

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 1383–1409 (2018)
DOI 10.17377/semi.2018.15.114УДК 519.626.1
MSC 49M27ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ РАСХОДА
РЕСУРСА

В.М. АЛЕКСАНДРОВ

ABSTRACT. A general method of computing optimal control for consumption of resources is developed. The method includes both normal and singular solution. According to the method the problem is subdivided into two independent tasks: 1) computation of the structure of optimal control; 2) computation of the switching moments of optimal control. The structure computation is based on the original method of constructing quasi-optimal control. And the control switching moments computes with the help of the relation found between the displacements of the initial conditions of the adjoint system and the displacements of the phase trajectory at the completion moment. Given the method of assignment of initial approximation. An iterative algorithm is developed, its characteristics being considered. The influence of system parameters and time of transfer on the structure of optimal control. The results of modeling and numerical computations are given.

Keywords: optimal control, speed, moving time, resource consumption, switching moments, iterative process, adjoint system, phase trajectory.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптимальное управление представляет значительный теоретический и практический интерес [1]-[2]. Особое место занимает задача минимизации расхода ресурса. Сформулированная первоначально как задача оптимального управления по расходу топлива, она рассматривалась многими как отечественными так и зарубежными авторами [3]-[9]. Так как аналитическое решение задачи

ALEKSANDROV, V.M., ON SOME PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL.

© 2018 АЛЕКСАНДРОВ В.М.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00592а).

Поступила 14 декабря 2016 г., опубликована 9 ноября 2018 г.

в общем случае невозможно, то отечественными и зарубежными специалистами предложены различные численные методы, каждый из которых обладает определенными достоинствами и недостатками [10]–[15]. Для существования решения задачи время перевода должно быть больше (либо равно) времени оптимального по быстродействию управления. Но время оптимального по быстродействию перевода системы заранее не известно и зависит от начального условия. Произвольное фиксированное задание времени перевода для любых начальных условий системы: 1) ограничивает область начальных условий, для которых такой перевод возможен; 2) делает неравномерным расход ресурса от начальных условий; 3) может привести к вырожденному решению, для которого структура управления (т.е. последовательность знаков управляющих воздействий) не определяется с помощью сопряженной системы. Ввиду сложности получения решения широко использовалось лишь нормальное решение и недостаточно внимания уделялось вырожденному решению задачи.

В работе предложен метод общего решения задачи минимизации расхода ресурса, включающий как нормальное так и вырожденное решения. Принципиальная трудность в случае вырожденного решения заключается в неопределенности знаков управляющих воздействий и отсутствии их связи с решением сопряженной системы. Рассматриваемый в работе метод основан на разделении задачи минимизации расхода ресурса на две независимые подзадачи: 1) вычисление структуры управления; 2) вычисление моментов переключений управления. Вычисление структуры основано на оригинальном методе формирования квазиоптимального управления из начальных условий управляемой системы. Квазиоптимальное управление обладает рядом важных свойств: а) переводит систему в требуемое конечное состояние; б) формируется с использованием сопряженной системы, т.е. с использованием первого необходимого условия оптимальности в классическом вариационном исчислении (уравнения Эйлера - Лагранжа). Поэтому структура квазиоптимального управления позволяет определить структуру искомого оптимального управления, т.е. определить знаки управляющих воздействий для каждой компоненты вектора искомого оптимального управления. Вычисление моментов переключений управления основано на найденной приближенной связи между отклонениями начальных условий сопряженной системы с отклонениями фазовых координат прямой системы в конечный момент времени. Использование приближенных соотношений приводит к итерационному вычислительному процессу. Дан метод задания начального приближения. Разработан итерационный алгоритм и рассмотрены его особенности. Приведены результаты моделирования и численных расчетов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in D, \quad D \subset V, \quad (2.1)$$

где x — n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; u — m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.2)$$

Предполагается, что система (2.1) покомпонентно полностью управляема, т.е.

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) B_j^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.3)$$

и переводима в начало координат из ограниченной области начальных условий D ; V — область управляемости; $\Phi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения; * — знак транспонирования.

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за фиксированное время $T = t_k - t_0$ (где $T \geq T_0$) систему (2.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = 0$ и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau. \quad (2.4)$$

Здесь T_0 — время оптимального по быстродействию перевода системы.

Замечание 1. В случае $T = T_0$ оптимальное по расходу ресурса управление совпадает с оптимальным по быстродействию управлением.

Замечание 2. Условие покомпонентной полной управляемости (2.3) для рассматриваемых прямоугольных параллелепипедных ограничений (2.2) адекватно "условию общности положения" [1].

Замечание 3. Перевод системы в любое конечное состояние (принимаемое за новое начало координат) преобразованием координат сводится без потери общности к переводу системы из нового начального состояния в начало координат и рассмотрен в разделе 4.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

3.1. Перевод системы за фиксированное время. В постановке задачи предполагается, что заданное время больше времени оптимального по быстродействию перевода системы, т.е. $T \geq T_0$. Поэтому прежде всего необходимо проверить, выполняется ли это *необходимое* условие. С этой целью следует решить промежуточную задачу: найти финитное управление $u^F(t)$, переводящее систему (2.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$.

Оптимальное по быстродействию управление формируется по алгоритму :

$$u_j(t) = M_j \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.1)$$

Здесь $[B_j(t)]^*$ — транспонированный j -й вектор-столбец матрицы $B(t)$; $\psi(t)$ — решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$. Финитное управление $u^F(t)$, переводящее систему (2.1) из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$, определяется так

$$u_j^F(t) = \eta M_j \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.2)$$

где параметр $\eta > 0$ показывает во сколько раз следует изменить величины компонент вектора управления, чтобы обеспечить перевод системы (2.1) из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_k) = 0$ не за минимальное, а за заданное время T . Финитное управление есть оптимальное по быстродействию управление, если вместо ограничения (2.2) ограничить компоненты вектора управления по условию $|u_j^F| \leq \eta M_j, j = \overline{1, m}$. В [17] рассмотрена итерационная процедура нахождения

оптимального по быстродействию управления. Если параметр $\eta \leq 1$, то решение задачи на минимум расхода ресурса существует. Если $\eta > 1$, то решения не существует. Для существования решения необходимо увеличить M_j либо T . Увеличение M_j , $j = \overline{1, m}$ всегда приводит к решению задачи (если система (2.1) полностью управляема, т.е. выполняется условие (2.3)), но сопряжено с увеличением управляющих воздействий. Увеличение T для неустойчивых систем не приводит к решению задачи, если $x_0 \notin V$. Действительно, для неустойчивых систем с ограниченным управлением переход в начало координат возможен лишь из области управляемости V . Если $x_0 \notin V$, то даже за бесконечное время невозможен перевод системы в начало координат. Однако на практике время T задается зачастую произвольно, без учета возможностей системы. Поэтому увеличение T позволяет во многих случаях получить решение задачи. Отношение $\mu = T/T_0$ (при $T/T_0 > 1$) характеризует запас по времени и определяет экономию ресурса. Чем больше μ , тем меньше расход ресурса. Однако скорость, с которой происходит уменьшение расхода ресурса, уменьшается с ростом μ [18].

3.2. Вычисление оптимального по расходу ресурса управления. Для нахождения оптимального по расходу ресурса управления при ограничении (2.2) образуем функцию Понтрягина $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ и выпишем сопряженную систему $\dot{\psi}(t)$:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = - \sum_{j=1}^m |u_j| + \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u, \quad (3.3)$$

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi.$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, соответствующей функциям $x(t)$ и $u(t)$, что для любого $t \in [t_0, t_k]$ функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, t).$$

Функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ максимальна, если компоненты вектора управления удовлетворяют следующим условиям:

$$u(t) = \begin{cases} \pm M_j & \text{при } -1 \leq [B_j(t)]^* \psi(t) \leq 1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi(t) > -1, \end{cases} \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.4)$$

В зависимости от положения начальной точки в фазовом пространстве и величины заданного времени T возможны два решения: 1) нормальное решение; 2) вырожденное решение задачи минимизации расхода ресурса. Нормальное решение характеризуется тем, что последовательность знаков оптимального по расходу ресурса управления однозначно задается функцией переключений $[B_j(t)]^* \psi(t)$. Для нормального решения выражение (3.4) может быть представлено следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} M_j & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \geq 1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi(t) > -1, \\ -M_j & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \leq -1. \end{cases} \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.5)$$

Нормальное решение задачи минимизации расхода ресурса рассмотрено в [9].

Вырожденное решение характеризуется тем, что для заданного начального условия $x(t_0) = x_0$ и заданного времени перевода T последовательность

знаков оптимального по расходу ресурса управления не совпадает с последовательностью знаков оптимального по быстродействию управления, т.е. не определяется функцией переключений. Это порождает существенную трудность нахождения оптимального по расходу ресурса управления. Структура оптимального по расходу ресурса управления может быть представлена так:

$$u(t) = \pm M_j, \quad t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}], \quad p = \overline{1, r_j},$$

$$u(t) \equiv 0, \quad t \in [t_j^{2p-1}, t_j^{2p}], \quad p = \overline{1, r_j - 1}, \quad (3.6)$$

где $t_j^0 = t_0$; $t_j^{2r_j-1} = t_k$; r_j - максимальное число интервалов знакопостоянства j компоненты вектора оптимального по быстродействию управления; t_j^α - α момент переключения (включения или выключения) j компоненты вектора оптимального по расходу ресурса управления. Моменты переключений задаются функцией переключений $[B_j(t)]^* \psi(t)$. Для j компоненты вектора управления функция переключений принимает значения ± 1 в моменты $t = t_j^\alpha$, т.е. справедливо соотношение $[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = \pm 1$. Задавая произвольно и последовательно знаки ($R_j = \pm 1$), можно записать

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = R_j \quad (3.7)$$

Выразим решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ через фундаментальную матрицу прямой системы

$$\psi(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^* \psi(t_0) \quad (3.8)$$

и подставим (3.8) в (3.7). Задав произвольно n моментов переключений t_j^α ($\alpha = \overline{1, l_j}$, $\sum_{j=1}^m l_j = n$; $j = \overline{1, m}$), получим для вычисления начальных условий сопряженной системы $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ следующую систему из n линейных алгебраических уравнений

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) - R_j = 0. \quad (3.9)$$

Вычислив начальное условие $\psi(t_0)$, с помощью решения на интервале $[t_0, t_k]$ сопряженной системы (3.8) находим все t_j^α , для которых выполняются (3.9). Параметры p и α связаны соотношением $p = E(\alpha/2 + 1)$, $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, где $E(\cdot)$ - целая часть числа. Таким образом, задав произвольно n моментов переключений, находим с помощью функций переключений соответствующие n заданным все остальные моменты переключений на интервале $[t_0, t_k]$.

Важно отметить, что двум симметричным функциям переключений соответствуют одни и те же значения моментов переключений t_j^α $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$.

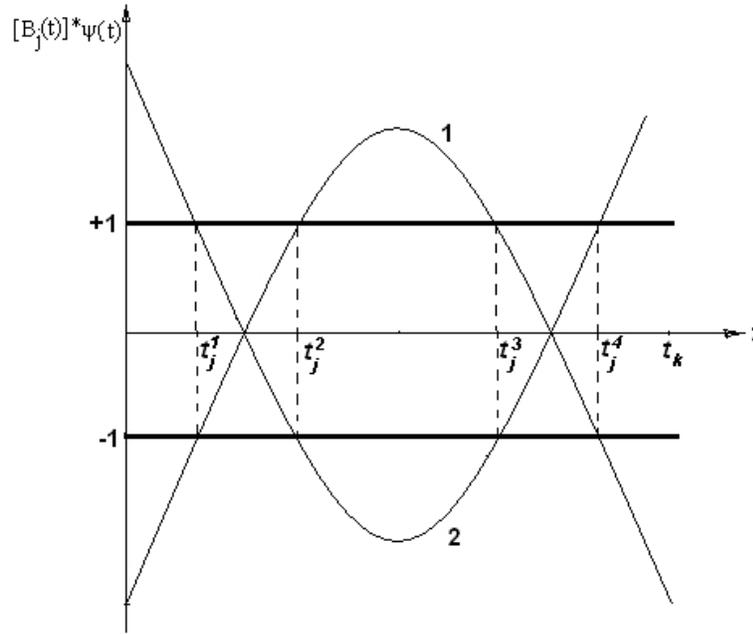


Рис. 1. Симметричные функции переключений

На рис. 1 приведены две симметричные функции переключений, которым соответствуют одинаковые значения моментов переключений. Это обстоятельство позволяет разнести проблемы и решать их отдельно и последовательно: 1) определить структуру оптимального управления (т.е. последовательность знаков управляющих воздействий); 2) вычислить моменты переключений оптимального управления.

3.3. Определение структуры оптимального управления. Знаки управляющих воздействий искомого оптимального управления определяются по знакам квазиоптимального по расходу ресурса управления, которое формируется следующим образом.

Предположим, что вектор начальных условий $x^{(i)}(t_0) = (0, \dots, 0, x_i(t_0), 0, \dots, 0)$ содержит только одну ненулевую компоненту $x_i(t_0)$. Рассмотрим алгоритм формирования управления из начального условия i -й фазовой координаты.

Введем в рассмотрение переменные ограничения на компоненты вектора управления, зависящие от начальных условий

$$|u_j| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad N_{ij} > 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.10)$$

где N_{ij} - некоторые весовые коэффициенты, выбор которых рассмотрен ниже. Для принятого начального условия ограничение (3.10) имеет вид

$$|u_j| \leq N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.11)$$

Для нахождения оптимального по расходу ресурса управления при ограничении (3.11) воспользуемся принципом максимума. Образует функцию Понтрягина $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ и выпишем сопряженную систему $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = - \sum_{j=1}^m |u_j| + \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u, \quad \dot{\psi} = -A^*(t)\psi.$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, соответствующей функциям $x(t)$ и $u(t)$, что для любого $t \in [t_0, t_k]$ функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, t).$$

Функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ максимальна, если компоненты вектора управления удовлетворяют следующим соотношениям:

$$u_j^{(i)}(t) = \begin{cases} N_{ij}|x_i(t_0)| & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \geq 1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi(t) > -1, \\ -N_{ij}|x_i(t_0)| & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \leq -1, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

Соотношение (3.12) можно записать более компактно:

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}x_i(t_0) \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad (3.13)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

В [18] доказана независимость моментов переключений от начальных условий, что обеспечивает простую реализацию управления, и найдена допустимая область начальных условий, для которой не нарушаются предельные ограничения на управления. Последнее важно при *непосредственном* управлении объектами, но не важно при задании начального приближения. В этом случае важна форма начального приближения. *Форма квазиоптимального управления позволяет определить структуру искомого оптимального по расходу ресурса управления.*

Сохраним это важное свойство независимости моментов переключений от начальных условий, но другим способом сформируем квазиоптимальное управление. Зафиксируем моменты переключений управления. Тогда весовые коэффициенты N_{ij} принимают различные значения N_{ij}^p на каждом p -м интервале знакопостоянства компонент вектора управления, где $p = \overline{1, r_j}$ а r_j - число интервалов знакопостоянства j -й компоненты. Оно известно после нахождения финитного управления. Известно и число переключений $\alpha^j = 2(r_j - 1)$, $j = \overline{1, m}$ для каждой компоненты вектора управления.

Квазиоптимальное по расходу ресурса управление при одинаковых для всех фазовых координат моментах переключений формируется по алгоритму

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}^p x_i(t_0) \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad (3.14)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p].$$

В общем случае, когда вектор начальных условий $x(t_0)$ содержит все (либо часть) ненулевые компоненты, компоненты вектора управления образуются суммированием составляющих (3.14), сформированных из начальных условий каждой фазовой координаты:

$$u_j^{kv}(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^p x_i(t_0) \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad (3.15)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p].$$

Суммарное управление (3.15) в силу справедливости принципа суперпозиции для линейных систем переводит систему (2.1) из любого начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$ и минимизирует расход ресурсов при переменных ограничениях

$$|u_j| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij}^p |x_i(t_0)|, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.16)$$

3.4. Определение весовых коэффициентов для квазиоптимального управления. Весовые коэффициенты N_{ij}^p , $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$ связаны с параметрами управляемой системы следующим уравнением:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij}^p \text{sign} \left\{ [B_j(\tau)]^* \psi(\tau) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(\tau)]^* \psi(\tau)|) \right] \right\} d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.17)$$

Введем обозначение

$$\hat{N}_{ij}^p = N_{ij}^p \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}. \quad (3.18)$$

Учитывая, что $\Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = \Phi(t_k, t_0) I_i$, где I_i - i -й вектор-столбец единичной матрицы, а $\Phi(t_k, t_0)$ невырождена, систему уравнений (3.17) представим, используя обозначение (3.18), следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.19)$$

где t_j^α - α -й момент переключения j -й компоненты вектора управления. Квазиоптимальное по расходу ресурсов управление формируется с учетом введенных обозначений по алгоритму

$$u_j^{kv}(t) = \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}], \quad p = \overline{1, r_j}, \quad (3.20)$$

$$u_j^{kv}(t) \equiv 0, \quad t \in (t_j^{2p-1}, t_j^{2p}), \quad p = \overline{1, r_j - 1},$$

Пусть определены все моменты переключений t_j^α , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$, включая и конечный момент $t_j^{2r_j-1} = t_k$. Параметры p и α связаны соотношением

$$p = E\{\alpha/2 + 1\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (3.21)$$

где $E\{\cdot\}$ -целая часть числа. Так как $\sum_{j=1}^m 2r_j - 1 \geq n$, то число параметров \hat{N}_{ij}^p может быть больше числа уравнений. Поэтому для i -й фазовой координаты на n интервалах знакопостоянства компонент вектора управления принимаем неизвестными коэффициенты \hat{N}_{ij}^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, k_j}$, где $\sum_{j=1}^m k_j = n$, а на остальных интервалах полагаем $\hat{N}_{ij}^{p+1} = -\hat{N}_{ij}^p$, $p = \overline{k_j, r_j - 1}$. Отсюда

$$\hat{N}_{ij}^{p+1} = (-1)^{p-k_j} \hat{N}_{ij}^{k_j}, \quad p = \overline{k_j, r_j - 1}.$$

В результате из (3.19) получаем n систем, каждая из которых состоит из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных весовых коэффициентов \hat{N}_{ij}^p

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{k_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + \sum_{p=k_j+1}^{r_j} (-1)^{p-k_j} \hat{N}_{ij}^{k_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau \right\} + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.22}$$

Итак, задав произвольно моменты переключений, решаем системы линейных алгебраических уравнений (3.22) и находим весовые коэффициенты. Формируем по формуле (3.20) квазиоптимальное управление. Структура квазиоптимального управления совпадает со структурой искомого оптимального управления. На этом свойстве и основано использование квазиоптимального управления для нахождения знаков управляющих воздействий для каждой компоненты вектора искомого оптимального управления.

3.5. Отклонение фазовой траектории от начала координат. Пусть заданы все приближенные значения моментов переключений t_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. Управляемая система (2.1) переводится в некоторую точку фазового пространства, которая отклоняется от начала координат на величину

$$\Delta \hat{x}(t_k) = \Phi(t_k, t_0) x(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau, \tag{3.23}$$

где $S_j(p)$ – знак управления на p интервале знакопостоянства j компоненты вектора управления. Это отклонение должно быть скомпенсировано соответствующим изменением моментов переключений управления.

3.6. Вариация моментов переключений управления. Изменение t_j^α на величину Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ вызывает следующее отклонение фазовых координат в конечный момент времени $t = t_k$ для кусочно-постоянного управления $u_j^p(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени $t = t_j^\alpha$, $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ и принимают значения $u_j^p(t) = M_j S_j(p)$, $t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}]$, $p = \overline{1, r_j}$:

$$\Delta \tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \int_{t_j^\alpha}^{t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) d\tau. \tag{3.24}$$

Параметры p и α связаны соотношением $p = E(\alpha/2 + 1)$, $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, где $E(\cdot)$ — целая часть числа.

Если Δt_j^α достаточно малы (а это, как показано ниже, всегда достижимо), то получаем приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю Δt_j^α

$$\Delta \tilde{x}(t_k) \approx \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha. \quad (3.25)$$

3.7. Уравнение баланса отклонений. Отклонения фазовых координат (3.23), порождаемые неточным заданием моментов переключений, должны быть скомпенсированы соответствующим изменением моментов переключений, т.е. должно выполняться уравнение баланса отклонений: $\Delta \tilde{x}(t_k) + \Delta \hat{x}(t_k) = 0$. Подставив в это уравнение выражения (3.23) и (3.25), получим систему из n линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha + \Delta \hat{x}(t_k) = 0. \quad (3.26)$$

Число неизвестных Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ в (3.26) может быть больше числа уравнений, однако только n из них являются независимыми переменными. Выше отмечалось, что с помощью сопряженной системы заданием n моментов переключений однозначно задаются все остальные моменты переключений на интервале $[t_0, t_k]$. Поэтому для нахождения оптимального управления (а не просто допустимого управления) необходимо перейти к определению моментов переключений с помощью сопряженной системы. С этой целью установим связь между отклонениями Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ моментов переключений и отклонениями $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ начальных условий сопряженной системы. Число последних равно n . В результате получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

3.8. Связь между отклонениями моментов переключений управления и отклонениями начальных условий сопряженной системы. Изменим $\psi(t_0)$ на $\Delta \psi(t_0)$. Это порождает изменение t_j^α на Δt_j^α :

$$[B_j(t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha, t_0)]^* (\psi(t_0) + \Delta \psi(t_0)) - R_j = 0, \quad (3.27)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}.$$

Разложим полученное выражение в ряд Тейлора и ограничимся лишь линейными членами:

$$\left[B_j(t_j^\alpha) + \overline{\Delta t_j^\alpha} \frac{dB_j(t_j^\alpha)}{dt} \right]^* \left[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) + \overline{\Delta t_j^\alpha} \frac{d\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)}{dt} \right]^* (\psi(t_0) + \Delta \psi(t_0)) - R_j = 0, \quad (3.28)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}.$$

Здесь $\overline{\Delta t_j^\alpha}$ — диагональная матрица ($n \times n$) с элементом Δt_j^α на диагонали. Отметим, что $\Phi^{-1}(t, t_0) = [\widehat{\Phi}(t, t_0)]^*$, где $\widehat{\Phi}(t, t_0)$ — фундаментальная матрица

решения сопряженного уравнения $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$, которая находится из решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\widehat{\Phi}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t)\widehat{\Phi}(t, t_0), \quad \widehat{\Phi}(t_0, t_0) = I. \quad (3.29)$$

Запишем (3.28), учитывая (3.29), в следующем виде:

$$\begin{aligned} & [B_j(t_j^\alpha)]^*[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\psi(t_0) + [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^*[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\psi(t_0)\Delta t_j^\alpha - \\ & - [B_j(t_j^\alpha)]^*A^*(t_j^\alpha)[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\psi(t_0)\Delta t_j^\alpha - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^*A^*(t_j^\alpha)[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\psi(t_0)(\Delta t_j^\alpha)^2 + \\ & + [B_j(t_j^\alpha)]^*[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\Delta\psi(t_0) + [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^*[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\Delta\psi(t_0)\Delta t_j^\alpha - \\ & - [B_j(t_j^\alpha)]^*A^*(t_j^\alpha)[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\Delta\psi(t_0)\Delta t_j^\alpha - \\ & - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^*A^*(t_j^\alpha)[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\Delta\psi(t_0)(\Delta t_j^\alpha)^2 - R_j = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \end{aligned}$$

Пренебрегая величинами второго и более высокого порядка малости и учитывая (3.27), получим приближенное уравнение, связывающее Δt_j^α и $\Delta\psi(t_0)$:

$$\begin{aligned} & \left\{ [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^*[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\psi(t_0) - [B_j(t_j^\alpha)]^*A^*(t_j^\alpha)[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\psi(t_0) \right\} \Delta t_j^\alpha + \\ & + [B_j(t_j^\alpha)]^*[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\Delta\psi(t_0) \approx 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Из (3.30) находим приближенное соотношение, посредством которого каждое Δt_j^α , $j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ выражается через $\Delta\psi(t_0)$:

$$\begin{aligned} \Delta t_j^\alpha & \approx \left\{ \left\{ [B_j(t_j^\alpha)]^*A^*(t_j^\alpha) - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* \right\} [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\psi(t_0) \right\}^{-1} \cdot \\ & \cdot [B_j(t_j^\alpha)]^*[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\Delta\psi(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Запишем соотношение (3.31) в компактном виде

$$\Delta t_j^\alpha \approx L(t_j^\alpha)\Delta\psi(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (3.31)'$$

Следует отметить, что, несмотря на кажущуюся сложность, выражение (3.31) имеет простой вид благодаря матрицам размера $(1 \times n)$ и $(n \times 1)$, входящим в это выражение.

3.9. Основное уравнение. Подставив (3.31)' в (3.26), получим основную систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $\Delta\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) L(t_j^\alpha) \Delta\psi(t_0) + \Delta\widehat{x}(t_k) = 0. \quad (3.32)$$

Решив (3.32), находим $\Delta\psi(t_0)$. По формуле (3.31) вычисляем отклонения Δt_j^α , на которые следует изменить каждый из моментов переключений, чтобы уменьшить в конечный момент отклонение от начала координат фазовой траектории движения системы (2.1). Приближенность выражений (3.25) и (3.31) приводит к итерационной процедуре нахождения оптимального управления.

Отклонение $\Delta\widehat{x}(t_k)$ может быть значительным и для его компенсации необходимы большие отклонения моментов переключений Δt_j^α , $j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. В силу линеаризации и приближенности полученных соотношений

возможна расходимость вычислительного процесса. Оценить "малы" или "велики" отклонения $\Delta\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ и гарантируется ли сходимость вычислительного процесса весьма сложно. Более просто судить о сходимости вычислительного процесса по величине максимального отклонения момента переключения по сравнению с заданным временем управления. Если $\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha| \leq \gamma T$, где γ задано ($0 < \gamma \ll 1$), то отклонения моментов переключений достаточно малы и гарантируется сходимость вычислительного процесса. В противном случае компенсируем отклонение $\Delta\hat{x}(t_k)$ не сразу полностью, а по частям, беря лишь ξ -ю часть отклонения $\Delta\hat{x}(t_k)$, полагая

$$\xi = \frac{\gamma T}{\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha|}. \quad (3.33)$$

Таким образом, если окажется, что $\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha| > \gamma T$, то ограничиваем максимальное отклонение предельным значением, т.е. принимаем $\max_{j, \alpha} |\Delta \tilde{t}_j^\alpha| = \gamma T$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в ξ раз, т.е. полагаем

$$\Delta \tilde{t}_j^\alpha = \xi \Delta t_j^\alpha, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, \quad \Delta \tilde{\psi}(t_0) = \xi \Delta \psi(t_0). \quad (3.34)$$

Здесь $\Delta\psi(t_0)$, Δt_j^α - вычисленные значения из уравнений (3.32) и (3.31) соответственно; $\Delta \tilde{\psi}(t_0)$, $\Delta \tilde{t}_j^\alpha$ - значения отклонений, которые реально принимаются для последующих расчетов. Такой подход обеспечивает сходимость итерационного вычислительного процесса для любых начальных условий из области управляемости. Доказательство сходимости вычислительного процесса аналогично [9].

3.10. Изменение момента включения управления. Если управляемая система имеет комплексно-сопряженные собственные значения с отрицательными вещественными частями и заданное время перевода T значительно больше времени оптимального быстрогодействия T_0 , то в итерационном процессе вычисления оптимального по расходу ресурса управления возникает ситуация, когда функция переключений $|[B_j(t)]^* \psi(t)| < 1$ на интервале $t \in [t_0, t_j^*)$. В момент $t = t_j^*$ имеем $|[B_j(t_j^*)]^* \psi(t_j^*)| = 1$. Следовательно, $u(t) \equiv 0$ на интервале $t \in [t_0, t_j^*)$, а момент $t = t_j^*$ это момент включения управления. Ранее принималось, что $t = t_0$ - момент включения управления. Изменение момента включения управления требует соответственно изменения расчетных выражений. Следует перейти к следующим соотношениям. Основное уравнение (3.32) теперь запишем так:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2r_j-1} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^\alpha M_j S_j(p) L(t_j^\alpha) \Delta \psi(t_0) + \Delta \hat{x}(t_k) = 0. \quad (3.32)'$$

Параметры p и α теперь связаны так: $p = E(1/2(\alpha + 1))$, $\alpha = \overline{1, 2r_j - 1}$, где $E(\cdot)$ - целая часть числа. Приближенное выражение (3.31) для каждого Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2r_j - 1}$ остается без изменений. Выражение (3.23) следует записать теперь так:

$$\Delta \hat{x}(t_k) = \Phi(t_k, t_0) x(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2p-1}}^{t_j^{2p}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau. \quad (3.23)'$$

Выражение (3.19) следует заменить на (3.19)′:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{t_j^{2p-1}}^{t_j^{2p}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.19)'$$

Важно отметить работоспособность итерационного процесса вычисления оптимального по расходу ресурса управления, *если не производится вычисление структуры искомого оптимального управления с помощью квазиоптимального управления, а начальная структура управления задается произвольно и отличается от структуры оптимального управления.* Отметим особенности итерационного вычислительного процесса в этом случае.

1. Если заданная начальная структура управления отличается от искомого оптимального управления, то в итерационном процессе происходит сближение и пересечение моментов переключений. Пересечение двух моментов переключений означает, что в выражении (3.23) в соответствующем члене суммы слагаемых поменялись пределы интегрирования. Изменение пределов интегрирования влечет смену знака интегрального выражения, т.е. смену знака управления на этом интервале.

2. Если начальная структура управления не совпадает на нескольких интервалах знакопостоянства со структурой искомого оптимального управления, то смена знаков управления происходит не одновременно, а последовательно и в произвольном порядке чередования смен знаков управления.

3. Если в начальном приближении неправильно задан знак управления на первом интервале знакопостоянства, то в итерационном процессе первый момент переключения t_j^1 сближается и пересекает момент t_0 . Необходимо изменить знак управления на первом интервале.

4. Если в начальном приближении неправильно задан знак управления на последнем интервале, то в итерационном процессе вычисления оптимального управления происходит сближение и пересечение последнего момента переключения t_j^α с моментом T . Это команда на изменение знака управления на последнем интервале.

5. Если начальное условие $x(t_0)$ находится на многообразии переключений, то в итерационном процессе вычисления оптимального управления происходит сближение и "слипание" моментов переключений интервала, на котором управление равно нулю. В результате уменьшается количество (число) интервалов оптимального управления.

6. Моменты переключений управления на каждой итерации задаются с помощью сопряженной системы заданием новых начальных условий. Поэтому с изменением на каждой итерации начального условия $\psi(t_0)$ изменяются сразу все моменты переключений управления. Система очень чувствительна к изменению начального условия $\psi(t_0)$. Поэтому для обеспечения сходимости вычислительного процесса параметр γ должен быть весьма малым (порядка $10^{-2} - 10^{-3}$). Однако с уменьшением γ существенно увеличивается число итераций. При поиске оптимального управления происходит многократное перемещение по оси времени всех моментов переключений и поэтому сходимость по норме не является монотонной.

7. Начальное неправильное задание структуры искомого оптимального управления требует многократной прогонки моментов переключений по оси времени

с целью сближения и пересечения моментов переключений на тех интервалах, на которых знаки управления заданы неверно. Это существенно увеличивает трудоемкость вычислительного алгоритма.

8. Если начальная структура управления задана неверно, то даже точное задание моментов переключений не освобождает от необходимости многократной прогонки моментов переключений по оси времени для сближения и пересечения моментов переключений с целью восстановления правильных значений знаков управления на тех интервалах, на которых знаки управления заданы неверно.

9. Суммарная длительность управляющих воздействий прямо пропорциональна расходу ресурса ($J(u) = M \Sigma \Delta t_i, i \in I$) и уменьшается по мере увеличения времени перевода T .

10. Квазиоптимальное управление позволяет сразу определить структуру искомого оптимального управления и резко сократить число итераций для его вычисления.

3.11 Задание начального приближения. Задание хорошего начального приближения существенно уменьшает вычислительные затраты и улучшает сходимость вычислительного процесса. Предлагаемый метод состоит из двух этапов: I. Задание квазиоптимального управления; II. Задание начального условия сопряженной системы. Рассмотрим метод для случая скалярного управления.

Этап I. Задание квазиоптимального управления. Зададим произвольно $(2n - 1)$ моментов переключений искомого оптимального по расходу ресурса управления $t^i, i = \overline{1, 2n - 1}$, где n - порядок системы; t^1 - момент включения управления ($t^1 \geq t_0$). При задании важно иметь ввиду следующее. Суммарная длительность всех ненулевых интервалов управления прямо пропорциональна расходу ресурса: $J(u) = \sum_{p=1}^n (t^{2p} - t^{2p-1}) M$. Расход ресурса уменьшается с ростом T . Поэтому длительность интервалов с управлением $u = \pm M$ уменьшается по мере увеличения заданного времени T , каждый последующий импульс, как правило, меньше предыдущего и заканчивается последовательность обязательно импульсом на интервале $t \in [t^{2n-1}, T]$, так как с $u(t) \equiv 0, t \in [t^{2n-1}, T]$ принципиально невозможен переход в начало координат. Экономия расхода ресурса осуществляется за счет увеличения длительности интервалов с нулевым управлением $u(t) \equiv 0, t \in [t^{2p-2}, t^{2p-1}], p = \overline{1, n}$ и, в частности, первого интервала $t \in [t_0, t^1]$, на котором управление равно нулю. С увеличением T управляющие воздействия смещаются на вторую половину интервала $t \in [t_0, t_k]$.

Итак, задали $(2n - 1)$ моментов переключений. Вычисляем квазиоптимальные управляющие воздействия $u_{kv}^1, u_{kv}^2, \dots, u_{kv}^n$. Выравниваем их до значений, которые находятся в окрестности предельных значений $\pm M$, следующим образом. Если $|u_{kv}^i| < M$, то уменьшаем длительность i -го интервала. Если $|u_{kv}^i| > M$, то увеличиваем длительность i -го интервала. Путем изменения расположения воздействий $u_{kv}^i, i = \overline{1, n - 1}$ (т.е. кроме последнего) добиваемся выполнения условия: $\|x(t_k)\| \ll \|x^0(t_k)\|$. Здесь $\|x^0(t_k)\|$ - норма в конечный момент при свободном движении системы (2.1) (т.е. при $u(t) \equiv 0$); $\|x(t_k)\|$ - норма в конечный момент при предельных значениях управляющих воздействий, т.е. $u_{kv}^i = M \operatorname{sign} u_{kv}^i, i = \overline{1, n}$. Получили последовательность управляющих

воздействий $u_{kv}^1, u_{kv}^2, \dots, u_{kv}^n$, величины которых по модулю близки к предельному значению M . Система (2.1) переводится таким квазиоптимальным управлением в начало координат $x(t_k) = 0$, а при замене на предельные значения - в некоторую окрестность начала координат. Первый этап закончен.

Этап II. Задание начальных условий сопряженной системы. Проведем функцию переключений управления $[B(t)^*[\Phi^{-1}(t, t_0)]^*\psi(t_0)]$ через следующие n точек: $t^1, \tau^1, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$. Здесь: t^1 - найденный выше первый момент переключения (включения) управления; $\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$ - следующие "срединные" точки на интервалах с нулевым управлением: $\tau^1 = 0.5(t^3 + t^2)$; $\tau^2 = 0.5(t^5 + t^4)$; $\tau^3 = 0.5(t^7 + t^6)$ и т.д. Начальные условия сопряженной системы $\psi_i(t_0), i = \overline{1, n}$ вычисляем из следующей системы из n линейных алгебраических уравнений относительно n начальных условий:

$$[B(t^1)^*[\Phi^{-1}(t^1, t_0)]^*\psi(t_0) = R,$$

$$[B(\tau^1)^*[\Phi^{-1}(\tau^1, t_0)]^*\psi(t_0) = 0,$$

.....

$$[B(\tau^{n-1})^*[\Phi^{-1}(\tau^{n-1}, t_0)]^*\psi(t_0) = 0.$$

Здесь $R = \pm 1$ и в силу симметрии можно задавать любое значение. Вычислив $\psi(t_0)$, с помощью функции переключений находим все моменты переключений на интервале $t \in [t_0, t_k]$. Число полученных моментов переключений, как правило, будет меньше $(2n - 1)$. Сдвигая моменты $t^1, \tau^1, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$ необходимо добиться прохождения функции переключения в *окрестности* найденных на первом этапе моментов переключений $t^1, t^2, \dots, t^{(2n-1)}$. При варьировании точек $t^1, \tau^1, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$ следует иметь ввиду следующее:

- сдвиг t^1 на Δt по оси времени *влево* приводит к увеличению длительности всех ненулевых интервалов постоянства управления, но это увеличение различно: первый интервал знакопостоянства $[t^1, t^2]$ увеличивается примерно на $1.5 \Delta t$; второй интервал $[t^3, t^4]$ - на $\sim \Delta t$; третий интервал $[t^5, t^6]$ - $\sim 0.3 \Delta t$ и т.д. Увеличиваются (по модулю) максимумы и минимумы функции переключения, что позволяет добиться пересечения со значениями ± 1 ;

- сдвиг t^1 на Δt по оси времени *вправо*, наоборот, приводит к уменьшению длительности каждого из интервалов управления. Уменьшаются абсолютные значения локальных максимумов и минимумов функции переключения и возможно исчезновение некоторых моментов переключений;

- сдвиг точек $\tau^i, i = \overline{1, n-1}$ влияет на изменение положения практически только *ближайших* моментов переключений и практически не влияют на изменение положения остальных моментов переключения. Так сдвиг точки τ^1 влияет на моменты t^2 и t^3 ; сдвиг τ^2 - на моменты t^4 и t^5 ; сдвиг τ^3 - на моменты t^6 и t^7 и т.д. Сдвиг $\tau^i, i = \overline{1, n-1}$ на Δt влево приводит к смещению влево на Δt соответствующих ближайших моментов переключений. И наоборот, смещение на Δt вправо приводит к смещению на Δt вправо соответствующих ближайших моментов переключений.

На рис. 2 показан типичный вид функции переключений $[B(t)]^*\psi(t)$ для системы четвертого порядка после первого этапа. Функция переключений проходит через четыре заданные точки $t^1, \tau^1, \tau^2, \tau^3$, но на интервале $t \in [\tau^1, \tau^2]$ нет пересечений с прямой $R = 1$, т.е. отсутствуют моменты переключений t^3 и t^4 . Для их возникновения необходим в первую очередь сдвиг влево точек t^1 и τ^1 .

Следует отметить, что возможна ситуация, когда при вычислении моментов переключений управления появляется момент $t^{1*} < t^1$. В этом случае следует принять t^{1*} за новый *первый* момент переключений управления.

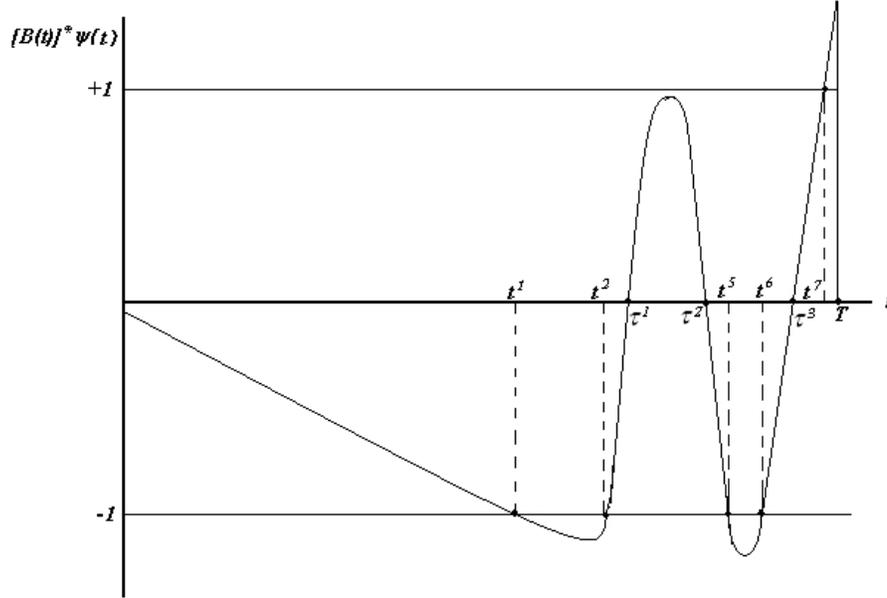


Рис. 2. Функция переключений и моменты переключений управления

4. ПЕРЕВОД СИСТЕМЫ В НЕНУЛЕВОЕ КОНЕЧНОЕ СОСТОЯНИЕ

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u, \quad y(t_0) = y_0, \quad y_0 \in D, \quad D \subset V, \quad (4.1)$$

где y — n -мерный вектор фазового состояния системы. Компоненты вектора управления подчинены ограничениям

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.2)$$

Ставится задача: найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за фиксированное время $T = t_k - t_0$ (где $T \geq T_0$) систему (4.1) из начального состояния $y(t_0) = y_0$ в ненулевое конечное состояние $y(t_k) = y_k$ и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau. \quad (4.3)$$

Здесь T_0 - время оптимального по быстродействию перевода системы.

Выпишем решение системы (4.1) в конечный момент времени $t = t_k$ при переводе системы в ненулевое конечное состояние $y(t_k) = y_k$ для кусочно-постоянного управления $u(t)$, компоненты которого переключаются в моменты

времени $t_j^p, j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j}$, и принимают значения $u_j(t) = u_j^p, t \in [t_j^{p-1}, t_j^p]$, где $t_j^0 = t_0, t_j^{r_j} = t_k$:

$$y(t_k) = \Phi(t_k, t_0)y(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{p-1}}^{t_j^p} \Phi(t_k, \tau)B_j(\tau)u_j^p d\tau. \quad (4.4)$$

Представим (4.4) в следующем виде

$$0 = \Phi(t_k, t_0) \left[y(t_0) - \Phi^{-1}(t_k, t_0)y(t_k) \right] + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{p-1}}^{t_j^p} \Phi(t_k, \tau)B_j(\tau)u_j^p d\tau. \quad (4.5)$$

Здесь $x_0 = \left[y(t_0) - \Phi^{-1}(t_k, t_0)y(t_k) \right]$ – новое (преобразованное) начальное условие. В результате приходим к задаче перевода системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_k) = 0, \quad (4.6)$$

из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$. Ограничение (4.2) на управление не изменяется. Перевод системы (4.6) в начало координат эквивалентен переводу системы (4.1) в ненулевое конечное состояние $y(t_k) = y_k$. Другими словами, найденное оптимальное управление $u^0(t)$, переводящее систему (4.6) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$, переводит систему (4.1) из начального состояния $y(t_0) = y_0$ в ненулевое конечное состояние $y(t_k) = y_k$.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Рассмотрим систему четвертого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(t_0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(t_0) &= x_{20}, \\ \dot{x}_3 &= x_4, & x_3(t_0) &= x_{30}, \\ \dot{x}_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + bu, & x_4(t_0) &= x_{40}, \quad |u| \leq M. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Исследуем влияние собственных чисел матрицы A и времени перевода на структуру оптимального по расходу ресурса управления.

1. Комплексно-сопряженные собственные значения матрицы A с отрицательными действительными частями

Система (5.1) при $a_{41} = -2,9694; a_{42} = -5,84; a_{43} = -6,33; a_{44} = -3,4$ имеет следующие комплексно-сопряженные собственные значения матрицы A : $\lambda_{1,2} = -0,784 \pm j 0,986; \lambda_{3,4} = -0,916 \pm j 1,016$. Принято $b = 4, M = 5$. Пусть задано $x(t_0) = (3, -2, -5, 1)$. Оптимальное по быстродействию управление имеет структуру $[+M, -M, +M, -M]$ и следующие значения моментов переключений: $\nu_1 = 1.200803; \nu_2 = 2.128937; \nu_3 = 2.732904; t_k = 2.946287$. Время оптимального быстродействия $T_0 = 2.946287$. Расход ресурса при оптимальном по быстродействию управлении максимальный и равен $J(u) = T_0 M = 2.946287 M$. Найдем оптимальные по расходу ресурсов управления для различных значений времени перевода T .

Полагаем $T = 3.5$. Структура оптимального по расходу ресурса управления следующая: $[+M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$. Моменты переключений: $t^1 = 0.779318$; $t^2 = 1.805981$; $t^3 = 2.067329$; $t^4 = 2.954255$; $t^5 = 3.110692$; $t^6 = 3.429628$. Расход ресурса равен $J(u) = 1.267475 M$. Если $T = 5$, то структура оптимального по расходу ресурса управления уже следующая: $[0, +M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$, т.е. на первом интервале $u(t) \equiv 0$, $t \in [0, t^1]$. Первый момент $t = t^1$ включения управления уже не совпадает с начальным моментом времени $t = t_0$. Моменты переключений: $t^1 = 1.065005$; $t^2 = 1.138953$; $t^3 = 3.163655$; $t^4 = 3.311101$; $t^5 = 4.461648$; $t^6 = 4.545448$; $t^7 = 4.951479$. Расход ресурса равен $J(u) = 0.353715 M$. Для $T = 5.3$ структура оптимального по расходу ресурса управления уже отличается и следующая: $[0, -M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$. Знаки управления на втором и четвертом интервалах одинаковые ($-M$), т.е. имеем вырожденное управление. Моменты переключений следующие: $t^1 = 1.387498$; $t^2 = 1.431721$; $t^3 = 3.481921$; $t^4 = 3.607440$; $t^5 = 4.775076$; $t^6 = 4.845294$; $t^7 = 5.257876$. Расход ресурса равен $J(u) = 0.282084 M$. Для $T = 6$ структура оптимального по расходу ресурса управления остается прежней: $[0, -M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$. Моменты переключений следующие: $t^1 = 2.056035$; $t^2 = 2.216721$; $t^3 = 4.242381$; $t^4 = 4.299241$; $t^5 = 5.519230$; $t^6 = 5.547989$; $t^7 = 5.980441$. Расход ресурса равен $J(u) = 0.265864 M$, что в 11 раз меньше, чем при оптимальном по быстродействию управлении. На рис. 3 приведены оптимальные по расходу ресурса управления для четырех рассмотренных значений T .

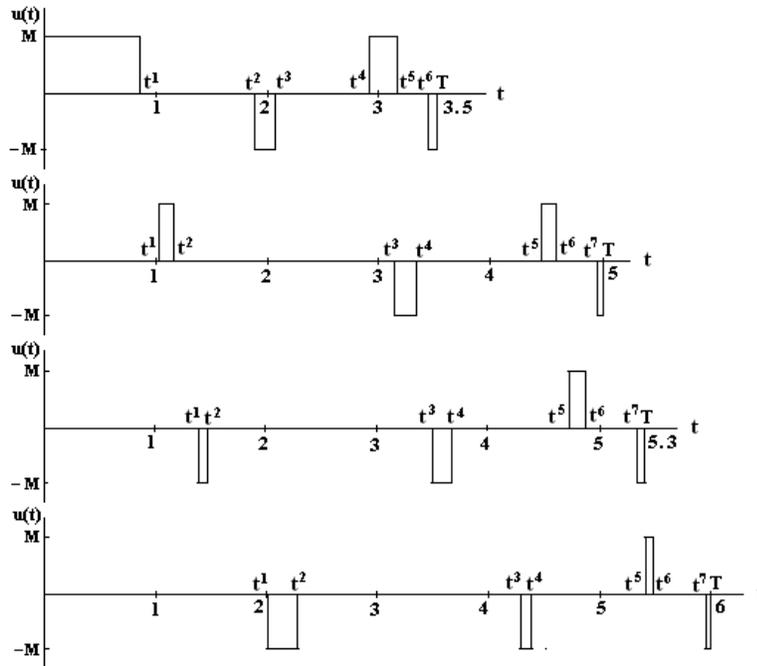


Рис. 3. Оптимальные по расходу ресурса управления при различных T

Рассмотрим другое начальное условие $x(t_0) = (-5, 7, -1, 3)$. Оптимальное по быстродействию управление имеет структуру $[-M, +M, -M, +M]$ и следующие значения моментов переключений: $\nu_1 = 1.311227$; $\nu_2 = 2.311471$; $\nu_3 = 2.978703$; $t_k = 3.221102$. Время оптимального быстродействия $T_0 = 3.221102$. Расход ресурса при оптимальном по быстродействию управлении максимальный и равен $J(u) = T_0 M = 3.221102 M$.

Найдем оптимальные по расходу ресурсов управления для различных значений времени перевода T . Пусть $T = 4$. Оптимальное по расходу ресурса управление имеет структуру $[-M, 0, +M, 0, -M, 0, +M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.727160$; $t^2 = 2.198711$; $t^3 = 2.388555$; $t^4 = 3.443573$; $t^5 = 3.566466$; $t^6 = 3.936927$. Расход ресурса равен $J(u) = 1.10297 M$, что почти в три раза меньше, чем при оптимальном по быстродействию управлении. Управление включается в момент $t = t_0$.

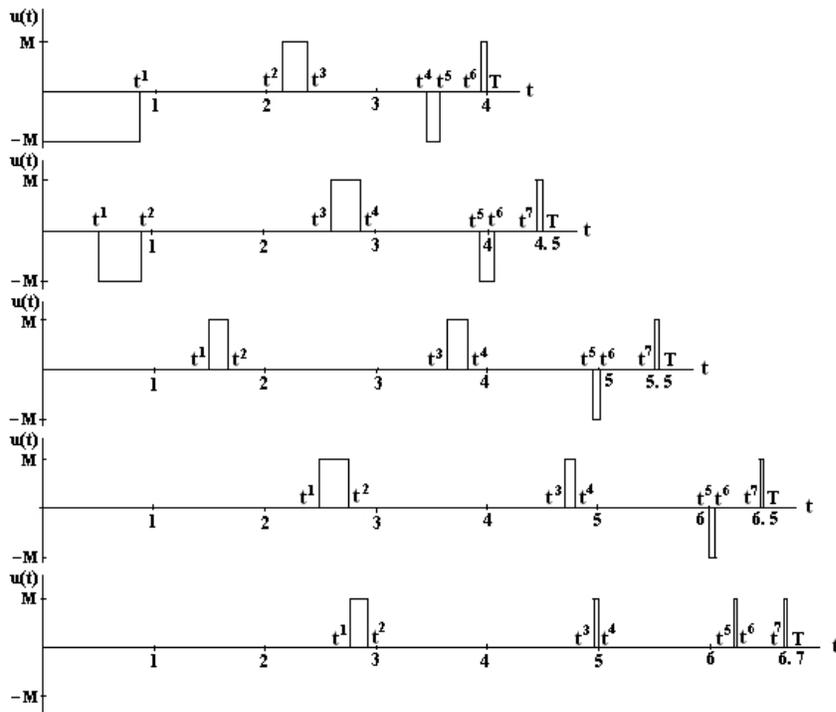


Рис. 4. Оптимальные по расходу ресурса управления при различных T

Пусть $T = 4.5$. Оптимальное по расходу ресурса управление имеет уже структуру $[0, -M, 0, +M, 0, -M, 0, +M]$, т.е. на первом интервале $u(t) \equiv 0$, $t \in [0, t^1)$. Моменты переключений: $t^1 = 0.392813$; $t^2 = 0.806699$; $t^3 = 2.646628$; $t^4 = 2.820824$; $t^5 = 3.939427$; $t^6 = 4.048564$; $t^7 = 4.440475$. Расход ресурса равен $J(u) = 0.756744 M$. При $T = 5.5$ имеем вырожденное управление, т.е. структура оптимального по расходу ресурса управления уже следующая: $[0, +M, 0, +M, 0, -M, 0, +M]$. Управление на втором интервале $t \in [t^1, t^2]$ изменило знак и теперь $u(t) = +M$. Знаки управлений на втором и четвертом интервалах не чередуются и одинаковые (плюс). Моменты переключений следующие: $t^1 = 1.555529$; $t^2 = 1.667055$; $t^3 = 3.685045$; $t^4 = 3.807696$; $t^5 = 4.978181$; $t^6 = 5.044374$;

$t^7 = 5.458733$. Расход ресурса равен $J(u) = 0.341637 M$. При $T = 6.5$ структура управления сохраняет прежний вид $[0, +M, 0, +M, 0, -M, 0, +M]$. Имеем $t^1 = 2.565862$; $t^2 = 2.735804$; $t^3 = 4.774838$; $t^4 = 4.795379$; $t^5 = 6.044687$; $t^6 = 6.050149$; $t^7 = 6.494113$. Расход ресурса равен $J(u) = 0.201832 M$. Однако уже при $T = 6.7$ управление на интервале $t \in [t^5, t^6]$ меняет знак и структура вырожденного оптимального управления следующая: $[0, +M, 0, +M, 0, +M, 0, +M]$, т.е. все управляющие воздействия $+M$. Моменты переключений: $t^1 = 2.779485$; $t^2 = 2.931333$; $t^3 = 4.985922$; $t^4 = 4.993364$; $t^5 = 6.251155$; $t^6 = 6.253188$; $t^7 = 6.698947$. Расход ресурса равен $J(u) = 0.162376 M$, что почти в 20 раз меньше чем при оптимальном по быстродействию управлении. На рис. 4 приведены оптимальные по расходу ресурса управления для пяти рассмотренных значений T .

Рассмотрим еще одно начальное условие, для которого оптимальное по быстродействию управление имеет число переключений больше чем $(n - 1)$. Для $x(t_0) = (75, -2, -5, 1)$ число переключений оптимального по быстродействию управления уже равно четырем: $\nu_1 = 0.137087$; $\nu_2 = 3.867525$; $\nu_3 = 4.769186$; $\nu_4 = 5.413588$. Время оптимального быстродействия $T_0 = 5.603694$. Структура оптимального по быстродействию управления: $[-M, +M, -M, +M, -M]$. Расход ресурса равен $J(u) = T_0 M = 5.603694 M$. Найдем расход ресурса для различных значений времени перевода T .

Полагаем $T = 6$. Оптимальное по расходу ресурса управление имеет структуру $[0, +M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 1.032026$; $t^2 = 3.516890$; $t^3 = 4.235547$; $t^4 = 4.669344$; $t^5 = 5.302029$; $t^6 = 5.651084$; $t^7 = 5.863432$. Расход ресурса равен $J(u) = 3.404284 M$, что в 1.646 раза меньше, чем при оптимальном по быстродействию управлении. Интересно следующее: 1) управление на первом интервале $[t_0, t^1]$ равно нулю, хотя заданное время перевода T близко к T_0 ; 2) длительность первого нулевого интервала $[t_0, t^1]$ весьма существенна; 3) последовательность знаков оптимального по расходу ресурса управления $[0, +M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$ не совпадает со знаками оптимального по быстродействию управления; 4) число интервалов знакопостоянства управления равно четырем, хотя для быстродействия равно пяти.

Принимаем $T = 7$. Оптимальное по расходу ресурса управление имеет структуру $[0, +M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 2.684094$; $t^2 = 3.383843$; $t^3 = 5.005921$; $t^4 = 5.344153$; $t^5 = 6.325707$; $t^6 = 6.542519$; $t^7 = 6.881688$. Расход ресурса равен $J(u) = 1.373105 M$. Для $T = 7.5$ оптимальное по расходу ресурса управление сохраняет предыдущую структуру $[0, +M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$ и имеет следующие значения моментов переключений: $t^1 = 3.498718$; $t^2 = 3.573625$; $t^3 = 5.528376$; $t^4 = 5.821949$; $t^5 = 6.866383$; $t^6 = 7.033417$; $t^7 = 7.400594$. Расход ресурса составляет $J(u) = 0.63492 M$. Однако при $T = 8$ уже изменяется структура оптимального по расходу ресурса управления и становится следующей: $[0, -M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$. Моменты переключений равны: $t^1 = 3.955546$; $t^2 = 4.212559$; $t^3 = 6.124022$; $t^4 = 6.317156$; $t^5 = 7.434824$; $t^6 = 7.537085$; $t^7 = 7.933414$. Расход ресурса равен $J(u) = 0.618984 M$. Следует отметить, что управление является вырожденным, т.е. нет чередования знаков управляющих воздействий. Характерно, что перед сменой знака с $+M$ на $-M$ на первом интервале знакопостоянства управления длительность интервала резко уменьшается

и замедляется скорость уменьшения расхода ресурса при увеличении T . При $T = 8.5$ структура управления сохраняется и совпадает со структурой при $T = 8$: $[0, -M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$. Моменты переключений следующие: $t^1 = 4.461580$; $t^2 = 4.798042$; $t^3 = 6.720387$; $t^4 = 6.809168$; $t^5 = 8.004810$; $t^6 = 8.043729$; $t^7 = 8.469969$. Расход ресурса равен $J(u) = 0.494195 M$. На рис. 5 приведены: оптимальное по быстродействию управление с пятью интервалами знакопостоянства и рассмотренные выше оптимальные по расходу ресурса управления при различных T .

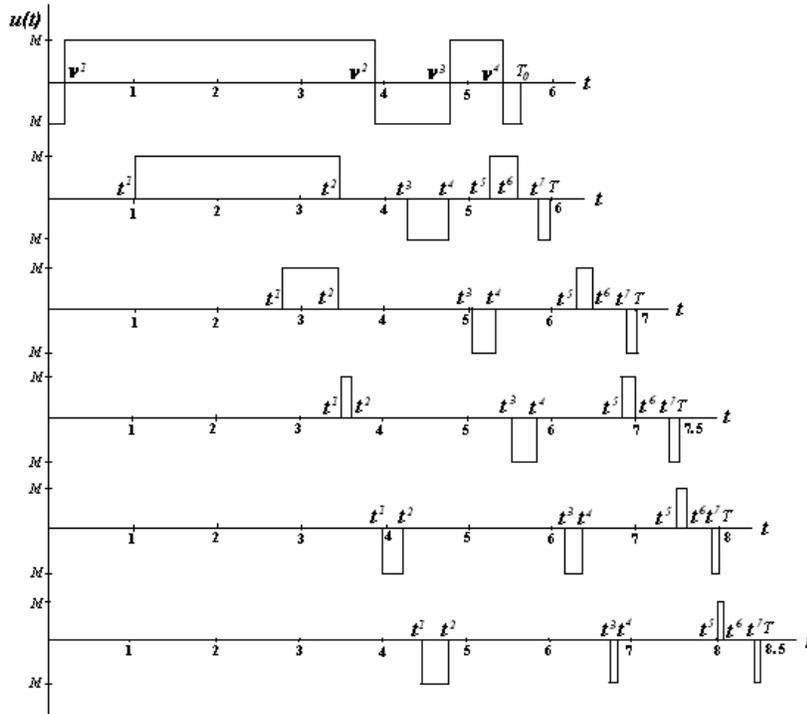


Рис. 5. Оптимальное по быстродействию и оптимальные по расходу ресурса управления при различных T

II. Собственные значения матрицы A нулевые

Система (5.1) при $a_{4i} = 0, i = \overline{1, 4}$ имеет нулевые собственные значения матрицы A . Рассмотрим структуру оптимального по расходу ресурсов управления в случае нулевых собственных значений $\lambda_i = 0, i = \overline{1, 4}$. Принимаем то же начальное условие $x(t_0) = (75, -2, -5, 1)$, для которого приведены зависимости на рис. 5. В случае нулевых собственных значений оптимальное по быстродействию управление имеет уже только *четыре* интервала знакопостоянства $[-M, +M, -M, +M]$ и следующие значения моментов переключений: $\nu_1 = 0.745248$; $\nu_2 = 2.677488$; $\nu_3 = 4.807805$ и переводится из $x(t_0) = (75, -2, -5, 1)$ в $x(t_k) = 0$ за время $T_0 = 5.701125$.

Полагаем $T = 6$, т.е. время перевода незначительно превышает T_0 . Оптимальное по расходу ресурса управление имеет структуру $[-M, 0, +M, 0, -M, 0, +M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.410612$; $t^2 =$

1.127131; $t^3 = 2.150861$; $t^4 = 3.524393$; $t^5 = 4.765249$; $t^6 = 5.422262$. Имеем чередование и совпадение знаков на ненулевых интервалах оптимального по расходу ресурса управления с оптимальным по быстродействию управлением. Для $T = 10$ имеем уже вырожденное управление $[+M, 0, +M, 0, -M, 0, +M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.008698$; $t^2 = 2.482035$; $t^3 = 2.487500$; $t^4 = 7.363548$; $t^5 = 7.512500$; $t^6 = 9.915211$. На первом интервале управление меняет знак с $-M$ на $+M$.

При $T = 12$ оптимальное по расходу ресурса управление является вырожденным и уже на втором интервале знакопостоянства меняет знак управления с $+M$ на $-M$ и имеет теперь такую структуру $[+M, 0, -M, 0, -M, 0, +M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.027263$; $t^2 = 2.983351$; $t^3 = 3.036819$; $t^4 = 8.943225$; $t^5 = 9.008351$; $t^6 = 11.958668$. При увеличении T структура оптимального управления не меняется и остается прежней $[+M, 0, -M, 0, -M, 0, +M]$. На рис. 6 приведены: оптимальное по быстродействию управление и рассмотренные выше оптимальные по расходу ресурса управления при различных T .

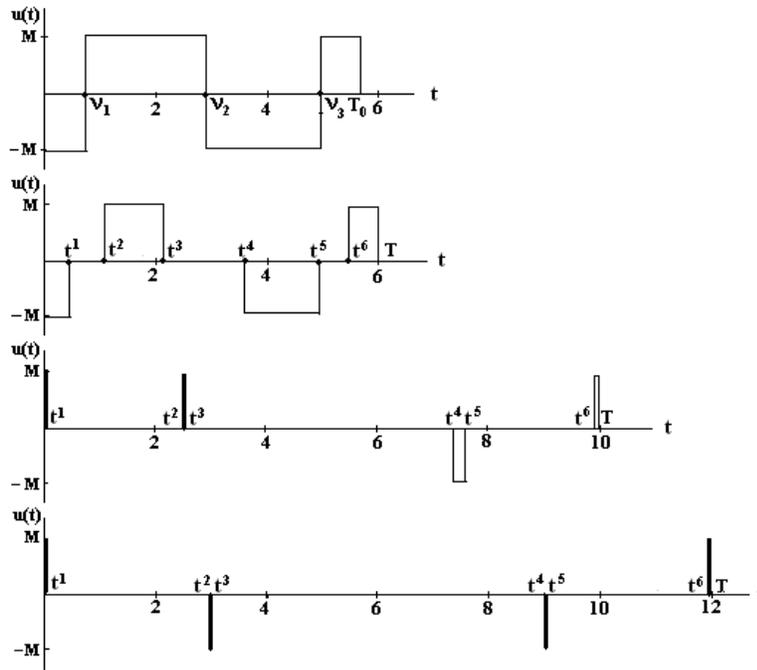


Рис. 6. Оптимальное по быстродействию и оптимальные по расходу ресурса управления при различных T

В случае нулевых собственных значений матрицы A не существует начальных условий, для которых структура управления начиналась бы с нулевого первого интервала в отличие от случая комплексно-сопряженных собственных значений с отрицательными вещественными частями.

III. Комплексно-сопряженные собственные значения матрицы A с положительными действительными частями

Представляет интерес исследовать структуру оптимального по расходу ресурса управления в зависимости от вида матрицы A и, в частности, при комплексно-сопряженных собственных значениях с положительными действительными частями. Полагаем $\lambda_{1,2} = 0,784 \pm j 0,986$; $\lambda_{3,4} = 0,916 \pm j 1,016$, т.е. по абсолютным значениям принимаем точно такими же как в первом случае матрицы A . Принимаем $a_{41} = -2,9694$; $a_{42} = 5,84$; $a_{43} = -6,33$; $a_{44} = 3,4$. Зададим то же начальное условие $x(t_0) = (3, -2, -5, 1)$, для которого в случае устойчивой системы структуры оптимальных управлений приведены на рис. 3. Теперь для неустойчивой системы оптимальное по быстродействию управление переводит систему (5.1) из этого начального состояния в начало координат за время $T_0 = 3.435486$. Управление имеет структуру $[+M, -M, +M, -M]$ и следующие значения моментов переключений: $\nu_1 = 0.199698$; $\nu_2 = 0.903418$; $\nu_3 = 2.743578$. Принимаем $T = 3.5$. Оптимальное по расходу ресурса управление имеет структуру $[+M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.160742$; $t^2 = 0.237465$; $t^3 = 0.820179$; $t^4 = 0.991661$; $t^5 = 2.635013$; $t^6 = 2.904806$. Для $T = 4$ оптимальное по расходу ресурса управление сохраняет структуру $[+M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$, но уже имеет моменты переключений $t^1 = 0.084505$; $t^2 = 0.304163$; $t^3 = 0.678456$; $t^4 = 1.166581$; $t^5 = 2.514639$; $t^6 = 3.387557$. Однако уже при для $T = 5$ имеем структуру $[+M, 0, -M, 0, +M, 0, -M, 0]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.048092$; $t^2 = 0.328981$; $t^3 = 0.617039$; $t^4 = 1.243430$; $t^5 = 2.449135$; $t^6 = 3.707703$; $t^7 = 4.481963$. Это означает, что на правом конце последовательности управляющих воздействий появляется нулевой интервал. Для $T = 6$ имеем ту же последовательность знаков $[+M, 0, -M, 0, +M, 0, -M, 0]$ и те же значения моментов переключений: $t^1 = 0.048092$; $t^2 = 0.328981$; $t^3 = 0.617039$; $t^4 = 1.243430$; $t^5 = 2.449135$; $t^6 = 3.707703$; $t^7 = 4.481963$. Для $T = 7$ и последующих значений имеем те же значения моментов переключений. Таким образом, начиная с некоторого $T \geq T^*$ имеем одни и те же значения моментов переключений. Здесь T^* - это такое заданное время перевода системы, при котором для данного начального условия на правом конце последовательности управляющих воздействий возникает нулевой интервал. В данном случае $T^* = t^7 = 4.481963$.

Важно отметить принципиальную особенность управления неустойчивой системой. Если система устойчива, то при увеличении T экономия расхода ресурса достигается за счет свободного движения вначале процесса, т.е. управляющие воздействия $\pm M$ смещаются на правый конец интервала $t \in [0, T]$, и уменьшаются длительности самих управляющих воздействий. Если система неустойчива, то управляющие воздействия $\pm M$, наоборот, смещаются на левый конец, т.е. воздействия осуществляются вначале процесса, а далее - свободное движение. Физически это объясняется тем, что фазовая траектория движения для устойчивой системы скручивается около начала координат, а для неустойчивой системы, наоборот, раскручивается. Поэтому устойчивой системой необходимо управлять в конце, чтобы обеспечить перевод строго в начало координат. Для неустойчивой системы, наоборот, необходимо управлять вначале и так, чтобы фазовая траектория свободного движения прошла "вблизи" начала координат.

Рассмотрим еще одно начальное условие $x(t_0) = (-1.5, +2, -0.5, 1)$. Оптимальное по быстродействию управление имеет структуру $[-M, +M, -M, +M]$,

переводит систему (5.1) в начало координат за время $T_0 = 3.400911$ и имеет следующие значения моментов переключений: $\nu_1 = 1.096024$; $\nu_2 = 1.545939$; $\nu_3 = 2.698512$. Зададим $T = 3.5$. Оптимальное по расходу ресурса управление имеет структуру $[-M, 0, +M, 0, -M, 0, +M]$ и следующие значения моментов переключений $t^1 = 0.997176$; $t^2 = 1.193512$; $t^3 = 1.371442$; $t^4 = 1.757887$; $t^5 = 2.597348$; $t^6 = 2.918632$. Принимаем $T = 4$.

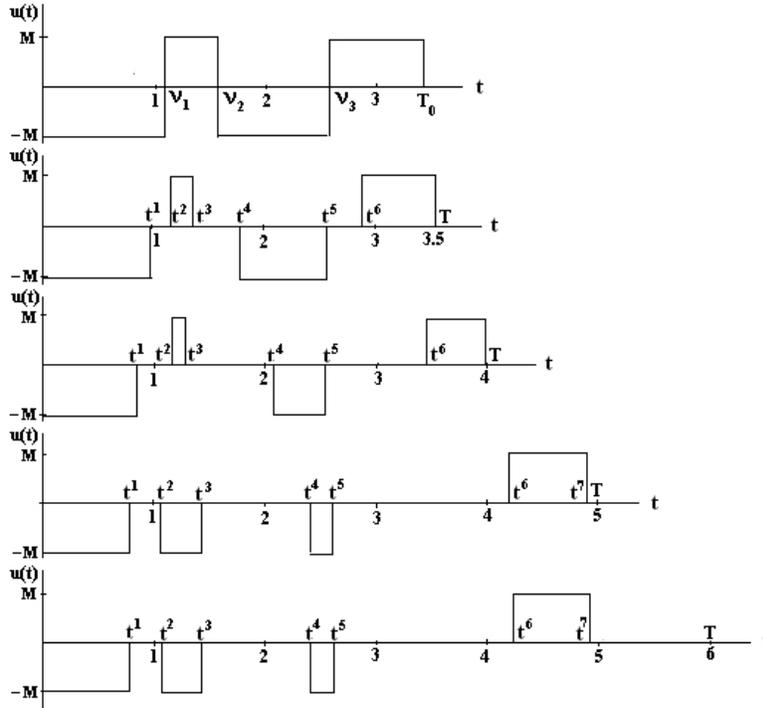


Рис. 7. Оптимальное по быстродействию и оптимальные по расходу ресурса управления при различных T

Оптимальное по расходу ресурса управление является вырожденным, имеет структуру $[-M, 0, -M, 0, -M, 0, +M]$ и следующие значения моментов переключений $t^1 = 0.867096$; $t^2 = 1.186762$; $t^3 = 1.316879$; $t^4 = 2.101336$; $t^5 = 2.589411$; $t^6 = 3.478152$. При $T = 5$ на правом конце появляется нулевой интервал. Структура оптимального по расходу ресурса управления теперь следующая $[-M, 0, -M, 0, -M, 0, +M, 0]$. Моменты переключений: $t^1 = 0.762358$; $t^2 = 1.057224$; $t^3 = 1.391108$; $t^4 = 2.379235$; $t^5 = 2.589504$; $t^6 = 4.243806$; $t^7 = 4.985503$. Время появления нулевого интервала $T^* = t^7 = 4.985503$. При $T = 6$ имеем ту же структуру и те же значения моментов переключений: $t^1 = 0.762358$; $t^2 = 1.057224$; $t^3 = 1.391108$; $t^4 = 2.379235$; $t^5 = 2.589504$; $t^6 = 4.243806$; $t^7 = 4.985503$. При дальнейшем увеличении T структура и моменты переключений управления остаются прежними. На рис. 7 приведены оптимальное по быстродействию и оптимальные по расходу ресурса управления для начального условия $x(t_0) = (-1.5, +2, -0.5, 1)$.

IV. Собственные значения матрицы A действительные отрицательные

Принимаем $\lambda_1 = -0.2$; $\lambda_2 = -0.5$; $\lambda_3 = -0.7$; $\lambda_4 = -1$. Этим собственным значениям соответствуют следующие коэффициенты матрицы A системы (5.1): $a_{41} = -0.07$; $a_{42} = -0.66$; $a_{43} = -1.99$; $a_{44} = -2.4$.

Пусть $x(t_0) = (3, -2, -5, 1)$. Это начальное условие уже рассматривалось выше для устойчивой и неустойчивой систем с комплексно-сопряженными корнями. (Структуры оптимального по расходу ресурса управления для устойчивой системы приведены на рис. 3.) Для этого начального условия система (5.1) с действительными отрицательными корнями переводится оптимальным по быстрдействию управлением в начало координат за время $T_0 = 3.712462$ и имеет следующие моменты переключений: $\nu_1 = 1.399335$; $\nu_2 = 2.673676$; $\nu_3 = 3.452907$. Структура оптимального по быстрдействию управления $[+M, -M, +M, -M]$.

Принимаем $T = 5$. Оптимальное по расходу ресурса управление имеет структуру $[+M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.856932$; $t^2 = 2.496811$; $t^3 = 2.798653$; $t^4 = 4.317549$; $t^5 = 4.449369$; $t^6 = 4.949584$. Для $T = 6$ структура сохраняется, но управление уже имеет следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.749825$; $t^2 = 3.251592$; $t^3 = 3.415039$; $t^4 = 5.315708$; $t^5 = 5.384613$; $t^6 = 5.973123$. По мере дальнейшего увеличения T структура управления сохраняется до $T^* = 9.695233$. При $T \geq T^*$ вначале последовательности управляющих воздействий появляется нулевой интервал. Так при $T = 9.7$ имеем следующую структуру оптимального по расходу ресурса управления: $[0, +M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.0238922$; $t^2 = 0.637686$; $t^3 = 6.601063$; $t^4 = 6.625497$; $t^5 = 8.999427$; $t^6 = 9.011124$; $t^7 = 9.695233$.

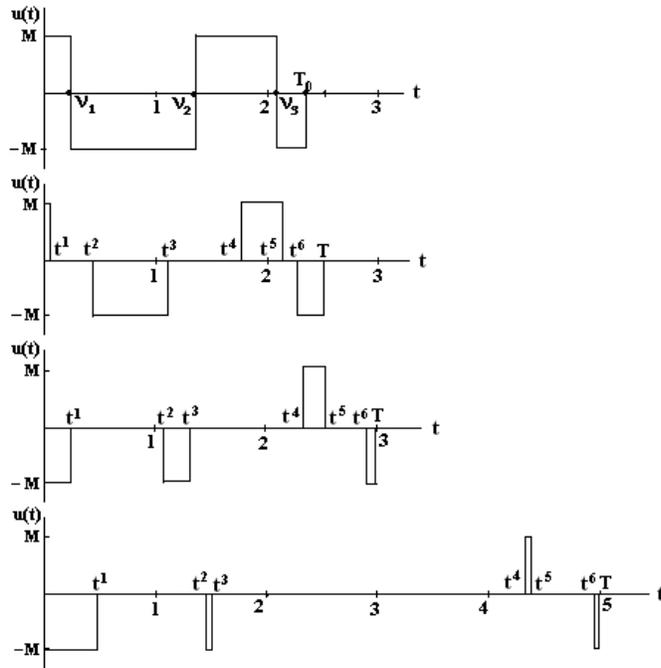


Рис. 8. Оптимальное по быстродействию и оптимальные по расходу ресурса управления при различных T

Рассмотрим другое начальное условие $x(t_0) = (-2, -1, 2, 7)$. Оптимальное по быстродействию управление переводит систему из этого начального состояния в начало координат за время $T_0 = 2.364408$ и переключается в следующие моменты: $\nu_1 = 0.213062$; $\nu_2 = 1.355749$; $\nu_3 = 2.108312$. Структура оптимального по быстродействию управления $[+M, -M, +M, -M]$. Пусть $T = 2.5$. Оптимальное по расходу ресурса управление имеет структуру $[+M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$ и переключается в следующие моменты: $t^1 = 0.014549$; $t^2 = 0.449611$; $t^3 = 1.169839$; $t^4 = 1.709088$; $t^5 = 2.139833$; $t^6 = 2.341230$. Принимаем $T = 3$. Управление вырождается и имеет структуру $[-M, 0, -M, 0, +M, 0, -M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.270911$; $t^2 = 1.080142$; $t^3 = 1.376796$; $t^4 = 2.349047$; $t^5 = 2.570162$; $t^6 = 2.910606$. При $T = 5$ длительность первого интервала знакопостоянства увеличивается, но существенно уменьшаются длительности остальных интервалов знакопостоянства управления. Расход ресурса уменьшается. На рис. 8 приведены: оптимальное по быстродействию управление (сверху) и оптимальные по расходу ресурса управления для приведенных значений T .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан общий метод вычисления оптимального по расходу ресурса управления, включающий как нормальное так и вырожденное решения задачи. Метод основан на разделении задачи на две независимые подзадачи: 1) вычисление структуры оптимального управления; 2) вычисление моментов переключений оптимального управления. Вычисление структуры основано на оригинальном методе формирования квазиоптимального управления, которое обладает целым рядом важных свойств. Структура квазиоптимального управления совпадает со структурой искомого оптимального управления. На этом свойстве и основано использование квазиоптимального управления для нахождения знаков управляющих воздействий для каждой компоненты вектора искомого оптимального управления. Вычисление моментов переключений управления основано на найденной связи между отклонениями начальных условий сопряженной системы с отклонениями фазовой траектории в конечный момент. Суммарная длительность управляющих воздействий прямо пропорциональна расходу ресурса и уменьшается по мере увеличения заданного времени перевода T . При вычислении моментов переключений оптимального управления на каждой итерации одновременно происходит изменение всех моментов переключений. Использование квазиоптимального управления позволяет сразу определить структуру искомого оптимального управления, что избавляет от многократной прогонки моментов переключений и существенно уменьшает число необходимых итераций. Задание хорошего начального приближения существенно уменьшает вычислительные затраты и улучшает сходимость вычислительного процесса.

Для устойчивых систем экономия ресурса происходит как за счет свободного движения вначале процесса перевода системы в заданное конечное состояние, так и путем уменьшения длительности самих управляющих воздействий. Для неустойчивых систем, наоборот, система вначале переводится в такое фиксированное состояние, из которого фазовая траектория свободного движения

проходит в конечный момент "вблизи" начала координат. Для систем с нулевыми корнями нет таких начальных условий, для которых экономия ресурса осуществлялась бы за счет свободного движения вначале или в конце процесса перевода. Экономия ресурса для таких систем достигается только за счет уменьшения длительности самих управляющих воздействий.

Вырождение управления возможно при любых собственных значениях матрицы A .

REFERENCES

- [1] L.S. Pontrjagin, V.G. Boltjansky, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, *Mathematical theory of optimal processes*, Moscow: "Nauka", 1976.
- [2] V.G. Boltjansky, *Mathematical methods of optimal control*, Moscow: "Nauka", 1969.
- [3] T. Singh, *Fuel/Time optimal control of the benchmark problem*, J.Guid. Control Dyn., **18**:6 (1995), 1225–1231. Zbl 0875.49020
- [4] V.A. Ivanov, S.A. Kozhevnikov, *One problem of synthesis of optimal "fuel consumption" control of linear objects of the second order with control derivatives*, Reports RAS. Theory and control systems, **4** (1996), 77–83. Zbl 0902.49018
- [5] L.D. Dewell, J.L. Speyer, *Fuel-optimal periodic control and regulation in constrained hypersonic flight*, J.Guid. Control Dyn., **20**:5 (1997), 923–932. Zbl 0882.93065
- [6] S.W. Liu, T. Singh, *Fuel/Time optimal control of spacecraft maneuvers*, J.Guid. Control Dyn., **20**:2 (1997), 394–397. Zbl 0900.49029
- [7] V.M. Aleksandrov, *Approximate solution of the linear problem at minimum resource consumption*, Comput.Math.Math.Phys., **39**:3 (1999), 397–408. MR1683574
- [8] G.V. Shevchenko, *The method of finding the optimal minimum consumption of management resources for objects of a special kind*, Autometry, **42**:2 (2006), 49–67.
- [9] V.M. Aleksandrov, *Optimal resource consumption control of linear systems*, Comput.Math.Math.Phys., **51**:4 (2011), 520–536. MR2858619
- [10] R.P. Fedorenko, *Approximate solution of optimal control problems*, Moscow: "Nauka". 1978. MR0545338
- [11] A.A. Lyubushin, *On the application of modifications of the method of successive approximations for solving optimal control problems*, Comput.Math.Math.Phys., **22**:1 (1982), 29–34. MR0648259
- [12] N.I. Grachev, Yu.G. Evtushenko, *Program library for solving optimal control problems*, Comput.Math.Math.Phys., **19**:2 (1979), 99–119. MR0531347
- [13] R. Gabasov, F.M. Kirillova, *Constructive optimization methods. Part 2. Management task*, Minsk: Publishing House "University", 1984. MR0774403
- [14] V.A. Srochko, *Iterative methods for solving optimal control problems*, Moscow: Fizmatlit, 2000.
- [15] Yu.S. Osipov, *Software packages: an approach to solving problems of positional control with incomplete information*, Russian Math. Surveys, **61**:4 (2006), 611–661. MR2279043
- [16] V.M. Aleksandrov, *Calculation of optimal control in real time*, Comput.Math.Math.Phys., **52**:10 (2012), 1351–1372. MR3150293
- [17] V.M. Aleksandrov, *Iterative method for real-time calculation of optimal control performance*, Siberian journal of computational mathematics, **10**:1 (2007), 1–28. Zbl 1212.49046
- [18] V.M. Aleksandrov, V.A. Dykhita, *Approximate solution of the problem of minimizing resource consumption. II. Assessment of proximity of offices*, J. Appl. Industr. Math., **6**:2 (2012), 135–144. MR2953770

VLADIMIR MIKHAILOVICH ALEKSANDROV
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 PR. KOPTYUGA, 4,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
 E-mail address: vladalex@math.nsc.ru