

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 1416–1425 (2018)

УДК 519.1

DOI 10.17377/semi.2018.15.116

MSC 05C25, 05E10, 05C50, 05E15

Special issue: Groups and Graphs, Metrics and Manifolds – G2M2 2017

О ФУНКЦИИ КРАТНОСТЕЙ
СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ STAR ГРАФА

Е.Н. ХОМЯКОВА

ABSTRACT. The Star graph is the Cayley graph on the symmetric group Sym_n generated by the set of transpositions $\{(12), (13), \dots, (1n)\}$. We consider the spectrum of the Star graph as the spectrum of its adjacency matrix. The spectrum of S_n is integral as it was shown independently by R. Krakovski, B. Mohar, and G. Chapuy, V. Feray in 2012. In this paper we show that the multiplicity of eigenvalues of the Star graph is a polynomial in the indeterminate n of degree $2(t-1)$ with leading coefficient $\frac{1}{(t-1)!}$.

Keywords: Cayley graph, Star graph, symmetric group, graph spectrum, eigenvalues; multiplicity.

1. ВВЕДЕНИЕ

Граф Кэли на симметрической группе Sym_n , порождающее множество которого состоит из транспозиций первого и i -го элементов, где $2 \leq i \leq n$, называется Star графом S_n , $n \geq 2$. Основные свойства Star графа приведены в [6]. Особый интерес представляет исследование спектра данного графа, где под спектром графа понимается набор собственных значений матрицы смежности. Спектр называется целочисленным, если все собственные значения являются целыми. В редких случаях удается найти графы, имеющие целочисленный

Хомякова, Е.Н., ON THE EIGENVALUES MULTIPLICITY FUNCTION OF THE STAR GRAPH.

© 2018 Хомякова Е.Н.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 17-51-560008 и № 18-501-51021.

Поступила 6 октября 2017 г., опубликована 15 ноября 2018 г.

спектр [1]. К таким графам относится Star граф, матрица смежности которого имеет размерность $n! \times n!$, что делает задачу нахождения кратностей собственных значений этого графа нетривиальной.

В 2012 году Р. Краковски, Б. Мохар [7] и Ж. Чапой, В. Ферэй [3] независимо доказали, что спектр Star графа целочислен, и содержит все целые числа в интервале от $-(n-1)$ до $n-1$ (за исключением случая, когда $n \leq 3$, тогда 0 не является собственным значением S_n). Также этими авторами были приведены нижние оценки на кратности собственных значений графа. В 2015 году комбинаторный метод Чапои–Ферэя был использован Е. Константиновой и автором для вычисления точных значений кратностей собственных значений Star графа для $n \leq 10$ [5]. В [2] были получены первые аналитические формулы для вычисления кратностей собственных значений $\pm(n-2)$, $\pm(n-3)$, $\pm(n-4)$ и $\pm(n-5)$.

В настоящей работе доказана теорема о виде функции для вычисления кратности собственных значений от $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ до $n-1$ в Star графе. Основной результат представлен в разделе 3. Необходимые для его доказательства определения, понятия и используемые результаты приводятся в следующем разделе.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Базовые определения и обозначения, не приведенные в настоящем разделе, могут быть найдены в [8].

2.1. Разбиения и стандартные таблицы Юнга. Симметрическая группа Sym_n состоит из всех биекций множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на себя относительно операции композиции. Любая перестановка $\pi \in \text{Sym}_n$ может быть разложена в произведение непересекающихся циклов, причем единственным образом с точностью до порядка следования циклов в произведении. Такое разложение определяет *циклический тип* подстановки – важную характеристику, задающую подстановку с точностью до сопряженности.

Разбиением положительного целого числа n называется последовательность положительных целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$, $l \leq n$ таких, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l = n$. Обозначим $\lambda \vdash n$, если λ является разбиением числа n . Если подстановка $\pi \in \text{Sym}_n$ раскладывается в произведение независимых циклов, длины которых равны $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$ и формально учитываются циклы длины 1 так, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l = n$, то разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$, $l \leq n$ называется циклическим типом подстановки π . Разбиения представляются диаграммами Юнга¹.

Диаграммой Юнга называется конечное множество n клеток, выровненных по левому краю, в котором длины строк, считая снизу, образуют невозрастающую последовательность (каждая вышестоящая строка такой же длины

¹В статье будем использовать *Французскую систему обозначений* для диаграмм Юнга. Также известна зеркально отраженная относительно горизонтали *Английская система обозначений*.

как предыдущая, или короче). Диаграмма Юнга $[\lambda]$, связанная с разбиением $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$, имеет в точности l строк и λ_i клеток в i -ой строке. Определим множество $[\lambda] = \{(i, j) : 1 \leq j \leq \lambda_i, 1 \leq i \leq l\}$, где i и j соответствуют строке и столбцу, в которых находится клетка с нумерацией снизу вверх и слева направо.

Пусть λ является разбиением числа n . Тогда *таблицей Юнга формы λ* называется заполнение клеток диаграммы Юнга элементами $1, 2, \dots, n$, где каждое число встречается ровно один раз. Таким образом каждая клетка $(i, j) \in [\lambda]$, $1 \leq j \leq \lambda_i, 1 \leq i \leq l$, содержит уникальное целое число $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть $c(m) = i - j$. Далее в тексте, значение $c(m)$ выполняет роль важного индикатора в стандартной таблице Юнга.

Стандартной таблицей Юнга называется таблица Юнга, в которой числа в клетках стоят в возрастающем порядке снизу вверх и слева направо.

Пусть $[\lambda]$ является диаграммой Юнга формы λ . *Крюком* клетки $(i, j) \in [\lambda]$ называется множество всех клеток, стоящих над клеткой (i, j) и правее (i, j) , включая саму клетку (i, j) . Число клеток в крюке называется *длиной крюка* h_{ij} .

Сопряженным разбиением называется разбиение $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{l'})$, где $l' = \lambda_1$, $\lambda'_j = \max\{j : (i, j) \in [\lambda]\}$, $1 \leq i \leq l'$. Другими словами, $(i, j) \in [\lambda]$ тогда и только тогда, когда $(j, i) \in [\lambda']$. Тогда, длина крюка h_{ij} определяется следующей формулой [4]:

$$(1) \quad h_{ij} = \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1.$$

В следующем разделе объясняется связь между стандартными таблицами Юнга и собственными значениями Star графа.

2.2. Представление группы Sym_n и кратности собственных значений графа S_n . Пусть G – конечная группа. Рассмотрим конечномерное векторное пространство V над полем комплексных чисел \mathbb{C} и множество $GL(V)$ всех обратимых линейных преобразований V на себя. Тогда *представлением* группы G на векторном пространстве V называется гомоморфизм $\rho : G \rightarrow GL(V)$, а V называется *пространством представления* размерности $\dim(V)$.

Представление называется *неприводимым*, если оно не имеет нетривиальных инвариантных подпространств. Пусть даны два векторных пространства V_1 и V_2 , тогда два представления $\rho_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ и $\rho_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ *эквивалентны*, если существует изоморфизм векторных пространств $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ такой, что $\varphi \rho_2(g) = \rho_1(g) \varphi$ для всех $g \in G$.

Пусть V – векторное пространство размерности, совпадающей с порядком $|G|$ группы G . Зафиксируем базис этого пространства. Тогда существует биекция $g \rightarrow e_g$ между элементами группы и элементами базиса. *Регулярное представление* $\rho_{\text{reg}} : G \rightarrow GL(V)$ группы G задается действием элементов группы на базисных векторах по правилу $\rho_{\text{reg}}(g)(e_h) = e_{hg}$. Известно, что у конечной группы в классе лишь конечное число попарно неэквивалентных неприводимых представлений ρ_1, \dots, ρ_r и регулярное представление ρ_{reg} раскладывается

в прямую сумму:

$$(2) \quad \rho_{\text{reg}} = \underbrace{\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_1}_{\dim(V_1)} \oplus \dots \oplus \underbrace{\rho_r \oplus \dots \oplus \rho_r}_{\dim(V_r)},$$

где V_i – пространство неприводимого представления ρ_i .

Полный набор попарно неэквивалентных неприводимых представлений симметрической группы Sym_n (как и классы сопряженности в Sym_n) параметризуется всевозможными разбиениями числа n . Для представления, отвечающего разбиению $\lambda \vdash n$, обозначим через V_λ пространство соответствующего представления. В [3] показано, что связь между представлением симметрической группы и кратностями собственных значений Star графа S_n выражается в следующем виде:

$$(3) \quad \text{mul}(n-t) = \sum_{\lambda \vdash n} \dim(V_\lambda) I_\lambda(n-t),$$

где $I_\lambda(n-t)$ есть число стандартных таблиц Юнга формы λ , удовлетворяющих условию $c(n) = n-t$.

Заметим, что размерность неприводимого представления $\dim(V_\lambda)$ равна числу различных стандартных таблиц Юнга, которая вычисляется с помощью формулы крюков (Hook Formula) [4]:

$$(4) \quad \dim(V_\lambda) = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in [\lambda]} h_{ij}},$$

где $\lambda \vdash n$.

Обозначим через \mathcal{A}_t все разбиения числа n длины $l = n-t+1$ с последней компонентой равной 1. Для любого такого разбиения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-t}, 1)$ обозначим через $\hat{\lambda}$ разбиение $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-t})$ числа $n-1$.

Лемма. Для любого целого t , $1 \leq t \leq \frac{n+1}{2}$ имеем

$$I_\lambda(n-t) = \dim(V_{\hat{\lambda}})$$

при $\lambda \in \mathcal{A}_t$ и $I_\lambda(n-t) = 0$ во всех остальных случаях.

Доказательство. Рассмотрим собственное значение $(n-t)$ в Star графе S_n . Пусть $\lambda \in \mathcal{A}_t$. Если $1 \leq t \leq \frac{n+1}{2}$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$, $l = n-t+1$, то $\lambda_l = 1$. В этом случае существует стандартная таблица Юнга формы λ , для которой выполняется условие $c(n) = n-t$. Найдем координаты клеток, в которых это условие выполняется. Пусть n находится в i -ой строке, $i \leq l$ и имеет координаты (i, λ_i) . Тогда верно

$$(5) \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n - \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq n-t = c(n) = i - \lambda_i \leq l - \lambda_i.$$

Предположим $\lambda_i \geq 2$. Рассмотрим (5):

$$n + \lambda_i = i + t \leq i + \frac{n+1}{2},$$

$$\begin{aligned} n &= \lambda_1 + \dots + \lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_l \geq i\lambda_i + (l - i), \\ i\lambda_i + (l - i) + \lambda_i &\leq n + \lambda_i \leq i + \frac{n + 1}{2}, \\ l + 2 = 2(i + 1) + l - 2i &\leq (i + 1)\lambda_i + l - 2i \leq \frac{n + 1}{2}, \\ l + 2 &\leq \frac{n + 1}{2}, \quad l \leq \frac{n + 1}{2} - 2 < \frac{n + 1}{2} - 1, \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &= n - \left\lceil \frac{n + 1}{2} \right\rceil \leq n - t \leq l - \lambda_l < \frac{n + 1}{2} - 1 - 2. \end{aligned}$$

Получили противоречие, а значит $\lambda_i = 1$. Таким образом в стандартной таблице Юнга, соответствующей такому разбиению, число n занимает единственную верхнюю клетку с координатами $(n - t + 1, 1)$, и для нее выполняется условие

$$(6) \quad c(n) = i - j = n - t.$$

В стандартных таблицах Юнга формы $\lambda \in \mathcal{A}_t$, в которых n находится в клетке с другими координатами, и в стандартных таблицах Юнга формы $\lambda \notin \mathcal{A}_t$ условие (6) не выполняется и $I_\lambda(n - t) = 0$.

Диаграммы Юнга $[\lambda]$ для стандартных таблиц Юнга с условием (6) могут принимать лишь следующий вид: первый столбец состоит из $n - t + 1$ клеток, а остальные $t - 1$ распложены справа от первого столбца в невозрастающем по столбцам порядке. Такое распределение клеток возможно при условии, что первый столбец всегда будет выше второго как минимум на 1 клетку. В Star графе такие диаграммы Юнга дают кратности собственных значений в интервале от $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ до $n - 1$.

Количество таких стандартных таблиц Юнга соответствует количеству различных стандартных таблиц Юнга формы $\hat{\lambda}$. Будем считать, что диаграмма $[\hat{\lambda}]$ есть диаграмма $[\lambda]$ без клетки, содержащей элемент n . Таким образом форма диаграммы $[\hat{\lambda}]$ повторяет форму диаграммы $[\lambda]$, за исключением первого столбца. Откуда следует утверждение Леммы. □

Далее считаем, что $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$, $l = n - t + 1$, $\lambda \in \mathcal{A}_t$. Будем обозначать \widehat{h}_{ij} длины крюков в диаграмме Юнга $[\hat{\lambda}]$ и вычислять по формулам:

$$(7) \quad \widehat{h}_{ij} = \begin{cases} \lambda_i - j + (\lambda'_j - 1) - i + 1, & j = 1, 1 \leq i \leq l - 1; \\ \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1, & 1 < j \leq \lambda_i, 1 \leq i \leq l - 1; \\ 0, & i = l = n - t + 1. \end{cases}$$

На Рисунках 1(а) и 1(б) представлены диаграмма Юнга формы λ и аналогичная диаграмма без верхней клетки с фиксированным значением n в верхней левой клетке, что дает нужное $c(n) = n - t$.

Согласно утверждению Леммы, формула (3) принимает следующий вид при $1 \leq t \leq \frac{n+1}{2}$:

$$(8) \quad \text{mul}(n - t) = \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_t} \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in [\lambda]} h_{ij}} \cdot \frac{(n - 1)!}{\prod_{(i,j) \in [\hat{\lambda}]} \widehat{h}_{ij}}.$$

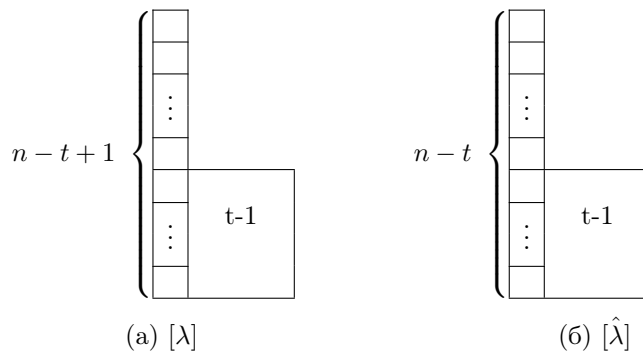


Рисунок 1. Диаграммы Юнга формы $\lambda \in \mathcal{A}_t$ и $\hat{\lambda}$

Также известно [8], что связь между размерностью попарно неэквивалентных неприводимых представлений и порядком группы выражается следующим образом:

$$(9) \quad \sum_{\lambda \vdash n} (\dim(V_\lambda))^2 = |\text{Sym}_n|.$$

3. КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ STAR ГРАФА

Основной результат статьи формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть $n, t \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ и $1 \leq t \leq \frac{n+1}{2}$, тогда кратность $\text{mul}(n-t)$ собственного значения $(n-t)$ Star графа S_n вычисляется по формуле:

$$\text{mul}(n-t) = \frac{n^{2(t-1)}}{(t-1)!} + P(n),$$

где $P(n)$ есть некоторый многочлен степени $2t-3$.

Доказательство. Запишем формулу (8) в следующем виде:

$$(10) \quad \begin{aligned} \text{mul}(n-t) &= \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_t} \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in [\lambda]} h_{ij}} \cdot \frac{(n-1)!}{\prod_{(i,j) \in [\hat{\lambda}]} \widehat{h}_{ij}} = \\ &= \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_t} \frac{n!}{\prod_{(i,1) \in [\lambda]} h_{i1} \prod_{\substack{(i,j) \in [\lambda] \\ j > 1}} h_{ij}} \cdot \frac{(n-1)!}{\prod_{(i,1) \in [\hat{\lambda}]} \widehat{h}_{i1} \prod_{\substack{(i,j) \in [\hat{\lambda}] \\ j > 1}} \widehat{h}_{ij}}. \end{aligned}$$

По построению диаграмм $[\lambda]$ и $[\hat{\lambda}]$ имеют место равенства:

$$\frac{1}{\prod_{(i,1) \in [\hat{\lambda}]} \widehat{h}_{i1}} = \frac{1}{\prod_{(i,1) \in [\hat{\lambda}]} (h_{i1} - 1)} = \frac{1}{\prod_{\substack{(i,1) \in [\lambda] \\ i \neq n-t+1}} (h_{i1} - 1)},$$

$$\frac{1}{\prod_{\substack{(i,j) \in [\hat{\lambda}] \\ j > 1}} \widehat{h_{ij}}} = \frac{1}{\prod_{\substack{(i,j) \in [\lambda] \\ j > 1}} h_{ij}},$$

так как удаление верхней левой клетки влияет на длину крюков только в первом столбце. Используя эти равенства, продолжим (10):

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_t} \frac{n!}{\prod_{(i,1) \in [\lambda]} h_{i1} \prod_{\substack{(i,j) \in [\lambda] \\ j > 1}} h_{ij}} \cdot \frac{(n-1)!}{\prod_{\substack{(i,1) \in [\lambda] \\ i \neq n-t+1}} (h_{i1} - 1) \prod_{\substack{(i,j) \in [\lambda] \\ j > 1}} h_{ij}} = \\ (11) \quad & = \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_t} \frac{1}{\prod_{\substack{(i,j) \in [\lambda] \\ j > 1}} (h_{ij})^2} \cdot \frac{n!(n-1)!}{\prod_{\substack{(i,1) \in [\lambda] \\ i \neq n-t+1}} h_{i1}(h_{i1} - 1)}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$F_\lambda(n) = \frac{n!(n-1)!}{\prod_{\substack{(i,1) \in [\lambda] \\ i \neq n-t+1}} h_{i1}(h_{i1} - 1)}.$$

Заметим, что числитель есть произведение $n + (n - 1)$ чисел вида $(n - c_i)$, где $0 \leq c_i \leq n - 1$, $c_i \in \mathbb{Z}$, а знаменатель есть произведение $(n - t + 1) + (n - t)$ чисел также вида $(n - c_i)$, где $0 \leq c_i \leq n - 2$, $c_i \in \mathbb{Z}$, так как длина крюка по определению $1 \leq h_{i1} \leq n$, исключая $h_{i1} = 1$ согласно условию $i \neq n - t + 1$. Кратность множителей в числителе не превосходит 2. По построению диаграмм Юнга $[\lambda]$ и $[\hat{\lambda}]$ кратность множителей в знаменателе также не может превышать 2. Таким образом в числителе и знаменателе можем сократить одинаковые сомножители. Следовательно, $F_\lambda(n)$ есть произведение $2(t - 1)$ чисел вида $(n - c_i)$, где $0 \leq c_i \leq n - 1$, $c_i \in \mathbb{Z}$. Очевидно, числа c_i являются корнями многочлена $F_\lambda(n)$:

$$F_\lambda(n) = \prod_i (n - c_i) = n^{2(t-1)} + k_1 n^{2t-3} + k_2 n^{2t-4} + \dots + k_{2(t-1)}.$$

Коэффициенты k_j определяются по формуле Виета и равны сумме всех возможных произведений из j корней с учетом знака: $k_j = (-1)^j c_1 c_2 \dots c_j$. Например, $k_2 = -(c_1 + c_2 + \dots + c_{2(t-1)})$ и $k_{2(t-1)} = (-1)^{2(t-1)} (c_1 c_2 \dots c_{2(t-1)})$. Заметим, что c_i зависят от формы диаграммы Юнга $[\lambda]$, тогда $F_\lambda(n)$ представим в виде:

$$F_\lambda(n) = n^{2(t-1)} + f_\lambda(n),$$

где $f_\lambda(n)$ есть некоторый многочлен степени $2t - 3$ с целыми коэффициентами. Запишем равенство (11) в следующем виде:

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{A}_t} \frac{1}{\prod_{\substack{(i,j) \in [\lambda] \\ j > 1}} (h_{ij})^2} \cdot (n^{2(t-1)} + f_\lambda(n)) =$$

$$(12) \quad = \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_t} \frac{1}{\prod_{\substack{(i,j) \in [\lambda] \\ j > 1}} (h_{ij})^2} \cdot n^{2(t-1)} + \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_t} \frac{1}{\prod_{\substack{(i,j) \in [\lambda] \\ j > 1}} (h_{ij})^2} \cdot f_\lambda(n),$$

где $f_\lambda(n)$ есть некоторый многочлен степени $2t - 3$. Крюки h_{ij} при $(i, j) \in [\lambda]$ и $i > 1$ находятся не в первом столбце диаграммы Юнга формы $\lambda \in \mathcal{A}_t$, а значит можем перейти к рассмотрению диаграммы, содержащей все столбцы диаграммы $[\lambda]$ кроме первого. По построению такая диаграмма Юнга состоит из $(t - 1)$ клеток. Используя формулы (4) и (9), получаем следующий результат:

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{A}_t} \frac{n^{2(t-1)}}{\prod_{\substack{(i,j) \in [\lambda] \\ j > 1}} (h_{ij})^2} = \sum_{\lambda'' \vdash (t-1)} \frac{n^{2(t-1)}}{\prod_{(i,j) \in [\lambda'']} (h_{ij})^2} = \frac{|\text{Sym}_{(t-1)}| \cdot n^{2(t-1)}}{(t-1)!^2} = \frac{n^{2(t-1)}}{(t-1)!},$$

где $\lambda'' = (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_{t-1} - 1)$ это всевозможные разбиения числа $(t - 1)$. Рассмотрим вторую сумму в (12). Согласно условию $j > 1$, можем утверждать, что диаграмма Юнга $[\hat{\lambda}]$ однозначно достраивается до диаграммы $[\lambda]$, добавлением первого столбца. Таким образом осуществим переход от $f_\lambda(n)$ к $f_{\lambda''}(n)$:

$$(13) \quad \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_t} \frac{1}{\prod_{\substack{(i,j) \in [\lambda] \\ j > 1}} (h_{ij})^2} \cdot f_\lambda(n) = \sum_{\lambda'' \vdash (t-1)} \frac{1}{\prod_{(i,j) \in [\lambda'']} (h_{ij})^2} \cdot f_{\lambda''}(n).$$

Очевидно, коэффициенты в (13) уже не зависят от n , что дает право суммировать многочлены $f_{\lambda''}(n)$. Обозначим получившийся многочлен степени $2t - 3$ как $P(n)$. Таким образом кратность собственного значения $(n - t)$ Star графа S_n вычисляется по формуле:

$$\text{mul}(n - t) = \frac{n^{2(t-1)}}{(t-1)!} + P(n),$$

где $P(n)$ есть некоторый многочлен степени $2t - 3$. □

Заметим, что спектр Star графа симметричен относительно собственного значения 0, т.е. $\text{mul}(n - t) = \text{mul}(-(n - t))$. Следовательно, Теорема справедлива для отрицательных собственных значений графа.

Замечание. Практические результаты показывают, что утверждение Теоремы остается верным при всех целых $n \geq 2$ и $1 \leq t \leq n$. Следующие формулы получены с помощью метода, описанного в статье, и дают кратности $\text{mul}(n - t)$ собственных значений $(n - t)$ Star графа S_n при $n \geq 2$ и фиксированном $2 \leq t \leq 12$:

$$\text{mul}(n - 2) = (n - 1)(n - 2);$$

$$\text{mul}(n - 3) = \frac{(n-1)(n-3)}{2!}(n^2 - 4n + 2);$$

$$\text{mul}(n - 4) = \frac{(n-1)(n-2)}{3!} (n^4 - 12n^3 + 47n^2 - 62n + 12);$$

$$\text{mul}(n - 5) = \frac{(n-1)(n-2)}{4!} (n^6 - 21n^5 + 169n^4 - 647n^3 + 1174n^2 - 820n + 60);$$

$$\text{mul}(n - 6) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{5!} (n^7 - 29n^6 + 335n^5 - 1955n^4 + 6004n^3 - 9028n^2 + 5068n - 120);$$

$$\text{mul}(n - 7) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6!} (n^9 - 42n^8 + 744n^7 - 7228n^6 + 41889n^5 - 147190n^4 + 302970n^3 - 328600n^2 + 140336n - 840);$$

$$\text{mul}(n - 8) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{7!} (n^{10} - 53n^9 + 1206n^8 - 15400n^7 + 120995n^6 - 602539n^5 + 1884770n^4 - 3526192n^3 + 3515644n^2 - 1385752n + 1680);$$

$$\text{mul}(n - 9) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8!} (n^{12} - 70n^{11} + 2165n^{10} - 38962n^9 + 452071n^8 - 3538962n^7 + 18992119n^6 - 69486678n^5 + 168611532n^4 - 255823264n^3 + 215298016n^2 - 74535168n + 15120);$$

$$\text{mul}(n - 10) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{9!} (n^{13} - 84n^{12} + 3149n^{11} - 69516n^{10} + 1003947n^9 - 9962604n^8 + 69399287n^7 - 340356732n^6 + 1159537744n^5 - 2655899000n^4 + 3843130464n^3 - 3110922016n^2 + 1044298320n - 30240);$$

$$\text{mul}(n - 11) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{10!} (n^{15} - 105n^{14} + 5005n^{13} - 143355n^{12} + 2752087n^{11} - 37392489n^{10} + 370002755n^9 - 2701681905n^8 + 14581677068n^7 - 57662568122n^6 + 163637288684n^5 - 321068683400n^4 + 408207829104n^3 - 297483438704n^2 + 92156167776n - 332640);$$

$$\text{mul}(n - 12) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{11!} (n^{16} - 122n^{15} + 6800n^{14} - 229410n^{13} + 5231382n^{12} - 85270438n^{11} + 1024324268n^{10} - 9213080470n^9 + 62383290673n^8 - 316945929608n^7 + 1193507219068n^6 - 3254674992768n^5 + 6181444807824n^4 - 7653794621472n^3 + 5460913410224n^2 - 1664568429792n + 665280).$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает искреннюю признательность научному руководителю Елене Валентиновне Константиновой за внимание к работе, поддержку и терпение. Сергею Владимировичу Августиновичу, что с особым энтузиазмом принимал участие в исследовании темы статьи. Даниле Олеговичу Ревину за оказанную любезность поделиться своими замечаниями и предложениями. Андрею Витальевичу Заварнищину за полезные консультации и проявленный интерес. Анонимному рецензенту за его конструктивную критику, позволившую значительно улучшить качество статьи. Также автор выражает благодарность знакомым и коллегам за их содействие в подготовке этой статьи.

REFERENCES

- [1] N. Alon, O. Ahmadi, I. F. Blake, I. E. Shparlinski, *Graphs with integral spectrum*, Linear Algebra and its Applications, **430** (2009), 547–552. Zbl 1178.05060
- [2] S. Avgustinovich, E. Khomyakova, E. Konstantinova, *Multiplicities of eigenvalues of the Star graph*, Sib. Electron. Math. Reports, **13** (2016), 1258–1270. Zbl 06770272
- [3] G. Chapuy, V. Feray, A note on a Cayley graph of Sym_n , *arXiv:1202.4976v2* (2012), 1–3.
- [4] J. S. Frame, G. de B. Robinson, R.M. Thrall, *The hook graphs of the symmetric group*, Canad. J. Math., **6** (1954), 316–325. Zbl 0055.25404
- [5] E. N. Khomyakova, E. V. Konstantinova, *Note on exact values of multiplicities of eigenvalues of the Star graph*, Sib. Electron. Math. Reports, **12** (2015), 92–100. Zbl 1341.05152
- [6] E. V. Konstantinova, *Some problems on Cayley graphs*, Koper: University of Primorska Press, 2013. 98 pp. (Famnit lectures, ISSN 2335–3708; 1). (<http://www.hippocampus.si/ISBN/978-961-6832-51-9/index.html>)
- [7] R. Krakovski, B. Mohar, *Spectrum of Cayley Graphs on the Symmetric Group generated by transposition*, Linear Algebra and its applications, **437** (2012), 1033–1039. Zbl 1243.05149
- [8] B. Sagan, *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, Springer, New York, second edition, 2001. Zbl 0964.05070

ЕКАТЕРИНА Н. ХОМЯКОВА
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ул. ПИРОГОВА, д. 2,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: EKhomNSU@gmail.com