S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 135–152 (2018) УДК 621.394.74
DOI 10.17377/semi.2018.15.014 MSC 60K25;90B15

ПРОСТРАНСТВЕННО ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННЫЕ ПРОТОКОЛЫ В СЕТЯХ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА

М.Г. ЧЕБУНИН, Е.И. ПРОКОПЕНКО, А.С. ТАРАСЕНКО

Abstract. We analyse a spatial ALOHA-type random multiple-access protocol in a stochastic network with local interactions. We formulate and prove a stability criterion and provide convergence rates to stationarity. Finally, we compare various ALOHA-type protocols in a symmetric network.

Keywords: ALOHA protocol, random multiple access, spatial interactions, spatially decentralized protocol, positive recurrence, (in)stability, Foster criterion.

1. Введение

Мы рассматриваем систему передачи данных (систему обслуживания) с пространственными взаимодействиями, в которой сообщения при поступлении не могут образовывать очереди, и их поступление на передающий прибор осуществляется при помощи некоторого случайного алгоритма управления. Модели такого рода называются системами случайного множественного доступа (с. м. д.). Совокупность правил, по которым каждое сообщение принимает решение, поступать ему на передающий прибор либо нет, будем называть алгоритмом (протоколом) управления.

Более подробно, рассматривается модель с. м. д. с пространственными взаимодействиями, бесконечным числом пользователей и $K \geq 1$ передающими приборами, доступными для всех них. У каждого передающего прибора имеется свой накопитель бесконечного объема, в котором хранятся сообщения,

---

Chebunin, M.G., Prokopenko, E.I., Tarasenko, A.S., Spatially decentralized protocols in random multiple access networks.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и Правительства Новосибирской области (грант № 17-41-543024).

Поступила 22 января 2018 г., опубликована 12 февраля 2018 г.

ожидающие своей передачи. Будем предполагать, что система с. м. д. работает в соответствии с протоколом ALOHA, т. е. сообщения поступают в накопители обслуживающих приборов, и каждое сообщение из i-го накопителя направляется на i-й передающий прибор с одной и той же вероятностью, независимо от всех остальных. Предполагается, что время дискретно, и передачи сообщений происходят за единичный слот времени. Передающий прибор простаивает, если в начале слота на него не поступило сообщений. Если поступило одно сообщение, то оно успешно передается в случае, если все передающие приборы, расположенные «по соседству», простаивали. Если на передающий прибор поступило несколько сообщений, то при передаче сообщения накладываются друг на друга (происходит «конфликт»), т. е. передача оказывается неуспешной, и все сообщения остаются в системе.

Предположим сначала, что $K = 1$, т. е. возможны три ситуации: либо не передавалось ни одного сообщения («пустой слот»), либо передавалось одно сообщение («успех»), либо произошло столкновение сообщений от двух или более пользователей («конфликт»). Будем называть такую модель *базовой.* Пусть $\{A_1(n)\}_{n=1}^{\infty}$ — входной процесс сообщений, где $A_1(n)$ — общее количество сообщений, поступающих в систему во временном интервале $[n-1, n)$. Предполагается, что $\{A_1(n)\}$ — независимые одинаково распределенные (н. о. р.) случайные величины с конечным средним $\lambda_1 = \mathbf{E}A_1(1)$. Обозначим через $W_1(n)$ общее число сообщений, присутствующих в системе в момент времени n.

Ясно, что для описания протокола ALOHA мы должны определить последовательность вероятностей $\{p_1(n)\}$, с которыми каждое сообщение, присутствующее в системе в момент времени n, направляется на передающий прибор. Самый простой вариант — положить вероятности $p_1(n)$ равными одному и тому же числу $p < 1$, т. н. *неадаптивный* протокол. Но, как хорошо известно (см. напр. [7]), в этом случае при любом выборе числа p алгоритм нестабилен, т. е. $W_1(n) \to \infty$ п. н. при $n \to \infty$. Значит, надо выбирать числа $p_1(n)$ зависящими от доступной информации системы, т. е. рассматривать *адаптивные* протоколы.

Базовая модель является *централизованной*, если значения $W_1(n)$ известны пользователям и *децентрализованной* в противном случае. Начиная с 70-х годов 20-го века были построены протоколы, гарантирующие стабильную работу базовой модели при интенсивности входного потока, не превышающей порогового уровня e^{-1} в централизованном случае (см. напр. [9]–[8]), т. е. если $\lambda_1 < e^{-1}$, то алгоритм, при котором $p_1(n) = 1/\max(1, W_1(n))$, стабилен (является эргодическим). Если же $\lambda_1 > e^{-1}$, то любой алгоритм нестабилен, т. е. $W_1(n) \to \infty$ п. н. при $n \to \infty$. Здесь пороговый уровень e^{-1} называется *пропускной способностью* системы.

Затем для базовой децентрализованной модели были построены алгоритмы, использующие т. н. троичную обратную связь (см. напр. [23], [5]), при которой пользователи могут наблюдать выход прибора и различать три возможные ситуации: либо «пустой слот», либо «успех», либо «конфликт». С 80-х годов известно (см. напр. [13], [19], [10]), что при использовании троичной обратной связи пропускная способность системы также равна e^{-1}. Вскоре после появления работ [23], [5] были предложены и исследованы алгоритмы, основанные на меньшем объеме информации (то есть при наличии лишь т. н. «двоичной обратной связи») — либо «пустой или непустой слот», либо «конфликт или неконфликт». В работах [17], [20] для данных видов обратной связи были доказаны аналогичные результаты существования (отсутствия) стабильного алгоритма, если скорость входного сигнала ниже (выше) порогового уровня e^{-1}. Менее изученным являлся случай обратной связи «успех-неуспех». Если передачи не произошло, то неясно, что было — либо был пустой слот, либо наложение сообщений (конфликт двух и более сообщений). Разнообразные алгоритмы, предложенные для такого вида обратной связи (см. напр. [16], [21], [22], [24]), обеспечивают стабильное функционирование системы за счет введения некоторых расширений модели (например, введения специального тестирующего пакета и т. п.) или за счет использования индивидуальной истории сообщений. Впервые стабильный алгоритм, который использует лишь обратную связь вида «успех-неуспех» без дополнительных опций, был построен в недавних работах [12] и [6]. Во всех работах, приведенных выше, исключалась возможность пространственного взаимодействия. Как показывает практика, подобное допущение не всегда выполнимо. В данной работе мы будем рассматривать системы передачи информации с пространственными взаимодействиями, которыми управляют протоколы ALOHA. Заметим, что любая система с. м. д. с пространственными взаимодействиями может быть представлена в виде соответствующего ориентированного графа, где направленные ребра задают некоторую структуру «соседства» для вершин, заданных в виде передающих приборов с накопителями. По аналогии с базовой моделью можно выделить несколько типов централизованных и децентрализованных протоколов при $K \geq 2$. Мы будем называть протокол управления, построенный для системы с. м. д. с пространственными взаимодействиями, *централизованным*, если при построении протокола была использована информация о количестве сообщений, присутствующих в каждом накопителе, *локально централизованным*, если при построении протокола была использована информация о количестве сообщений, присутствующих в накопителях, расположенных по соседству, а также протоколом с *пространственной децентрализацией*, если при построении протокола была использована лишь информация о количестве сообщений, присутствующих в соответствующем накопителе. Аналогично можно классифицировать и другие децентрализованные протоколы, при построении которых информация о количестве сообщений, присутствующих в каком-либо накопителе, недоступна.

Ясно, что для централизованных систем задачу построения стабильного протокола ALOHA всегда можно свести к соответствующей задаче теории расписаний. Например, если разбить ориентированный граф на минимальное количество непересекающихся подграфов, состоящих из изолированных вершин (т. е. вершины внутри каждого подграфа не имеют совместных ребер и не могут мешать друг другу), то можно построить стабильный централизованный протокол ALOHA, где с суммарная пропускная способность всей системы не ниже чем порядок подграфа с минимальным количеством изолированных вершин умноженное на e^{-1}. Для этого достаточно задавать вероятности $p_i(n)$, с которыми каждое сообщение присутствующее в i-м накопителе в момент времени n направляется на i-й передающий прибор, так же, как и в базовой модели для одного из подграфов, и равными нулю для других подграфов, в зависимости от суммарного количества сообщений, присутствующих в системе каждого подграфа, или кратности временного слота. Ситуация становится заметно сложнее для локально централизованных систем. В работе [1] для симметричных систем с. м. д. с пространственными взаимодействиями, т. е. для систем представленных в виде V-регулярного связного графа, был введен и изучен класс протоколов с локальной централизацией, обеспечивающий стабильную работу системы при естественных ограничениях на интенсивность входного потока. Если у каждого передающего прибора имеется ровно $V-1$ соседей, то протокол, при котором $p_i(n)$ задаются как обратные величины от суммарного количества сообщений присутствующих в системе i-го накопителя и всех $V-1$ соседних накопителях, обеспечивает стабильную работу системы, если интенсивности входных потоков не превышают e^{-1}/V. Однако, добиться такой же пропускной способности системы можно и с помощью пространственно децентрализованных протоколов.

В данной работе вводится и изучается достаточно общий класс протоколов с пространственной децентрализацией. Доказывается стабильность введенного класса протоколов при естественных ограничениях на интенсивность входного потока. Задача исследования стабильности протокола сводится к задаче исследования условий положительной возвратности и эргодичности многомерной марковской цепи. В зависимости от вида пространственного взаимодействия между передающими приборами находится граница пропускной способности всей системы с. м. д. с пространственными взаимодействиями, т. е. такое значение суммарной интенсивности входного потока λ_{max}, что стабильный алгоритм ALOHA может быть построен тогда и только тогда, когда суммарная интенсивность входного потока системы меньше чем λ_{max} (см. лемму 1). В частности, для базовой модели (при $K=1$) получаем $\lambda_{max}=e^{-1}$. Также, в зависимости от моментных ограничений на распределение входного потока, мы получим оценки скорости сходимости рассматриваемой марковской цепи к ее стационарному распределению. Работа построена следующим образом. В параграфе 2 вводится модель с. м. д. с пространственными взаимодействиями, приведено описание выбранного для исследования класса алгоритмов и сформулированы основные утверждения. В параграфе 3 строится пробная функция и доказываются вспомогательные утверждения. В параграфах 4 и 5 приводятся доказательства основных утверждений. В приложении мы возвращаемся к централизованному протоколу для базовой модели, формулируем и доказываем лемму про большие уклонения для стационарного распределения. С помощью моделирования сравниваем протоколы с локальной централизацией и пространственной децентрализацией в симметричном случае 3-регулярного графа с четырьмя вершинами, а также более детально обсуждаем построение централизованных протоколов.

2. Описание модели и класса алгоритмов

Пусть $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ — ориентированный граф с конечным множеством вершин $\mathcal{V}=\{1,\ldots,K\}$ и множеством ориентированных ребер $\mathcal{E}$, т. е. $(i,j)\in\mathcal{E}$, если существует направленное ребро от i к j. Для каждой вершины $i\in\mathcal{V}$ определим множество $V_i=\{i\}\cup\{j\in\mathcal{V}:(j,i)\in\mathcal{E}\}$ — соседи вершины i, т. е. множество вершин (включая вершину i), для которых существует направленное ребро от

j к i. В частном случае, когда все вершины имеют одинаковое число соседей, обозначим через V мощность V_i.

Введем теперь систему обслуживания с пространственными взаимодействиями, связанными с графом $\mathcal{G}$. Предположим, что время слотировано, т. е. поступление в систему и обслуживание могут происходить только в моменты времени $n = 1, 2, ...$ Будем предполагать, что в каждой вершине есть свой передающий прибор и накопитель бесконечного объема. Также мы предполагаем, что в момент времени n каждое сообщение из i-го накопителя направляется на i-й передающий прибор с одной и той же вероятностью $p_i(n)$ независимо от всех остальных. Пусть $W(n) = (W_1(n), \dots, W_K(n)) \in \mathbb{Z}_+^K$, где $W_i(n)$ — количество сообщений, присутствующих в i-м накопителе в момент времени n, а $N_i(n)$ — количество сообщений, поступивших в момент времени n на i-й передающий прибор. Сообщение из i-го накопителя передается (покидает систему) в момент времени n, если оно является единственным сообщением, поступившим на i-й передающий прибор и все передающие приборы $V_i \backslash \{i\}$ (находящиеся по соседству) простаивают, т. е. $N_j(n) = 0$ при $j \in V_i \backslash \{i\}$.

Ясно, что $\{N_i(n), 1 \le i \le K\}$ — условно независимые случайные величины, где $N_i(n)$ — случайная величина с условно биномиальным распределением $B(W_i(n), p_i(n))$, т. е.

$$\mathbf{P}(N_i(n) = k | W_i(n) = m, p_i(n) = p) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$$

при $k = 0, 1, ..., m$. Обозначим через $A = \{A(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — процесс поступления новых сообщений, где $A(n) = (A_1(n), \dots, A_K(n)) \in \mathbb{Z}_+^K$, а $A_i(n)$ — количество сообщений, прибывающих во время n в i-й накопитель. Также будем предполагать, что случайные вектора $A(n)$ являются независимыми и одинаково распределенными (в то время как координаты векторов могут быть зависимыми). Мы также предположим, что для всех $n \ge 1$

$$\mathbf{E}A(n) = \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_K) \in (0, \infty)^K.$$

Если значения λ_i не зависят от i, то мы будем писать $\lambda_i = \lambda,\ i = 1, \dots, K$.

Класс алгоритмов с пространственной децентрализацией $\mathcal{A}$ определяется через вектор постоянных $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_K) \in (0, \infty)^K$. Будем полагать, что вероятности поступления на передающие приборы имеют следующий вид

$$p_i(n) = \frac{c_i}{W_i(n) + c_i} \quad \text{при } i \in \{1, \dots, K\}.$$

Обозначим такой алгоритм $\mathcal{A}(\boldsymbol{c}) \in \mathcal{A}$. Заметим, что последовательность $\{W(n)\}$ образует однородную по времени неразложимую цепь Маркова, удовлетворяющую следующей рекурсии

$$W_i(n) = W_i(n-1) + A_i(n) - \mathbf{1}(N_i(n-1) = 1) \prod_{j \in V_i \backslash \{i\}} \mathbf{1}(N_i(n-1) = 0). \tag{1}$$

Далее, для $x \in \mathbb{R}_+^K$ определим норму $|x| = \sum_{i=1}^{K} x_i$. Будем предполагать, что $W(0) = x \in \mathbb{Z}_+^K$ — неслучайное начальное состояние. Чтобы явно показать зависимость $W(n)$ от начального условия $W(0) = x$, мы будем использовать следующие сокращения $\mathbf{E}_x\{\cdot\} := \mathbf{E}\{\cdot\ | W(0) = x\}$ и $\mathbf{P}_x\{\cdot\} := \mathbf{P}\{\cdot\ | W(0) = x\}$.

Обозначим через $\boldsymbol{\phi}(x)$ вектор-функцию $(\phi_1(x), \ldots, \phi_K(x))$, где

$$\phi_i(x) = x_i \exp(-\sum_{j \in V_i} x_j) \text{ при } x \in \mathbb{R}_+^K.$$

Положим $\lambda_+ = |\boldsymbol{\lambda}|$, тогда если $x_i p_i(0) \to z_i \in [0, \infty]$ при $|x| \to \infty$, то для всех $x_i \geq 1$

$$\mathbf{E}_x(|W(1)| - |x|) = \lambda_+ - \sum_{i=1}^{K} x_i p_i(0)(1-p_i(0))^{x_i - 1} \prod_{j \in V_i \setminus \{i\}} (1 - p_j(0))^{x_j} \to \lambda_+ - p(\boldsymbol{z}),$$

где $p(\boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{K} \phi_i(\boldsymbol{z})$. Обозначим

$$\lambda_{max} = \sup_{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}_+^K} p(\boldsymbol{z}), \tag{2}$$

точку в которой достигается супремум в (2), если такая существует, обозначим через $\boldsymbol{z}^0$, т. е. $\lambda_{max} = p(\boldsymbol{z}^0)$.

В ряде частных случаев $\boldsymbol{z}^0$ находится в явном виде. Если $K = 1$, то $p(z) = ze^{-z}$ и $\lambda_{max} = e^{-1}$ при $z^0 = 1$. Если $K = 2$, $\mathcal{E} = \{(1, 2)\}$, то $p(\boldsymbol{z}) = z_1 e^{-z_1} + z_2 e^{-z_1 - z_2}$ и $\lambda_{max} = e^{-1+e^{-1}}$ при $\boldsymbol{z}^0 = (1 - e^{-1}, 1)$. Если $\mathcal{G}$ — полный граф с K вершинами, то $p(\boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{z}|e^{-|\boldsymbol{z}|}$ и $\lambda_{max} = e^{-1}$ для всех $|\boldsymbol{z}^0| = 1$.

Определение 1. *Будем говорить, что цепь Маркова $\{W(n)\}$ положительно возвратна, если существует компактное множество $\mathcal{K} \in \mathbf{R}_+^K$ такое, что*

- *для любого начального значения $W(0) = x$,*

$$\tau_x(\mathcal{K}) = \min\{n \geq 1 : W(n) \in \mathcal{K}\} < \infty \qquad \textit{п. н.}$$

- *кроме того,*

$$\sup_{x \in \mathcal{K}} \mathbf{E}\tau_x(\mathcal{K}) < \infty.$$

Определение 2. *Состояние x_0 называется атомом цепи $\{W(n)\}$, если*

$$\mathbf{P}_x \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{W(n) = x_0\} \right) = 1$$

для любого x. Пусть $W(0) = x$ — атом цепи $\{W(n)\}$. Атом x называется положительным, если $\mathbf{E}\tau_x(x) < \infty$, где $\tau_x(x) = \min\{n > 0 : W(n) = x\}$.

Хорошо известно (см. [4] и [18]), что если цепь Маркова $\{W(n)\}$ апериодична и имеет положительный атом, то цепь эргодична в смысле сходимости в метрике полной вариации: существует вероятностная мера μ такая, что для любого начального состояния x, распределение случайного вектора $W(n)$ сходится к μ в метрике полной вариации, т. е.

$$\sup_B |\mathbf{P}(W(n) \in B) - \mu(B)| \to 0, \quad n \to \infty$$

где супремум берется по всем борелевским множествам $B \in \mathbb{R}_+^K$.

Всюду далее мы будем предполагать апериодичность $\{W(n)\}$. В частности, для этого достаточно, чтобы $\mathbf{P}\{|A(1)| = 0\} > 0$, т. к. в этом случае нулевое состояние достижимо из самого себя и любого другого состояния цепи. Ясно, что если конечное множество положительно возвратно, то в нем можно найти положительно возвратный атом. Поэтому при доказательстве эргодичности мы будем доказывать лишь положительную возвратность конечного множества цепи $\{W(n)\}$.

Определение 3. *Мы называем цепь Маркова $\{W(n)\}$ невозвратной, если существует начальное значение w такое, что $|W(n)| \to \infty$ п. н. при $n \to \infty$.*

Определение 4. *Алгоритм $\mathcal{A}$ стабилен, если цепь Маркова $\{W(n)\}$, определенная в $\mathcal{A}$, эргодична, и нестабилен, если цепь Маркова невозвратна.*

В работе доказаны следующие основные утверждения: теорема о стабильности алгоритмов из класса $\mathcal{A}$, лемма о невозвратности и две теоремы об оценках скорости сходимости.

Теорема 1. *Пусть выполнено покоординатное неравенство $\boldsymbol{\lambda} < \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{c})$ для некоторого вектора постоянных $\boldsymbol{c}$, тогда алгоритм $\mathcal{A}(\boldsymbol{c})$ стабилен.*

Лемма 1. *Если $|\boldsymbol{\lambda}| > \lambda_{max}$ и $\mathbf{P}(|A(1)| \geq K' + 1) > 0$, где K' — максимальное количество сообщений, которое система может передать за один шаг, то любой алгоритм (протокол) ALOHA нестабилен.*

Замечание 1. *Из теоремы 1 и леммы 1 следует, что в симметричном случае V-регулярного связного графа (при $\lambda_i = \lambda,\ i = 1, \dots, K$) можно получить утверждения, аналогичные теореме 1 и следствию 4 из работы* [1] *для протоколов с пространственной децентрализацией $\mathcal{A}(\boldsymbol{c})$ при $\boldsymbol{c} = (1/V, \dots, 1/V)$. Если дополнительно предположить, что мы можем задавать интенсивность входного потока на каждую вершину (например, разделяя некоторый пуассоновский процесс с интенсивностью λ_+), то алгоритм $\mathcal{A}(\boldsymbol{z}^0)$ будет стабилен вплоть до λ_{max} — максимальной пропускной способности системы с. м. д. с пространственными взаимодействиями. Ниже из доказательства теоремы 1 будет видно, что результат теоремы 1 распространяется на пространственно децентрализованные протоколы, в которых $p_i(n) = c_i/(W_i(n)+c')$ для некоторого $c' \geq \max\limits_{1\leq i\leq K} c_i$.*

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{\lambda} < \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{c})$ для некоторого вектора постоянных $\boldsymbol{c}$. Существует задание на одном вероятностном пространстве цепи Маркова $W(n)$ и стационарной цепи Маркова W^n такое, что:*
1. Если при некотором $\alpha > 1$ конечен степенной момент $\mathbf{E}|A(1)|^\alpha < \infty$, то

$$\sup_B |\mathbf{P}(W(n) \in B) - \mathbf{P}(W^n \in B)| \leq C_1/n^{\alpha-1},$$

2. Если при некотором $\mu > 0$ конечен экспоненциальный момент $\mathbf{E}e^{\mu|A(1)|} < \infty$, то существуют $\mu' \in (0, \mu]$ такое, что

$$\sup_B |\mathbf{P}(W(n) \in B) - \mathbf{P}(W^n \in B)| \leq C_2 \cdot e^{-\mu' n},$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные, а супремум берется по всем борелевским множествам $B \in \mathbb{R}_+^K$.

3. Построение пробной функции

Далее нам понадобится пробная функция $L(x) = L(x_1, x_2, \dots, x_K)$, которую мы определим через ее линии уровня. Для произвольного $c > 0$ построим множество $\mathcal{X}_c \subseteq R_+^k$(которое и будет линией уровня) следующим образом (для $K = 2$ см. рис 1): поместим K-мерный куб со стороной c в $\mathbb{R}_+^K$, так чтобы одна из его вершин совпала с началом координат. Затем «сгладим» рёбра (не лежащие на координатных осях) и грани куба так, чтобы координаты вектора нормали получившейся поверхности были непрерывными функциями, при этом участки каждой грани куба

$$\{x : x_1 \le c/2, \cdots, x_{k-1} \le c/2, x_k = c, x_{k+1} \le c/2, \dots, c_K \le c/2\}$$

оставим неизменными. Например, в случае $K = 2$ множество $\mathcal{X}_c$ имеет следующий вид (см. рис. 1). Мы стартуем из точки $(c, 0)$ и движемся (в положительном квадранте) параллельно оси ординат x_2 до точки $(c, c/2)$. Затем от точки $(c, c/2)$ до точки $(c/2, c)$ рисуем гладкую кривую так, чтобы ее нормаль изменялась линейно от $(1, 0)$ до $(0, 1)$. От точки $(c/2, c)$ рисуем прямую параллельно оси абсцисс x_1 до пересечения с осью ординат x_2.

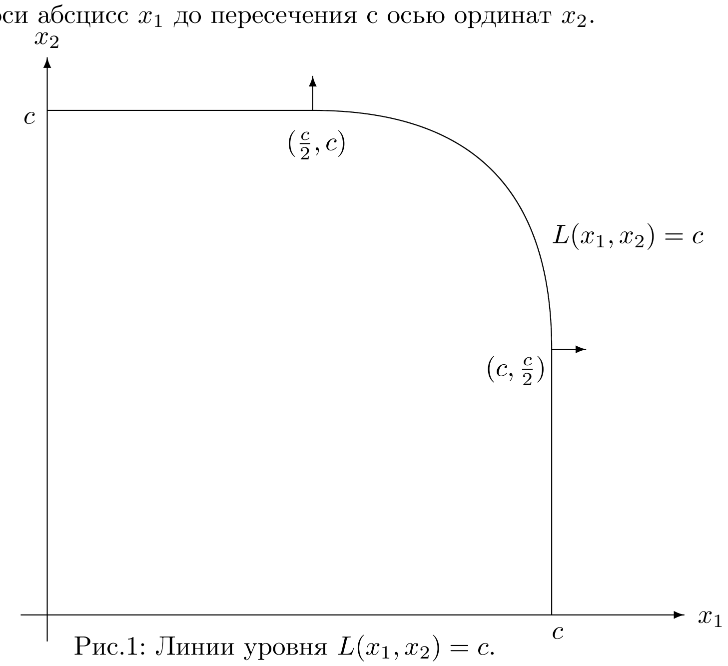

Рис.1: Линии уровня $L(x_1, x_2) = c$.

Ясно, что множества $\mathcal{X}_c, c > 0$ покрывают все пространство $\mathbb{R}^k_+$. Определим при $t, c > 0$ функцию

$$Q(t,c) = \begin{cases} 2t/c - 1, & \text{если } t \in [c/2, c], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Наконец, определим градиент пробной функции $L(x)$: для $x \in \mathcal{X}_c$ положим

$$\triangledown L(x) = (L'_{x_1}(x), \dots, L'_{x_K}(x)) := (Q(x_1, c), \dots, Q(x_K, c))$$

и построим линии уровня с помощью следующей формулы для восстановления функции по ее начальной точке и градиенту

$$F(x) = F(x^0) + \sum_{i=1}^{K} \int_{x_i^0}^{x_i} F'_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}^0, \dots, x_K^0) du,$$

где в качестве начальной точки берется $(c, 0, \dots, 0)$. В случае $K = 2$ для $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

$$L(x) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1 \geq 2x_2\ ; \\ 2(x_1 + x_2 - \sqrt{2x_1x_2}), & \text{если } \frac{1}{2} \leq \frac{x_2}{x_1} \leq 2; \\ x_2, & \text{если } x_2 \geq 2x_1. \end{cases}$$

Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Пусть $L(x)$ — тестовая функция, определенная выше при $x \in \mathbb{R}_+^K$, тогда*

$$\frac{|x|}{K} \leq L(x) \leq |x|, \quad Q(\max_{1 \leq i \leq K}\{x_i\}, L(x)) \geq 1/\sqrt{K}.$$

Доказательство. Так как $L(0) = 0$, то полагая $x = 0$, получаем

$$L(x) = \sum_{i=1}^{K} \int_0^{x_i} L'_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, u, 0, \dots, 0)du \leq \sum_{i=1}^{K} \int_0^{x_i} 1du = |x|.$$

Рассмотрим линию уровня $L(x) = c$, из построения можно заметить, что каждая точка данной линии покоординатно меньше $L(x)$. Следовательно,

$$L(x) \geq \max_{1 \leq i \leq K}\{x_i\} \geq |x|/K.$$

Также все точки линии уровня $L(x) = c > 0$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$\int_c^{x_1} Q(u, c)du + \sum_{i=2}^{K} \int_0^{x_i} Q(u, c)du = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{1}\left(x_i \geq \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x_i^2}{c} - x_i + \frac{c}{4}\right) - \frac{c}{4} = 0.$$

Из уравнения ясно (т. к. элементы суммы неотрицательные неубывающие функции), что минимальное значение максимальной координаты линии уровня $L(x) = c$ достигается на главной диагонали, т. е. в точке $x_1 = \ldots = x_K = (1 + 1/\sqrt{K})c/2$. Следовательно, минимальное значение градиента для максимальной координаты равно $1/\sqrt{K}$.

□

Обозначим через $\Delta L(x)$ приращение $L(W(1)) - L(x)$, где $W(0) = x \in \mathbb{Z}_+^K$. Напомним следующее определение: последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ случайных величин называется *равномерно интегрируемой* (РИ), если

$$\sup_n \mathbf{E}(|X_n|; |X_n| \geq N) \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Известно (см. [2], теорема 6.1.7, стр. 137), что если $X_n \to X$ по вероятности и последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — РИ, то существует $\mathbf{E}|X|$ и $\mathbf{E}|X_n - X| \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 3. *Пусть $L(x)$ — тестовая функция, определенная выше при $x \in \mathbb{R}_+^K$, тогда*

$$\lim_{|x| \to \infty} (\mathbf{E}_x \Delta L(x) - \nabla L(x) \cdot \mathbf{E}_x(W(1) - x)) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть

$$\widehat{A}_i = A_i(1) - \mathbf{1}(N_i(0) = 1) \prod_{j \in V_i \setminus \{i\}} \mathbf{1}(N_i(0) = 0),$$

т. е. $\widehat{A}_i$ — случайная величина, которая принимает значения ≥ -1. Тогда

$$W(1) - x = \widehat{A} = (\widehat{A}_1, \dots, \widehat{A}_K)^T,$$

где $|\widehat{A}_i| \leq_{\text{п. н.}} A_i(1)+1 = \widetilde{A}_i$. По формуле конечных приращений для некоторого случайного $\theta = \theta(x, W(1)) \in (0,1)$ имеем

$$\Delta L(x) = \nabla L(x + \theta \cdot (W(1) - x)) \cdot (W(1) - x).$$

Обозначим через $x(\theta) = x + \theta(W(1) - x)$, в силу определения $\nabla L(x)$, пользуясь теоремой об оценке конечных приращений, получаем

$$|L(x(\theta)) - L(x)| \leq_{\text{п. н.}} |\widetilde{A}|,$$

где $\widetilde{A} = (\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_K)^T$. Следовательно, с вероятностью 1

$$\frac{L(x(\theta))}{L(x)} \to 1, \quad \text{т. к. } L(x) \to \infty \text{ при } |x| \to \infty.$$

Определим $\eta^x = (\eta_1^x, \dots, \eta_K^x)$, где $\eta_i^x = Q(x_i(\theta), L(x(\theta))) - Q(x_i, L(x))$ и рассмотрим следующие 4 случая:
1. Если $2x_i \leq L(x)$ и $2x_i(\theta) \leq L(x(\theta))$, то $\eta_i^x = 0$.
2. Если $2x_i \leq L(x)$ и $2x_i(\theta) \in [L(x(\theta)), 2L(x(\theta))]$, то

$$|\eta_i^x| = \frac{2x_i(\theta)}{L(x(\theta))} - 1 = \frac{2}{L(x(\theta))}\left(x_i(\theta) \pm x_i - \frac{L(x)}{2} - \frac{L(x(\theta)) - L(x)}{2}\right) \leq_{\text{п. н.}} \frac{3|\widetilde{A}|}{L(x(\theta))}.$$

3. Если $2x_i \in [L(x), 2L(x)]$ и $2x_i(\theta) \leq L(x(\theta))$, то

$$|\eta_i^x| = \frac{2x_i}{L(x)} - 1 = \frac{2}{L(x)}\left(x_i \pm x_i(\theta) - \frac{L(x(\theta))}{2} - \frac{L(x) - L(x(\theta))}{2}\right) \leq_{\text{п. н.}} \frac{3|\widetilde{A}|}{L(x)}.$$

4. Если $2x_i \in [L(x), 2L(x)]$ и $2x_i(\theta) \in [L(x(\theta)), 2L(x(\theta))]$, то

$$|\eta_i^x| = \left|\frac{2x_i(\theta)}{L(x(\theta))} - \frac{2x_i}{L(x)}\right| = \frac{2}{L(x(\theta))}\left|x_i(\theta) - x_i - \frac{x_i(L(x(\theta)) - L(x))}{L(x)}\right| \leq_{\text{п. н.}} \frac{4|\widetilde{A}|}{L(x(\theta))}.$$

В силу определения $\nabla L(x)$ (3) принимает следующий вид

$$\lim_{|x|\to\infty} \mathbf{E}_x((\nabla L(x + \theta \cdot (W(1) - x)) - \nabla L(x)) \cdot (W(1) - x)) = \lim_{|x|\to\infty} \mathbf{E}_x(\eta^x \cdot \widehat{A}) = 0.$$

Рассмотрим семейство случайных величин $\{\eta^x \cdot \widehat{A}\}_{|x|>0}$. Ясно, что семейство РИ (т. к. имеется интегрируемая мажоранта $= |\widetilde{A}|$), и что $\eta^x \cdot \widehat{A} \to 0$ п. н. при $|x| \to \infty$. $\square$

Замечание 2. *Лемма 2 является общим фактом и относится только к виду функции $L(x)$. Лемма 3 справедлива не только для цепи Маркова $W(n)$, ассоциированной с алгоритмом, но и для более широкого класса цепей Маркова, определенных в положительном квадранте. В качестве $W(n)$ достаточно* *взять цепь Маркова такую, что выражение* $\Delta L(x) - \nabla L(x) \cdot (W(1) - x)$ *будет равномерно интегрируемо и будет сходиться к нулю по вероятности при* $|x| \to \infty$.

4. Стабильность и невозвратность

Доказательство теоремы 1.
Напомним, что $W(n)$ — цепь Маркова, принимающая значения в $\mathbb{Z}_+^K$. Если $x_i > 0$, то i-я компонента вектора сноса задается выражением

$$\mathbf{E}_x[W_i(1) - W_i(0)] = \lambda_i - \frac{c_i x_i}{x_i + c_i}\left(1 - \frac{c_i}{x_i + c_i}\right)^{x_i - 1} \prod_{j \in V_i \setminus \{i\}} \left(1 - \frac{c_j}{x_j + c_j}\right)^{x_j},$$

и если $x_i = 0$, то $\mathbf{E}_x[W_i(1) - W_i(0)] = \lambda_i$. Перепишем выражение для вектора сноса следующим образом:

$$\mathbf{E}_x[W(1) - W(0)] = \boldsymbol{\lambda} - G(x),$$

где $G(x) = (G_1(x), \dots, G_K(x)) : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$ — K-мерная вектор функция, i-я компонента которой задается следующей формулой

$$G_i(x) = \begin{cases} \frac{c_i x_i}{x_i + c_i}\left(1 - \frac{c_i}{x_i + c_i}\right)^{x_i - 1} \prod\limits_{j \in V_i \setminus \{i\}} \left(1 - \frac{c_j}{x_j + c_j}\right)^{x_j}, & \text{если } x_i > 0, \\ 0, & \text{если } x_i = 0. \end{cases}$$

Для стабильности алгоритма достаточно показать, что найдутся пробная функция $L(x)$ и постоянная M такие, что

$$(1)\quad \mathbf{E}_x(L(W(1)) - L(x) | L(x) \le M) < \infty,$$

$$(2)\quad \mathbf{E}_x(L(W(1)) - L(x) | L(x) > M) < -\delta < 0.$$

Будем строить линии уровня тестовой функции $L(x)$ по вышеуказанному правилу (см. рис. 1). Из леммы 2 и определения $W(n)$ для любого конечного M получаем справедливость (1). Для доказательства (2) достаточно показать, что

$$\limsup_{|x| \to \infty} \mathbf{E}_x(L(W(1)) - L(x)) < 0.$$

В силу леммы 3 достаточно показать, что

$$\limsup_{|x| \to \infty} \nabla L(x) \cdot (\boldsymbol{\lambda} - G(x)) = \limsup_{|x| \to \infty} \sum_{i=1}^{K} Q(x_i, L(x))(\lambda_i - G_i(x))$$

$$= \limsup_{|x| \to \infty} \sum_{i=1}^{K} \delta_i(x) < -\delta < 0.$$

Докажем справедливость последнего. Обозначим через

$$\delta_1 = \min_{1 \le i \le K} \left(c_i \exp\left(- \sum_{j \in V_i} c_j \right) - \lambda_i \right) > 0.$$

Заметим, что

$$\left(1 - \frac{c}{t + c}\right)^t = \exp\left(t \ln\left(1 - \frac{c}{t + c}\right)\right) > e^{-c},$$

т. к. $\ln\left(1-\frac{c}{t+c}\right) > -\frac{c}{t}$ при $t, c \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, существует $m > 0$ такое, что если $x_i \geq m$, то $\lambda_i - G_i(x) < -\delta_1/2$. Из построения $L(x)$ ясно, что $\delta_i(x) = 0$ при $x_i \leq m$ для всех x таких, что $|x| > M$. Пусть $L(x) \geq M$, тогда в силу леммы 2

$$\sum_{i=1}^{K} \delta_i(x) \leq -Q(\max_{1\leq i\leq K}\{x_i\}, L(x)) \cdot \delta_1/2 \leq -\frac{\delta_1}{2\sqrt{K}} = -\delta.$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

Чтобы убедиться в справедливости замечания 1, нужно повторить доказательство теоремы 1, воспользовавшись неравенством

$$\ln\left(1-\frac{c_i}{t+c'}\right) > -\frac{c_i}{t+c'-c_i} \text{ при } t, c_i \in \mathbb{R}_+.$$

Для доказательства леммы 1 мы воспользуемся основным результатом из работы [11], где основная теорема была сформулирована для неоднородных цепей Маркова. Для простоты мы приведем формулировку основного результата из [11] для однородных цепей Маркова.

Пусть $\{X_n\}_{n\geq 0}$ — однородная по времени цепь Маркова с начальным состоянием $X_0 = x$, принимающая значения в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Далее, пусть $T : \mathcal{X} \to [0, \infty)$ — измеримая неотрицательная функция, $\Delta T(x) = T(X_1) - T(x)$ и $\Delta_x^- = -\min(\Delta T(x), 0)$. Для числа $M > 0$ определим $\tau_x(M) = \min\{n \geq 1 \ : \ T(X_n) \geq M\}$.

Предложение 1. *Предположим, что существуют числа $M > 0$, $\varepsilon > 0$, $M' > 0$ и измеримая функция $\phi \ : \ [0, \infty) \to [1, \infty)$ такие, что*
(1) $\tau_x(M) < \infty$ п. н. при всех $x \in \mathcal{X}$;
(2) $\mathbf{E}\{\Delta T(x) \cdot I(\Delta T(x) \leq M')\} \geq \varepsilon$ при всех $x \in \mathcal{X}$ таких, что $T(x) \geq M$;
(3) интеграл $\int_1^\infty (\phi(t))^{-1} dt$ сходится и при $t \geq 1$ функция $\phi(t)/t$ является неубывающей и выпуклой вверх;
(4) семейство случайных величин $\{\phi(\Delta_x^-); T(x) \geq M\}$ равномерно интегрируемо.
Тогда $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} T(X_n) = \infty) = 1$ при всех $x \in \mathcal{X}$.

Доказательство леммы 1.
Пусть $W(0) = x$ и $T(W(n)) = |W(n)|$. Возьмем произвольный алгоритм ALOHA $\mathcal{A} = \{p_i(n)\}_{n\geq 0, i\in\{1,\dots,K\}}$ и проверим условия предложения 1. Так как $\mathbf{P}(|A(1)| \geq K'+1) = p > 0$, то для любого $M > 0$ можно оценить $\tau_x(M)$ геометрической случайной величиной с параметром p^M, умноженной на M. Следовательно, условие (1) выполнено. Отметим, что

$$\mathbf{E}(\Delta T(x)) = \lambda_+ - \sum_{i=1}^{K} p_i(0) x_i \left(1-p_i(0)\right)^{x_i - 1} \prod_{j\in V_i\setminus\{i\}} \left(1-p_j(0)\right)^{x_j},$$

где последнее выражение стремится при $|x| \to \infty$ и $p_i(0) \cdot x_i \to z_i \in [0, \infty]$, к разности $\lambda_+ - p(\boldsymbol{z})$. В силу того, что $\lambda_+ - \lambda_{max} > 0$, где $\lambda_{max} = \max_{\boldsymbol{z}>0} p(\boldsymbol{z})$, значит найдется число $M > 0$, такое что $\mathbf{E}(\Delta_x) \geq \frac{\lambda - \lambda_{max}}{2}$ при $|x| \geq M$. Следовательно, для всех x таких, что $|x| \geq M$, существует M', при котором выполнено условие

(2). Так как $\Delta_y^- \le K$ п. н., то условия (3) и (4) выполнены автоматически с $\phi(t) = t^{3/2}$. *Доказательство леммы 1 завершено.*

5. Оценки скорости сходимости

Пусть $\{X_n\}_{n\ge 0}$ — однородная по времени цепь Маркова, принимающая значения в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, и $T : \mathcal{X} \to [0,\infty)$ — измеримая неотрицательная функция. Если $X_0 = x$, то под $\Delta T(x)$ понимаем приращение $T(X_1) - T(x)$. Для измеримого множества $V \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ определим момент попадания (момент возвращения, если $x \in V$) $\tau_V = \min\{n : \; n > 0, \; X_n \in V\}$. Сформулируем два предложения, доказательство которых можно найти в книге Калашникова В. В. (см. [14], стр. 113-118).

Предложение 2. *Пусть существуют неотрицательная функция $T(x)$, $x \in \mathcal{X}$, положительные числа $\delta > 0$, $\alpha > 1$ и семейство случайных величин $\{\delta(x)\}_{x\in\mathcal{X}}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(a) $\sup\limits_{x\in V} T(x) < \infty$;

(b) $\mathbf{P}(\Delta T(x) \le \delta(x)) = 1 \quad \forall x \in \mathcal{X}$;

(c) $\sup\limits_{x\notin V} \mathbf{E}\delta(x) \le -\delta < 0$;

(d) $\sup\limits_{x\in\mathcal{X}} \mathbf{E}|\delta(x)|^\alpha < \infty$.

Тогда

$$\mathbf{E}_x(\tau_V)^\alpha \le \begin{cases} (c_1 + 2T(x)/\delta)^\alpha & \text{при } x \notin V, \\ c_2 & \text{при } x \in V \;. \end{cases}$$

Предложение 3. *Для того, чтобы среднее $\mathbf{E}_x \exp(\mu\tau_V)$, $\mu > 0$, было конечно для любого $x \in \mathcal{X}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $T(x) \ge 1$, $x \in \mathcal{X}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(a) $\mathbf{E}_x\Delta T(x) < \infty$, $x \in V$;

(b) $\mathbf{E}_x\Delta T(x) \le -(1-e^{-\mu})T(x)$, $x \notin V$.

При выполнении данных условий справедливо следующее неравенство:

$$\mathbf{E}_x e^{\mu\tau_V} \le \begin{cases} T(x) & \text{при } x \notin V, \\ e^\mu(T(x) + \mathbf{E}_x\Delta T(x)) & \text{при } x \in V \;. \end{cases}$$

Предложения 2 и 3 соответственно будут использованы для доказательства теоремы 2.

Доказательство теоремы 2.

1. Если конечен степенной момент, то для доказательства достаточно (см. [15]), чтобы существовало измеримое множество V такое, что

$$\sup_{x\in V} \mathbf{E}_x(\tau_V)^\alpha < \infty.$$

Положим $T(x) = L(x)$. Из доказательства теоремы 1 известно, что для функции L выполнены условия критерия Фостера. Поэтому достаточно воспользоваться предложением 2, положив $\delta(x) = \Delta L(x)$.

2. Пусть $V = \{L(x) \le K\}$, где K — некоторая постоянная и L — тестовая функция, определенная ранее. Будем предполагать (см. доказательство теоремы 1), что $\mathbf{E}_x\Delta L(x) \le -\varepsilon < 0$ при $x \notin V$.

Если конечен экспоненциальный момент, то для доказательства достаточно (см. [15]), чтобы существовало измеримое множество V такое, что для некоторого $\mu' > 0$

$$\sup_{x \in V} \mathbf{E}_x e^{\mu' \tau_V} < \infty.$$

Следовательно, нам нужно построить тестовую функцию, удовлетворяющую условиям предложения 3. Проверим условия предложения 3 для тестовой функции $T(x) = \exp(\delta L(x)) \geq 1$, где $\delta > 0$ — некоторая постоянная. В силу определения функции L и теоремы об оценке конечных приращений получаем, что

$$\mathbf{E}_x \Delta T(x) = e^{\delta L(x)} \left(\mathbf{E}_x e^{\delta \Delta L(x)} - 1 \right) < e^{\delta L(x)} \left(\mathbf{E} e^{\delta |A(1)|} - 1 \right) < \infty,$$

при $\delta \leq \mu,\ x \in V$. Получаем справедливость условия (a) предложения 3.

Проверим условие (b). Пусть $g(t) = \mathbf{E}_x e^{t \Delta L(x)}$, тогда $g(t) < \infty$ при $t \in [0, \mu]$ равномерно по $x \in \mathbb{Z}_+^K$. Заметим, что $g(0) = 1$ и $g'(0) = \mathbf{E}_x \Delta L(x) \leq -\varepsilon < 0$, равномерно по $x \notin V$. Следовательно, существует некоторое $\delta \in (0, \mu]$ такое, что $g(\delta) < 1$ равномерно по $x \notin V$.
Доказательство теоремы 2 завершено.

6. Приложение

Рассмотрим централизованный протокол для базовой модели. Известно, что $W_1(n)$ — однородная по времени неразложимая цепь Маркова, удовлетворяющая соотношению

$$W_1(n+1) = W_1(n) + A_1(n) - \eta_n, \quad n \geq 1,$$

где с.в. η_n имеют условное бернуллиевское распределение с параметром

$$\left(1 - \frac{1}{W_1(n)} \right)^{W_1(n) - 1}.$$

Пусть $\lambda_1 < e^{-1}$, тогда существует стационарное распределение $\pi(x)$:

$$\pi(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_+} \pi(y) \mathbf{P}(x, y) \ x \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\mathbf{P}(x, y) = \mathbf{P}_x(W_1(1) = y)$. Справедливо следующее утверждение о больших уклонениях для стационарного распределения.

Лемма 4. *Пусть для некоторого $\delta > 0$ выполнено условие Крамера, т. е. $\mathbf{E} e^{\delta A_1(1)} < \infty$. Тогда для стационарного распределения выполнено*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \pi(x)}{x} = -\mu_0, \tag{4}$$

где $\mu_0 := \sup\{\mu \geq 0 \ : \ \mathbf{E} e^{\mu(A_1(1) - \eta)} \leq 1\}$, случайная величина η не зависит от $A_1(1)$ и имеет распределение Бернулли с параметром e^{-1}.

Замечание 3. *Рассмотрим цепь Маркова*

$$W_1'(n+1) = W_1'(n) + A_1(n) - \eta_n', \quad n \geq 1,$$

где с.в. η_n' независимы имеют распределение Бернулли с параметром e^{-1}, и не зависят от $A_1(n)$. Тогда для стационарного распределения этой цепи выполнено соотношение (4) с той же константой μ_0.

Напомним следующее

Определение 5. *Цепь Маркова называется асимптотически однородной по пространству, если распределение* $\mathbf{P}(x, x+B)$ *сходится при* $x \to \infty$ *к некоторому распределению* $F(B)$.

Если обозначить через $w(x) = W_1(1) - x$ приращение цепи за один шаг при условии, что $W_1(0) = x$, и через w — случайную величину с распределением $F(\cdot)$, то названное выше свойство означает слабую сходимость распределения $w(x)$ при $x \to \infty$ к распределению с.в. w. Лемма 4 и замечание 3 следуют из следующего утверждения (теорема 3 в [3])

Предложение 4. *Пусть однородная по времени цепь Маркова* $W_1(n)$ *асимптотически однородна по пространству и* $\mathbf{E}w < 0$. *И пусть для*

$$\mu_0 := \sup\{\mu \geq 0 \,:\, \mathbf{E}e^{\mu w} \leq 1\}$$

выполнено

$$\sup_x \mathbf{E}e^{\mu_0 w(x)} < \infty.$$

Тогда для стационарного распределения выполнено

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \pi(x)}{x} = -\mu_0.$$

Далее мы обсудим результаты моделирования исследуемых нами моделей. Рассмотрим простейшую симметричную модель, т. е. 3-регулярный граф с четырьмя вершинами и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$. Из теоремы 1 следует, что для стабильности такой системы нам не нужно знать о количествах ожидающих сообщений в соседних вершинах. Естественно предположить, что использование дополнительной информации о количествах ожидающих сообщений в соседних вершинах может улучшить поведение системы. Но в каком смысле?

Мы сравнили с помощью моделирования наш протокол $p_i(n) = 1/(3W_i(n)+1)$ с протоколом $p_i(n) = 1/\sum_{j\in V_i} W_j(n)$ (см. [1]). Мы уже знаем, что условия стабильности у этих двух протоколов одинаковы. Моделирование показало, что второй алгоритм, учитывающий информацию о соседях, имеет в накопителях в среднем меньшее количество ожидающих сообщений. Так, моделируя систему с входными интенсивностями $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{e^{-1}}{3} - 0.001$ и пустыми накопителями, после 10^8 шагов получаем, что выборочное среднее по накопителям с максимальным количеством ожидающих сообщений в этой системе оказывается равно 14.708071. В то время как для алгоритма, учитывающего информацию о соседях, это среднее равно 5.961767.

Обобщим класс сравниваемых между собой алгоритмов. Будем обозначать через $\Upsilon_{a,b}$ алгоритм, приписывающий на n-ом шаге каждому запросу в i-ой вершине вероятности обслуживания

$$p_i(n) = 1 \Bigg/ \left(a\; W_n(i) + b \sum_{j\in V_i, i\neq j} W_j(n) \right),$$

с ограничением $a + 2b = 3$. Ранее рассмотренные алгоритмы, таким образом, соответствуют $\Upsilon_{3,0}$ и $\Upsilon_{1,1}$. Приведем таблицу, демонстрирующую выборочное среднее по накопителям с максимальным количеством ожидающих сообщений после 10^8 шагов для различных a и b.

A	B	выборочное среднее
0	1.5	11.057180
0.2	1.4	10.125187
0.4	1.3	9.764355
0.6	1.2	8.969807
0.8	1.1	8.759372
1	1	5.961767
1.2	0.9	7.066537
1.4	0.8	7.686935
1.6	0.7	8.645380
1.8	0.6	9.278976
2	0.5	9.753327
2.2	0.4	10.828417
2.4	0.3	11.829801
2.6	0.2	12.645886
2.8	0.1	13.808884
3	0	14.708071

Из приведенных данных следует, что оптимальным (в некотором смысле) в данном классе алгоритмом является $\Upsilon_{1,1}$.

Другая характеристика, которая может представлять интерес при сравнении различных алгоритмов, это время стабилизации системы τ. Для этой величины трудно указать какое-либо очевидное определение. Мы будем использовать относительно естественное и легко тестируемое определение: τ — первый момент времени, когда каждая из вершин хотя бы раз имела пустой накопитель. Или, более строго, $\tau = \min\{n : \forall i\ \exists j \leqslant n\ W_i(j) = 0\}$. Попробуем оценить его среднее значение в случае, когда в накопителях двух соседних вершин имеется по 1000 сообщений, в то время как остальные вершины начинают с пустыми накопителями. Полагая входные интенсивности $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{e^{-1}}{3} - \varepsilon$, с помощью моделирования получаем следующие выборочные средние математические ожидания для τ для алгоритмов $\Upsilon_{3,0}$ и $\Upsilon_{1,1}$:

ε	$\Upsilon_{3,0}$	$\Upsilon_{1,1}$
0.001	177220	271710
0.005	51403	56859
0.01	28775	28811
0.03	11078	10182
0.06	5998	5528

Таким образом при определенных значениях интенсивности входящего потока (близких к предельным значениям для данных алгоритмов) алгоритм $\Upsilon_{3,0}$ может оказаться предпочтительнее $\Upsilon_{1,1}$. По крайней мере до тех пор, пока работа системы не стабилизируется.

Следует заметить, что при определенных предположениях нашу задачу можно свести к задаче с одним обслуживающим прибором. А именно, если наши приборы могут без сбоев отслеживать прошедшее время. В таком случае мы можем разбить множество вершин графа, соответствующего нашей системе, на такие подгруппы $\{\mathcal{G}_k\}$, что вершины между разными группами ($\mathcal{G}_i$ и $\mathcal{G}_j$, $i \neq j$) не мешают друг другу обслуживать вызовы.

Тогда всё, что нам остается сделать — это заставить эти группы передавать сообщения по очереди: в то время как некоторая группа вершин $\mathcal{G}_i$ пытается обслужить свои вызовы, все остальные группы прекращают какую-либо активность. В результате, если всего имеем k групп, то между двумя попытками обслужить вызовы для каждой вершины проходит k моментов времени, а значит приходит в k раз больше вызовов, чем за единицу времени. А так как нашим вершинам никогда не мешают соседи, то, пользуясь уже полученными результатами, получаем, что интенсивность входного потока на каждую вершину может достигать e^{-1}/k.

Среди недостатков данного подхода, кроме требования к точной синхронизации времени, можно отметить требование предварительных расчетов на основе структуры графа. И любая модификация сети, такая как добавление или удаление узлов, должна повлечь и перестройку алгоритма.

Авторы выражают глубокую признательность С. Г. Фоссу и А. М. Тюрликову, предложившим обратить внимание на рассматриваемые в статье проблемы, и благодарны за плодотворное обсуждение данных вопросов. Авторы также хотели бы поблагодарить рецензента за полезные замечания, которые способствовали улучшению текста.

References

[1] C. Bordenave, S. Foss, V. Shneer, *A Random Multiple Access Protocol with Spatial Interactions*, Journal of Applied Probability, **46**:3 (2009), 844–865. MR2562325

[2] A. A. Borovkov, *Probability Theory*, Universitext, London: Springer, 2013. MR3086572

[3] A. A. Borovkov, D. A. Korshunov, *Large-deviation probabilities for one-dimensional Markov chains. Part 1: Stationary distributions*, Theory of Probability and its Applications, **41**:1 (1997), 1—24. MR1404893

[4] M. Bramson, *Stability of queueing networks*, Lecture Notes in Mathematics, 1950. Berlin: Springer, 2008. MR2445100

[5] J. L. Capetanakis, *Tree algorithms for packet broadcast channels*, IEEE Transactions on Information Theory, **25**:5 (1979), 505—515. MR0545006

[6] M. G. Chebunin, *On ergodic algorithms in systems of multiple access with partial feedback*, Siberian Elektronic Mathematical Reports, **13** (2016), 762—781. MR3553168

[7] A. Ephremides, B. Hajek, *Information theory and communication networks: An unconsummated union*, IEEE Trans. Inform. Theory, **44**:6 (1998), 2416—2434. MR1658779

[8] G. I. Falin, *Random processes in structurally complex queueing systems*, Dissertation d.f.-m.s. M.: MSU, 1989.

[9] G. Fayolle, E. Gelembe, J. Labetoulle, *Stability and optimal control of the packet switching broadcast channel*, J. of Assoc. Comput. Mach., **24** (1977), 375–386. MR0445639

[10] S. G. Foss, *Stochastic recursive sequences and their applications in Queueing*, Dissertation d.f.-m.s. Novosibirsk, IM SB RAS, 1992.

[11] S. G. Foss, D. E. Denisov, *On transience conditions for Markov chains*, Sibirsk. Mat. Zh., **42**:2 (2001), 425—433. MR1833167

[12] S. G. Foss, B. Hajek, A. M. Turlikov, *Doubly Randomised Protocols for a Random Multiple Access Channel with «Success-Nonsuccess» Feedback*, Problems of Information Transmission, **52**:2 (2016), 61–71. MR3592234

[13] B. Hajek, T. van Loon, *Decentralized dynamic control of a multiaccess broadcast channel*, IEEE Trans. Automatic Control, **27**:3 (1982), 559–569. Zbl 0486.93077

[14] V. V. Kalashnikov, *Mathematical methods in queuing theory*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1994. MR1319595

[15] V. V. Kalashnikov, *Estimates of convergence rates and stability for regeneration and renewal Markov processes*, In: Queueing theory, M.: VNIISI, 1981, 7–12.

[16] A. Malkov, A. Turlikov, *Random multiple access protocols for communication systems with «success-failure» feedback*, IEEE International Workshop on Information Theory, 1995, 1–39.

[17] N. Mehravari, T. Berger, *Poisson multiple-access contention with binary feedback*, IEEE Transactions on Information Theory, **30**:5 (1984), 745—751. MR0781271

[18] S. Meyn, R. L. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer, 1993. MR2509253

[19] V. A. Mikhailov, *Geometrical Analysis of the Stability of Markov Chains in* $\mathbf{R}_+^n$ *and Its Application to Throughput Evaluation of the Adaptive Random Multiple Access Algorithm*, Problems of Information Transmission, **24**:1 (1988), 47—56. MR0939575

[20] B. Paris, B. Aazhang, *Near-optimum control of multiple-access collision channels*, IEEE Transactions on Wireless Communications, **40** (1992), 1298—1308. Zbl 0825.94162

[21] B. S. Tsybakov, A. N. Beloyarov, *Random multiple access in a channel with a binary feedback «Success-Failure»*, Problems of Information Transmission, **26**:3 (1990), 67–82. MR1082128

[22] B. S. Tsybakov, A. N. Beloyarov, *Random multiple access in a channel with a binary feedback*, Problems of Information Transmission, **26**:4 (1990), 83–97. Zbl 0746.94014

[23] B. S. Tsybakov, V. A. Mikhailov, *Free synchronized access in a broadcast channel with a feedback*, Problems of Information Transmission, **14**:4 (1978), 32–59. MR0538901

[24] A. Turlikov, S. Foss, *On ergodic algorithms in random multiple access systems with «success-failure» feedback*, Problems of Information Transmission, **46**:2 (2010), 184–200. MR2724798

Mikhail Georgievich Chebunin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia.
Novosibirsk State University,
str. Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: chebuninmikhail@gmail.com

Evgenii Igorevich Prokopenko
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia.
Novosibirsk State University,
str. Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: evgenii.prokopenko@gmail.com

Anton Sergeevich Tarasenko
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia.
Novosibirsk State University,
str. Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: dkanus@gmail.com