. MR1079348

[15] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol.2*, New York–London–Sydney: John Wiley & Sons, 1971. MR0270403

[16] A.A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, New York–Berlin: Springer, 1976. MR0391297

[17] V.I. Lotov, *Limit theorems in a boundary crossing problem for random walks*, Siberian Math. J., **40**:5 (1999), 925–937. MR1726854

Vladimir Ivanovich Lotov
Sobolev Institute of Mathematics,
Pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia,
Novosibirsk State University,
Pirogova St., 1,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: lotov@math.nsc.ru