S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1353–1360 (2018) УДК 519.172.3, 519.174

DOI 10.17377/semi.2018.15.111 MSC 05C20, 05C15

СОВЕРШЕННЫЕ ОРИЕНТАЦИОННЫЕ РАСКРАСКИ КУБИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Т.Е. КИРЕЕВА

Abstract. In this work we extend concept of perfect coloring for directed graph. We use computer algorithm to get all allowable matrices of parameters for perfect orientation colorings of cubic graphs. For each matrix of parameters we show examples of coloring for corresponding minimal graphs.

Keywords: cubic graph, directed graph, perfect coloring, perfect orientation coloring.

1. Введение

Данная работа посвящена исследованию совершенных ориентационных раскрасок кубических графов. Получен критерий принадлежности матрицы к классу допустимых матриц параметров совершенных ориентационных раскрасок кубических графов. С помощью компьютерного перебора найдены все такие матрицы.

Раскраска вершин графа называется совершенной, если для любых двух вершин одного цвета цветовые составы их окружения совпадают.

На текущий момент теория совершенных раскрасок демонстрирует активное развитие, см. [1, 2, 4, 5]. Одно из направлений данной теории предлагает переход к случаю ориентированных графов, где непосредственный перенос результатов сопряжен с рядом сложностей, аналогичных тем, что встречаются в тематике правильных раскрасок [6]. В частности, при введении естественных определений приходится делать ряд уточнений.

Kireeva, T.E., Perfect orientation colorings of cubic graphs.

Работа поддержана РНФ (грант 16-11-10054).

Поступила 3 ноября 2017 г., опубликована 1 ноября 2018 г.

Раскраска вершин неориентированного графа называется совершенной ориентационной раскраской, если существует такая ориентация графа, что раскраска по полустепеням исхода получившегося ориентированного графа совпадает с данной, и для любых двух вершин одного цвета цветовой состав входящего и исходящего окружения первой вершины совпадает с цветовым составом входящего и исходящего окружения второй вершины, соответственно.

Изучение данного понятия логично начать с минимального нетривиального случая — кубических графов. В ходе исследования возник вопрос: каким распределением полустепеней исхода может обладать ориентация произвольного кубического графа? Ответ для связных графов получен в [3].

2. Предварительные сведения

Рассмотрим произвольный граф $G = (V, E)$ и множество цветов $C = \{1, \dots, k\}$, на которых задана раскраска $f : V \to C$ такая, что для любого цвета $i \in C$ существует вершина $v \in V$, покрашенная в этот цвет. Цветовым составом множества $M \subseteq V$ называется вектор $c(M)$, i-ая компонента которого равна количеству вершин цвета i в множестве M.

Раскраска вершин графа G называется совершенной, если для любых двух вершин одного цвета цветовые составы их окружения совпадают.

Матрицей параметров совершенной раскраски называется матрица $S = (s_{ij})$, где s_{ij} — это количество вершин цвета j, которые смежны с вершиной цвета i.

Индуцированной раскраской ориентированного графа G называется раскраска вершин графа G по полустепеням исхода. Вершина цвета i имеет полустепень исхода, равную i.

Рассмотрим произвольную вершину v ориентированного графа $G = (V, E)$. Обозначим через $S_{out}(v) = \{x | (v, x) \in E\}$ — множество вершин графа G, соединенных с вершиной v дугами, направленными из вершины v, через $S_{in}(v) = \{x | (x, v) \in E\}$ — множество вершин графа G, соединенных с вершиной v дугами, направленными в вершину v.

Раскраска вершин неориентированного графа G называется совершенной ориентационной раскраской, если существует ориентация ребер графа G такая, что индуцированная раскраска полученного ориентированного графа совпадает с данной раскраской, и для любых двух вершин v и w одинакового цвета $c(S_{out}(v)) = c(S_{out}(w))$ и $c(S_{in}(v)) = c(S_{in}(w))$.

3. Симметризуемые матрицы

Матрица S с неотрицательными целыми компонентами называется симметризуемой, если существует положительно определенная диагональная матрица D с целыми компонентами, такая что матрица DS является симметричной. Матрицу D назовем симметризующей для S. Вектор, составленный из диагональных компонент матрицы D, назовем симметризующим вектором матрицы S.

Заметим, что в симметризуемой матрице, если $s_{ij} \neq 0$, то и $s_{ji} \neq 0$. И наоборот, если $s_{ij} = 0$, то и $s_{ji} = 0$.

По симметризуемой матрице S построим её матрицу-носитель M: все ненулевые элементы матрицы S заменим на 1. Матрица M является матрицей смежности некоторого графа H. Граф H назовем характеристическим для матрицы S.

Симметризуемая матрица S называется связной матрицей, если её характеристический граф связен.

В дальнейшем мы будем говорить только про связные симметризуемые матрицы.

Легко понять, что если d — симметризующий вектор, то и λd также является симметризующим вектором, где $\lambda \in \mathbb{N}$. Верно и обратное, если d — симметризующий вектор, то и вектор, полученный делением d на НОД(d_i), также является симметризующим вектором.

В дальнейшем, говоря о симметризующей матрице или симметризующем векторе, будем считать, что они минимальны, то есть их компоненты взаимно просты.

Теорема 1. *Матрица S является матрицей параметров совершенной раскраски некоторого связного графа G тогда и только тогда, когда S является связной симметризуемой матрицей с неотрицательными целыми компонентами.*

Доказательство. «$\Rightarrow$» Рассмотрим связный граф $G = (V, E)$, для которого существует совершенная раскраска f с матрицей параметров S. Число вершин цвета i в графе G обозначим через d_i. Рассмотрим подграф $H = (V_{ij}, E_{ij})$, $V_{ij} = \{v \in V | f(v) = i \vee f(v) = j\}$, $E_{ij} = \{(v, w) | f(v) = i, f(w) = j\}$ графа G, образованный вершинами цвета i и цвета j. Граф H является бирегулярным двудольным графом со степенями s_{ij} и s_{ji}, в котором число ребер, с одной стороны, равно $d_i s_{ij}$, с другой — $d_j s_{ji}$. Следовательно, если взять матрицу D с диагональными компонентами $d_1, \ldots, d_k$, то матрица DS будет симметричной.

Заметим, что характеристический граф матрицы параметров S будет связным, так как граф G связный по условию теоремы.

«$\Leftarrow$» Определим граф G с множеством вершин $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$, где $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $|V_i| = K d_i$ для некоторого достаточно большого $K \in \mathbb{Z}$. На каждом множестве вершин V_i построим регулярный граф степени s_{ii}. На всех парах $V_i, V_j, i \neq j$ построим произвольный бирегулярный граф со степенями s_{ij} и s_{ji}.

Если получившийся граф несвязен, то определим граф G как компоненту связности построенного графа. Осталось показать, что граф G содержит все цвета. Это верно, потому что характеристический граф матрицы S связен, значит, в графе G существует путь из любого цвета i в любой цвет j.

Теорема доказана.

Остается понять, какого минимального значения может достигать коэффициент кратности K.

Пусть G — некоторый граф с минимальным числом вершин, допускающий совершенную раскраску с матрицей параметров S. Из доказательства теоремы ясно, что такой граф может быть построен только в соответствии с этим доказательством.

Это означает, что число вершин цвета i в графе G, во-первых, должно быть четным, если s_{ii} и d_i нечетны, во-вторых, должно быть кратно d_i.

Тогда для каждого цвета i существует минимальная константа m_i, удовлетворяющая следующим двум условиям: $m_i d_i \geq s_{ii} + 1$ и число $m_i d_i s_{ii}$ является четным. Ясно, что число вершин цвета i в графе G не меньше $m_i d_i$.

Аналогично рассмотрим два подграфа графа G, образованных вершинами цветов i и j, $i < j$. В подграфе цвета i число вершин, во-первых, должно быть кратно d_i, во-вторых, должно быть не меньше числа вершин цвета i, смежных с вершиной цвета j. Аналогично для подграфа цвета j.

Таким образом получается, что для каждой пары цветов существует минимальная константа t_{ij}, для которой выполняются следующие условия: $t_{ij}d_i \geq s_{ji}$, $t_{ij}d_j \geq s_{ij}$. Число вершин цвета i в графе G не меньше $t_{ij}d_i$, а цвета j — не меньше $t_{ij}d_j$.

Обозначим через K максимум среди чисел m_i и t_{ij} по всем цветам i, j, $i < j$.

Отсюда получаем, что число вершин в минимальном графе равно $K\sum\limits_i d_i$ или $(K+1)\sum\limits_i d_i$, если хотя бы при одном i оба числа d_i и s_{ii} нечетны.

4. Ориентационно допустимые матрицы

Матрица называется ориентационно допустимой, если существует ориентированный граф G, индуцированная раскраска которого является совершенной ориентационной раскраской, имеющей данную матрицу параметров, если рассматривать ее как раскраску неориентированного графа.

Будем считать, что цвета упорядочены по полустепеням исхода. Также в ориентационно допустимой матрице могут быть нулевые строки и соответствующие им нулевые столбцы, это означает, что цвет, соответствующий нулевой строке, является фиктивным. Поэтому для регулярных графов степени r будем рассматривать ориентационно допустимые матрицы размера $r+1$, считая, что i-я строка матрицы соответствует i-му цвету.

Теорема 2. *Матрица $S = (s_{ij})_{i,j=0,\ldots,3}$, $s_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ является ориентационно допустимой для некоторого связного кубического графа G тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(1) $\sum\limits_i s_{ij} \in \{0, 3\}$ *для каждого* $j = 0, 1, 2, 3$;
(2) S *симметризуема;*
(3) $3d_0 + d_1 = d_2 + 3d_3$, *где d_i — компоненты симметризующего вектора матрицы S. Если i — фиктивный цвет, то $d_i = 0$;*
(4) $s_{00} = 0$, $s_{33} = 0$; s_{11}, s_{22} — *четные;*
(5) $s_{10} + \frac{s_{11}}{2} \leq 1$; $s_{13} + \frac{s_{11}}{2} \leq 2$;
(6) $s_{20} + \frac{s_{22}}{2} \leq 2$; $s_{23} + \frac{s_{22}}{2} \leq 1$;
(7) $(1 - s_{10} - \frac{s_{11}}{2})d_1 = (1 - s_{23} - \frac{s_{22}}{2})d_2$;
(8) $(2 - s_{13} - \frac{s_{11}}{2})d_1 = (2 - s_{20} - \frac{s_{22}}{2})d_2$;

Доказательство. «$\Rightarrow$» Рассмотрим связный кубический граф $G = (V, E)$ и его совершенную ориентационную раскраску f с матрицей параметров S. Будем считать, что i-й цвет соответствует полустепени исхода i. В теореме 1 было доказано, что S симметризуема.

Так как число всех входящих дуг $m(3d_0 + 2d_1 + d_2)$ равно числу всех исходящих дуг $m(3d_3 + 2d_2 + d_1)$, где m — коэффициент кратности числа вершин графа к сумме компонент симметризующего вектора, то выполнено $3d_0 + d_1 = d_2 + 3d_3$, где d_i — компоненты симметризующеего вектора матрицы S.

Вершины цвета 0 не могут быть смежными, следовательно, $s_{00} = 0$. Аналогично для цвета 3. Если вершина цвета 1 имеет входящую дугу из вершины цвета 1, то должна быть исходящая дуга в вершину цвета 1, иначе раскраска графа не будет совершенной ориентационной раскраской. Аналогично для цвета 2. Следовательно, s_{11} и s_{22} — четные.

Число исходящих дуг для вершины цвета 1 не превосходит единицы, а входящих — двух. Следовательно, выполнены неравенства $s_{10}+\frac{s_{11}}{2} \leq 1$, $s_{13}+\frac{s_{11}}{2} \leq 2$. Аналогично для цвета 2.

Рассмотрим подграф H_{12} графа G, образованный вершинами цветов 1 и 2 и множеством ребер

$$E_{12} = \{(v,w) \in E | (f(v)=1 \wedge f(w)=2) \vee (f(v)=2 \wedge f(w)=1)\}.$$

Число исходящих дуг из вершины цвета 1 в подграфе H равно числу входящих дуг в вершины цвета 2, значит, верно $(1-s_{10}-\frac{s_{11}}{2})d_1 = (1-s_{23}-\frac{s_{22}}{2})d_2$. Аналогично для условия 8.

«$\Leftarrow$» Все матрицы, удовлетворяющие условиям теоремы 1–7, построены с помощью компьютерного перебора, исходя из тех соображений, что в виду условия *1* число различных вариантов каждой строки не превышает 21 (включая нулевую строку), а количество всех матриц не превышает 21^4.

По теореме 1 матрица S является матрицей параметров совершенной раскраски f некоторого кубического графа $G=(V,E)$, и известно минимальное число вершин соответствующего графа. Для каждой получившейся матрицы построен минимальный граф и его совершенная ориентационная раскраска с помощью следующего алгоритма:

(0) Построим совершенную раскраску неориентированного графа G с матрицей S, используя метод из теоремы 1.
(1) Ориентируем ребра, инцидентные вершинам цвета 0 и цвета 3, «от» и «к» этим вершинам, соответственно.
(2) Если $s_{ii} \neq 0, i=1,2$, то ребра, инцидентные двум вершинам цвета i, образуют циклы, их ориентируем в одном направлении.
(3) Зададим ориентацию двудольному подграфу H_{12}, образованному вершинами цвета 1 и 2 и множеством ребер $E_{12} = \{(v,w) \in E | f(v) = 1, f(w)=2\}$:
   (a) Если в равенствах *7* и *8* обе части равны нулю, то все ребра уже ориентированы.
   (b) Если обе части в равенстве *8* равны нулю, обе части равенства *7* не равны нулю, то оставшиеся ребра ориентируем от вершин цвета 1 к вершинам цвета 2.
   (c) Если наоборот, то от вершин цвета 2 к вершинам цвета 1.
   (d) Если оба равенства ненулевые, то $d_1 = d_2$, следовательно, в подграфе существует совершенное паросочетание. Его ориентируем от вершин цвета 1 к вершинам цвета 2. Остальные ребра ориентируем от вершин цвета 2 к вершинам цвета 1.

Для каждой матрицы существует соответствующий ей ориентированный граф, следовательно, матрицы являются ориентационно допустимыми.

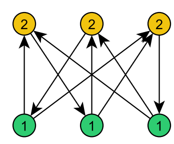
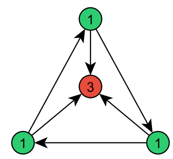
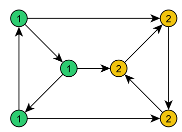
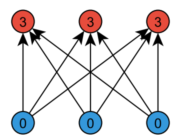
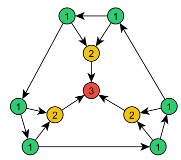
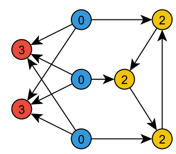
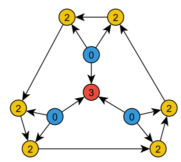
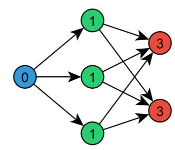
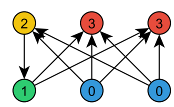
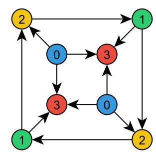
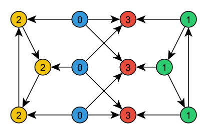
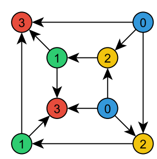
Теорема доказана.

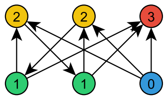
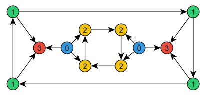
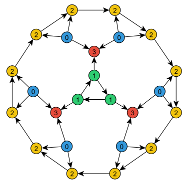
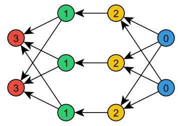
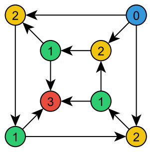
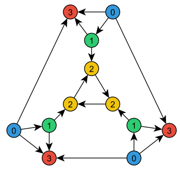
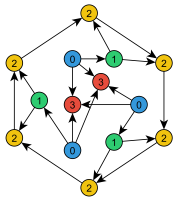
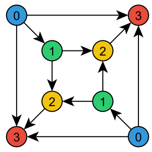
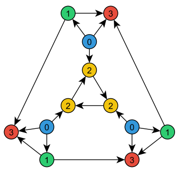
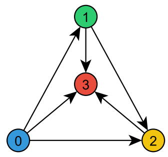
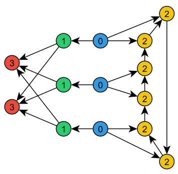
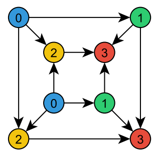
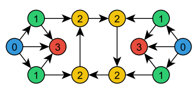
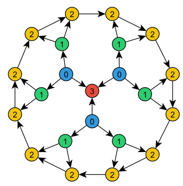
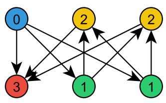
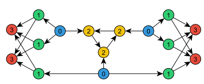
Рассмотрим матрицу S и матрицу S', полученную из нее поворотом на $180°$ (центральной симметрией). Тогда если матрица S является ориентационно допустимой матрицей, то и S' также ориентационно допустима.

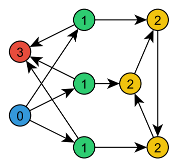
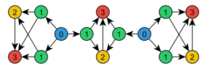
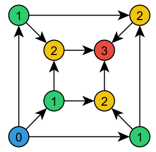
Действительно, поворот матрицы на $180°$ градусов соответствует перенумерации цветов в обратном порядке. Так как цвет обозначает полустепень исхода, то инвертирование всех дуг в графе, имеющем совершенную ориентационную раскраску с матрицей параметров S, приводит к совершенной ориентационной раскраске с матрицей параметров S'.

В Таблице 1 приведены все ориентационно допустимые матрицы кубических графов с точностью до центральной симметрии. Матрицы упорядочены по количеству нефиктивных цветов, а внутри — в лексикографическом порядке.

Таблица 1. Ориентационно допустимые матрицы кубических графов. S — ориентационно допустимая матрица, G — минимальный кубический граф с соответствующей совершенной ориентационной раскраской.

№	S	G	№	S	G
		Два цвета			
1	$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&3&0\\0&3&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$		2	$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&1\\0&0&0&0\\0&3&0&0\end{pmatrix}$	
3	$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$		4	$\begin{pmatrix}0&0&0&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\3&0&0&0\end{pmatrix}$	
		Три цвета			
5	$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&1&0\\0&2&0&1\\0&0&3&0\end{pmatrix}$		6	$\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&0&0\\1&0&2&0\\3&0&0&0\end{pmatrix}$	
7	$\begin{pmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&0\\1&0&2&0\\3&0&0&0\end{pmatrix}$		8	$\begin{pmatrix}0&3&0&0\\1&0&0&2\\0&0&0&0\\0&3&0&0\end{pmatrix}$	
		Четыре цвета			
9	$\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&2\\2&1&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$		10	$\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&2&1\\1&2&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$	
11	$\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&2&0&1\\1&0&2&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$		12	$\begin{pmatrix}0&0&2&1\\0&0&1&2\\2&1&0&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}$	

13	$\begin{pmatrix}0&0&2&1\\0&0&2&1\\1&2&0&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}$		14	$\begin{pmatrix}0&0&2&1\\0&2&0&1\\1&0&2&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}$	
15	$\begin{pmatrix}0&0&2&1\\0&2&0&1\\1&0&2&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$		16	$\begin{pmatrix}0&0&3&0\\0&0&1&2\\2&1&0&0\\0&3&0&0\end{pmatrix}$	
17	$\begin{pmatrix}0&0&3&0\\0&0&2&1\\1&2&0&0\\0&3&0&0\end{pmatrix}$		18	$\begin{pmatrix}0&1&0&2\\1&0&1&1\\0&1&2&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$	
19	$\begin{pmatrix}0&1&0&2\\1&0&2&0\\0&1&2&0\\3&0&0&0\end{pmatrix}$		20	$\begin{pmatrix}0&1&0&2\\1&0&2&0\\0&2&0&1\\2&0&1&0\end{pmatrix}$	
21	$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&2\\1&0&2&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}$		22	$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$	
23	$\begin{pmatrix}0&1&2&0\\1&0&0&2\\1&0&2&0\\0&3&0&0\end{pmatrix}$		24	$\begin{pmatrix}0&1&2&0\\1&0&0&2\\2&0&0&1\\0&2&1&0\end{pmatrix}$	
25	$\begin{pmatrix}0&2&0&1\\1&0&1&1\\0&1&2&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}$		26	$\begin{pmatrix}0&2&0&1\\1&0&2&0\\0&1&2&0\\3&0&0&0\end{pmatrix}$	
27	$\begin{pmatrix}0&2&0&1\\1&0&2&0\\0&2&0&1\\1&0&2&0\end{pmatrix}$		28	$\begin{pmatrix}0&2&1&0\\1&0&0&2\\1&0&2&0\\0&3&0&0\end{pmatrix}$	

29	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		30	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	
31	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$				

Автор благодарен своему научному руководителю Августиновичу С. В. за полезные обсуждения и советы при написании данной работы.

References

[1] S. V. Avgustinovich, A. Yu. Vasil'eva, I. V. Sergeeva, *Distance regular colorings of the infinite rectangular grid*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:3 (2011), 3–10. MR2883263

[2] S. V. Avgustinovich, M. A. Lisitsyna, *Perfect 2-colorings of transitive cubic graphs*, J. Appl. Industr. Math., **5**:4 (2011), 519–528. MR2841697

[3] T. E. Kireeva, *Orientation spectra of cubic graphs*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 703–709. MR3693755

[4] M.A. Lisitsyna, S.V. Avgustinovich, *Perfect colorings of the prism graph*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1116–1128. MR3592225

[5] O. G. Parshina, *Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **21**:2 (2014), 76–83. MR3241789

[6] Sopena, É, *Homomorphisms and colourings of oriented graphs: An updated survey*, Discrete Math., **339**:7 (2016), 1993–2005. MR3488937

Tatiana Evgenyevna Kireeva
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: tatyanakireeva17@gmail.com